



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier – um curso para o Ensino Médio**

Gabriel Torreão Dias da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Helio Salim de Amorim

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2024

# **Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier – um curso para o Ensino Médio**

Gabriel Torreão Dias da Silva

Orientador: Helio Salim de Amorim

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Dr. Vitorvani Soares (IF–UFRJ, Presidente, interno)

---

Dr. Helio Salim de Amorim (IF–UFRJ, interno)

---

Dr. Luca Roberto Augusto Moriconi (IF–UFRJ, externo)

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2024

## FICHA CATALOGRÁFICA

S586a Silva, Gabriel Torreão Dias da

Amostragem de grandezas na física e seus espectros de Fourier – um curso para o Ensino Médio / Gabriel Torreão Dias da Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2024.  
295 f.

Orientador: Helio Salim de Amorim.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2024.

1. Ensino de Física. 2. Espectro de Fourier. 3. Amostragem. I. Amorim, H. S., orient. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Amostragem de grandezas na física e seus espectros de Fourier – um curso para o Ensino Médio.

Dedico esta dissertação  
a minha esposa Mayara e a  
minha filha Maria Clara.

## **Agradecimentos**

Este trabalho não seria possível sem os colaboradores do Colégio Naval, em especial os professores André Marcelo Santos de Souza e Hugo Auad Almeida de Moraes, que acreditaram no trabalho, auxiliaram a aplicá-lo onde ele será de maior proveito e contribuíram com sugestões e observações ao longo de todo o desenvolvimento. A eles, meus agradecimentos.

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Helio Salim de Amorim, pelo incentivo e apoio na empreitada de um tema tão desafiador.

Ao vice-almirante Guilherme da Silva Costa, ao comandante Sergio Miranda Brandão e aos membros do Conselho de Ensino da Escola Naval, agradeço por seus papéis facilitadores no processo de qualificação do pessoal na Escola Naval, e, em especial, por possibilitarem a elaboração deste trabalho.

Agradeço à minha família, em especial a minha esposa Mayara, pelo suporte e compreensão durante este período.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

### **Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier – um curso para o Ensino Médio**

Gabriel Torreão Dias da Silva

Orientador: Helio Salim de Amorim

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Apresentamos o desenvolvimento de um curso e seus materiais instrucionais para realização de amostragem de grandezas, cálculo e interpretação do espectro de Fourier por meio de uma adaptação da apresentação típica do ensino superior para uma forma de série finita trigonométrica adequada ao Ensino Médio. O curso tem objetivo de compor disciplina eletiva da parte diferenciada de itinerários formativos de Matemática e suas tecnologias ou de Ciências da Natureza e suas tecnologias, visando atividades interdisciplinares de aprofundamento de Física, Matemática e Programação e envolvendo temas de tecnologia e Processamento de Sinais. A aplicação da proposta foi realizada em grupos de estudo formados na Escola Naval e no Colégio Naval e validou sua viabilidade para emprego como disciplina eletiva nos últimos anos do Ensino Médio.

Palavras chave: Ensino de Física, Espectro de Fourier, Amostragem.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2024

# ABSTRACT

## Sampling of quantities in Physics and its Fourier spectra – a course for high school

Gabriel Torreão Dias da Silva

Supervisor: Helio Salim de Amorim

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

We present the development of a course and its instructional materials for sampling quantities, calculating and interpreting the Fourier spectrum by adapting the typical college presentation to a trigonometric finite series form suitable for High School level. The course aims to compose an elective discipline of the “differentiated part” of “formative itineraries” in Mathematics and its technologies or in Natural Sciences and its technologies, legal subdivisions of high school in Brazil, aiming at interdisciplinary activities of in-depth study of Physics, Mathematics and Programming and involving themes of technology and Signal Processing. The application of the proposal was carried out in study groups formed at the Brazilian Naval School (Escola Naval) and Brazilian Navy high school course (Colégio Naval) which validated its viability for use as an elective discipline in the last years of high school.

Keywords: Physics education, Fourier spectrum, Sampling.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2024

# Lista de Abreviaturas e Siglas

## Instituições de ensino e comissões elaboradoras de prova

CN	Colégio Naval
EN	Escola Naval
ENADE	Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes
EPFL	École Polytechnique Fédérale de Lausanne
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
IE	Instituição de Ensino
LSJU	Leland Stanford Junior University
MIT	Massachusetts Institute of Technology
QS	Quacquarelli Symonds
RUF	Ranking Universitário Folha
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
USP	Universidade de São Paulo



## Transformadas e séries

FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> – Transformada rápida de Fourier
SF	Série de Fourier (de tempo contínuo)
SFTD	Série de Fourier de tempo discreto
TFD	Transformada de Fourier discreta
TF	Transformada de Fourier (de tempo contínuo)
TFTD	Transformada de Fourier de tempo discreto
TL	Transformada de Laplace

# Lista de Símbolos

$\delta(t)$	Função impulso unitário ou delta de Dirac.
$T_s$	Período de amostragem.
$*$	Operador de convolução. Não confundir com multiplicação nos códigos em Python que estará diferenciado pela fonte do tipo monoespaçada.
$j$ ou $i$	Unidade imaginária tal que $j^2 = i^2 = -1$ .
$\text{Re } z$	Parte real de $z \in \mathbb{C}$ .
$\text{Im } z$	Parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$ .
$\arg z$	Ângulo $\theta = \arctg(b/a)$ do número $z = a + jb \in \mathbb{C}$ .
$\int_{[T]} f(t)dt$	Integral de uma variável em um intervalo de comprimento $T$ . Equivalente a $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$ .
u.a.	Unidades arbitrárias.

# Sumário

<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Análise de espectro no Ensino Médio</b>	<b>6</b>
2.1 Física – a porta para as carreiras em tecnologia . . . . .	8
2.2 Espectro de Fourier no Ensino Médio – oportunidade de aprofundamento em temas de tecnologia . . . . .	10
2.3 Apresentação de amostragem e análise de espectro no Ensino Médio . . . . .	13
2.3.1 Análise de espectro em processos seletivos . . . . .	19
2.4 Espectro de frequências como instrumentação para medida de frequência . . . . .	25
<b>3 Proposta de Curso de Análise de Espectro para o Ensino Médio</b>	<b>27</b>
3.1 Cursos com amostragem e análise de espectro no ensino regular	27
3.1.1 Abordagem da amostragem no Ensino Superior . . . .	31
3.1.2 Abordagem da análise de espectro no Ensino Superior .	36
3.2 Adaptação das noções de amostragem para o Ensino Médio . .	39
3.2.1 Ambiguidade da amostragem de senoides e o Teorema de Nyquist no Ensino Médio . . . . .	44
3.3 Adaptação da série de Fourier para o Ensino Médio . . . . .	47
3.4 Outros suportes para a construção da série de Fourier de tempo discreto e suas equações de análise . . . . .	53
3.4.1 Rearranjo das equações de síntese e análise na forma matricial . . . . .	53
3.4.2 A SFTD compacta e o espectro de Fourier . . . . .	55

3.4.3	Componentes de um sinal periódico a partir da relação básica de periodicidade . . . . .	56
3.4.4	Obtenção dos coeficientes da SFTD por sistema de equações . . . . .	58
3.4.5	Senoides como base de um espaço vetorial do $\mathbb{R}^N$ . . .	59
3.4.6	Cálculo das equações de síntese e análise da SFTD com Python . . . . .	64
3.5	Noção e definição de sinais, espectro e conversores . . . . .	69
3.6	Construção de uma sequência didática para obtenção da série de Fourier de tempo discreto para Ensino Médio . . . . .	78
3.6.1	Análise de prerequisites para uso da SFTD no Ensino Médio . . . . .	80
3.6.2	Resumo de tópicos relevantes para análise de espectro de Fourier . . . . .	83
3.6.3	Desenvolvimento do curso . . . . .	83
3.7	Definição de problemas para aplicação . . . . .	85
3.7.1	Problemas direcionados à SFTD como instrumentação na medida de frequências . . . . .	85
3.7.2	Problemas orientados ao uso de filtros no domínio da frequência . . . . .	88
3.7.3	Problema orientado a noções de resposta em frequência e resposta ao impulso . . . . .	90
3.8	Uso e interpretação da transformada rápida de Fourier (FFT) no Ensino Médio . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Aplicação</b>	<b>95</b>
4.1	Treinamento de docentes e acompanhamento das atividades . .	96
4.2	Motivação dos alunos . . . . .	97
4.3	Emprego do computador e programação em Python . . . . .	98
4.4	O que os alunos acharam da experiência . . . . .	98
4.5	O que os docentes acharam da experiência . . . . .	100
4.6	Dificuldades, melhorias futuras e observações . . . . .	101
4.7	Conclusão . . . . .	103
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>103</b>
	<b>A Material Instrucional – Apostila</b>	<b>109</b>
	<b>B Material Instrucional – Videoaulas</b>	<b>214</b>
	<b>C Material Instrucional – Projetos para análise de espectro</b>	<b>217</b>

D Material Instrucional – Sugestões para realização dos projetos	222
--	-----

# Capítulo 1

## Introdução

As ideias de decomposição de uma grandeza em termos de componentes é um antigo e importante método de análise e modelagem da Física, o que se observa, pelo menos, desde o estudo de decomposição da luz em suas componentes espectrais realizada por Newton e publicado em seu livro *Opticks* em 1704.

A decomposição de uma grandeza variável no tempo em termos de componentes harmônicas senoidais é um importante uso desta estratégia. Ela não só auxilia a modelar fenômenos ondulatórios complexos em termos de uma série de oscilações com frequências que são múltiplas inteiras de uma frequência fundamental, como possibilita interpretações que designamos *análise no domínio da frequência* que seriam impossíveis em sua contrapartida, aquela no domínio do tempo.

Embora representações por componentes trigonométricas tenham sido amplamente empregadas ao longo da história da Matemática e da Física, foi o trabalho de Jean-Baptiste Joseph Fourier publicado em 1822 que inseriu definitivamente as análises em componentes harmônicas como estratégia fundamental na descrição de fenômenos físicos [1]. O importante papel de Fourier lhe garantiu o empréstimo de seu nome nas análises no domínio da frequência que passaram, predominantemente, a ser designadas *análises de Fourier*. Como é a composição por diferentes frequências que permite a decomposição da luz no seu espectro, a análise de Fourier também é chamada

de análise de espectro.

Além de sua presença significativa na Matemática e na Física, a análise de Fourier é tópico mandatório no estudo de tecnologias das áreas das Engenharias Elétrica, da Computação, de Telecomunicações, de Automação e Controle e Biomédica, na análise de sistemas e no processamento de sinais como suporte às tecnologias cujos projetos dependem da análise no domínio da frequência.

O caso mais simples da aplicação do espectro de Fourier é na medição de frequência. Um exemplo simples consiste na medição da frequência com que as asas de um beija-flor batem. Este problema não é tão fácil de resolver por meio do vídeo pois exige uma frequência de captura de quadros elevada e o correto ajuste dos parâmetros da câmera, caso contrário, o que se observa é apenas o borrão resultante do rápido movimento das asas. Este problema não ocorre com o áudio, que é bem preservado na captura com equipamentos comerciais comuns. A análise da física desta situação nos indica que o som emitido pelo bater das asas do beija-flor é resultante da perturbação que suas asas causam na atmosfera na vizinhança da asa. A frequência desta perturbação coincide com a origem da perturbação, o próprio movimento ordenado das asas. Desta forma, a frequência do som emitido, deve coincidir com a frequência do bater das asas.

A figura 1.1 apresenta um trecho de aproximadamente 800 ms do áudio captado na batida das asas do beija-flor. No gráfico, é possível ver que, de fato, o fenômeno parece ser aproximadamente periódico e que a variação de pressão apresenta vales acentuados. O intervalo entre dois vales foi tomado como referência aproximada de um período e de onde se pode estimar a frequência de 44 Hz. Esta é a estimativa realizada no domínio do tempo, já que nosso problema foi representado pelas relações das variação de pressão  $\times$  tempo.

O mesmo problema pode ser levado ao domínio da frequência se observarmos o espectro de Fourier do mesmo trecho de áudio da figura 1.2. Agora, ao observar a intensidade dos componentes de pressão  $\times$  frequência, observamos que o efeito das asas possuem alguns componentes com intensidades relativamente acentuadas nas frequências de 43,75, 86,25, 128,75, 171,25 e

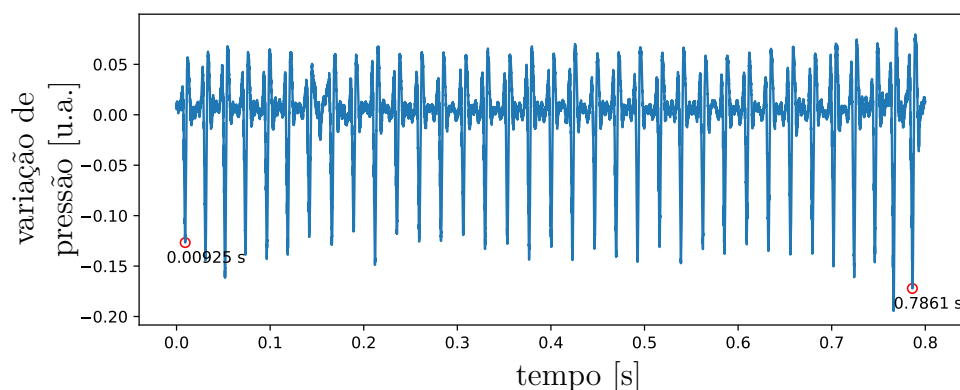


Figura 1.1: Trecho de áudio do batida de asas de um beija-flor.

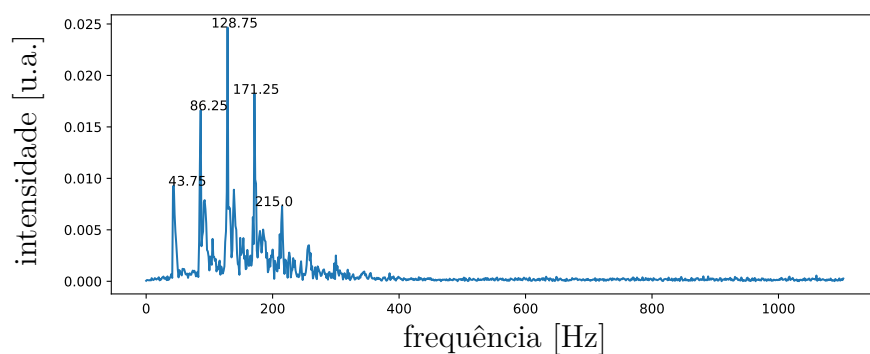


Figura 1.2: Espectro do trecho de áudio emitido pelas asas.

215 Hz, o que também caracteriza uma oscilação em aproximadamente 44 Hz, uma vez que se observam componentes, aproximadamente, nesta frequência e em seus múltiplos inteiros, ou harmônicos.

Ao propor um problema relacionado à medida de frequência, se observa que o domínio da frequência é mais apropriado para a coleta dos dados, uma vez que a medição é feita diretamente sobre o gráfico do espectro por meio leitura da frequência relativa ao primeiro pico, a da frequência fundamental. Este exemplo é o mais simples e apenas ilustrativo. Em alguns fenômenos e tecnologias, como modulação em amplitude (AM), há um afastamento ainda maior com relação às informações apresentadas quando se compara o domínio do tempo com o da frequência.

O presente trabalho de dissertação, que ora passamos a descrever, foi



fortemente motivado pela possibilidade da antecipação de tópicos de tecnologia típicos do Ensino Superior em disciplinas eletivas previstas nos, assim chamados, Itinerários Formativos, orientados ao aprofundamento em Ciências Exatas. Estes itinerários figuram na redação das diretrizes e bases da educação nacional, estabelecida pela Lei nº 9.394/1996, desde a modificação proposta pela Medida Provisória nº 746/2016. A redação mais atual deste tópico é dada pela Lei nº 14.945/2024.

Considerando a importância do tópico e essa previsão legal, começamos a desenvolver, em 2022, um curso de análise de Fourier em grandezas amostradas e sua aplicação a problemas de Física e tecnologia com a finalidade de aplicá-lo no Colégio Naval (CN), curso de Ensino Médio e preparatório para a formação superior na Escola Naval. A proposta do curso considera uma aplicação sob a forma de disciplina eletiva da parte diversificada de seu Itinerário Formativo de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A presente dissertação foi organizada em quatro capítulos. No Capítulo 2, analisamos o estudo, ou a possibilidade de estudo, de tópicos de tecnologia no Ensino Médio. Procuramos focar, em particular, na aplicabilidade desses tópicos no Colégio Naval, instituição com a qual mantenho um vínculo por meu trabalho na Escola Naval. Naturalmente, essa vinculação tem um caráter estratégico na medida em que possibilita aplicações das ideias aqui desenvolvidas diretamente com nossos alunos. Consideramos o caráter interdisciplinar das tecnologias e a centralidade da Física na apresentação destes tópicos como um fato básico e procuramos desenvolver uma metodologia, ou mais simplesmente, uma linha de argumentação envolvendo, especificamente, o uso dos conceitos de análise de espectro e de amostragem para o nível médio. Veremos mais adiante, como conclusão, que esses conceitos são acessíveis neste nível.

Ainda no Capítulo 2, consideramos outras finalidades para o curso, pois esperamos que ele possa servir de contribuição geral tanto no nível médio como para fundamentar alterações curriculares no início do Ensino Superior.

Como já indicamos, os conceitos que esperamos introduzir são típicos do Ensino Superior. No Capítulo 3, detalhamos os diversos formatos de análise de Fourier empregados nos cursos de Engenharia e, mais especificamente,

adaptamos uma de suas modalidades, a série de Fourier de tempo discreto, para se adequar ao nível e aos conceitos usualmente explorados no Ensino Médio e, em particular, no nível do Colégio Naval. Com a apresentação dessa adaptação, vamos encaminhar a proposta de curso.

Formamos grupos de estudo no 3º ano do Colégio Naval e no 1º ano da Escola Naval<sup>1</sup> com a finalidade de desenvolver o curso de forma extracurricular e verificar a sua aplicabilidade como disciplina eletiva, conforme objetivo original do trabalho. Os resultados da aplicação são apresentados no Capítulo 4. Apesar do alto nível de complexidade dos tópicos e da interdisciplinaridade exigida, os trabalhos dos grupos de estudo foram bem sucedidos, razão pela qual concluímos pela viabilidade da integração do curso como disciplina eletiva, a ser incluída na estrutura curricular do CN em um futuro próximo.

O desenvolvimento do curso fez uso de apostila, videoaulas e de uma lista de pequenos projetos no formato de problemas para aplicação da análise de espectro, bem como suas soluções. Estes materiais integram o produto educacional desenvolvido nesta dissertação e são apresentados nos apêndices A, B, C e D. Enquanto a apostila garante um texto escrito de referência, as videoaulas foram elaboradas por demanda dos próprios alunos. Os projetos concluem a aplicação das competências a desenvolver no curso com questões envolvendo tópicos de Física e de Tecnologia.

---

<sup>1</sup>A Escola Naval é uma instituição de Ensino Superior que adota a divisão anual em sua periodicidade.

## Capítulo 2

# Análise de espectro no Ensino Médio

O desenvolvimento de competências e de uma visão de mundo que contribua para a formação de um cidadão e profissional capaz de compreender e fazer bom uso das tecnologias é papel, no ensino básico, das disciplinas de Ciências no Ensino Fundamental e de Química, Física e Biologia no Ensino Médio. Subjacente, como ferramenta de descrição auxiliar ao estudo, estas disciplinas são conduzidas pelo emprego abundante da Matemática [2–4].

Aparatos tecnológicos, porém, costumam ser fruto de projetos interdisciplinares. Os fenômenos e disciplinas são abarcados como contribuição nos projetos a medida que surtam um efeito desejado, ou seja, que deem aos aparatos a finalidade imaginada pelo projetista [4]. A tecnologia não olha para as disciplinas, mas para seus efeitos. Não olha para o aparato, mas para sua finalidade. Desta maneira, o uso desta ou daquela disciplina ou fenômeno se subordina ao cumprimento da finalidade do aparato tecnológico e não das preferências do projetista ou mesmo do usuário das tecnologias.

Tomemos como exemplo um eletrocardiógrafo digital [5]. O conhecimento da bioeletricidade e da anatomia do sistema nervoso e cardiovascular humano determina pontos sobre o tórax do paciente em que devem ser posicionados os eletrodos. A anatomia humana é tópico da biologia. A bioeletricidade, em si, já é um tópico da Biofísica e interdisciplinar por definição. Tem origem

no transporte de íons dissolvidos nos fluidos do paciente. São interpretados biologicamente como a ação do sistema nervoso, quimicamente como efeitos de difusão e fisicamente como movimento de cargas elétricas.

Os eletrodos captam as flutuações da diferença de potencial devido ao deslocamento destes íons no processo de excitação nervosa do coração e as trata em um circuito eletrônico, cujos fundamentos de funcionamento se relacionam com os tópicos de eletricidade da Física. Muito provavelmente os circuitos são ricos em componentes integrados fabricados sobre materiais semicondutores dopados propositalmente com impurezas em processos que envolvem Química, Física Quântica e Ótica em plantas robotizadas preparadas para realizar operações mecânicas finas [6, 7].

Por fim, os sinais cardíacos são convertidos em variáveis tratadas em uma abstração numérica, permitindo o emprego de números em base binária em algum pequeno processador do eletrocardiógrafo e, portanto, empregando a Matemática. Ele, então, exibe a onda característica do processo de excitação cardíaca e cumpre sua finalidade de subsidiar um profissional da saúde, fornecendo informações para a tomada de decisões da atuação médica em um paciente sob monitoramento.

Os fundamentos das disciplinas básicas de Física, Química, Biologia e Matemática serviram apenas de meio para se obter como finalidade a exibição de informação de dados do paciente. Podemos ir ainda mais longe e afirmar que a finalidade última só é atingida quando estes dados são efetivamente observados e interpretados por um profissional.

Ora, o desenvolvimento das disciplinas do ensino básico costuma ser conduzido pela exploração isolada de fenômenos, e, por esta razão, tipicamente se afastam de aplicações finalísticas como as desejadas em tecnologias, mesmo as mais simples. Como discutimos, as tecnologias não precisam se deter em um fenômeno ou disciplina, ou pior, não podem fazê-lo sob a pena de restringir as possibilidades de conduzi-la ao cumprimento de uma finalidade.

É bem verdade que no processo de aprendizagem seria muito difícil englobar todos os aspectos de tecnologias atuais nas disciplinas fundamentais de ciências. Isto não significa, porém, que elas não sejam os fundamentos destas tecnologias e o caminho inicial pelo qual os estudantes se interessaram em

carreiras da área tecnológica.

Podemos considerar pelo menos três caminhos através dos quais é realizada a aproximação de alunos do ensino básico aos tópicos de tecnologia e das carreiras de tecnologia. O primeiro deles é pela exploração segmentada de aparatos tecnológicos de modo a limitar a abordagem a um fenômeno associado a um tópico de aula. Ou seja, o aparato dificilmente é explorado integralmente, mas apenas de forma fracionada tal que cada fração caiba no enquadramento de cada aula específica. Neste caminho, cabe ao aluno unir as observações isoladas para compreender o todo depois de estudar vários segmentos em aulas distintas.

O segundo caminho é por meio do desenvolvimento de trabalhos ou projetos mais complexos e interdisciplinares que se estendem por várias aulas, às vezes de várias disciplinas, sob o acompanhamento de mais de um professor, e até em atividades extraclasse. Esta abordagem foi adotada nas políticas públicas vinculadas ao chamado Novo Ensino Médio e, conseqüentemente, no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) que licitou no Edital nº 03/2019, referente ao PNLD 2021, obras sobre o título de “Projetos Integradores”.

O último é pela integração com profissionais das áreas de tecnologia, o que tipicamente é desenvolvido por meio de atividades de extensão junto a instituições de Ensino Superior.

Vamos considerar estes caminhos, principalmente os dois últimos, novamente, ao fim da seção 2.2 para melhor delinear os objetivos deste trabalho.

## **2.1 Física — a porta para as carreiras em tecnologia**

Dentre as três disciplinas que delineamos no Ensino Médio como fundamentos das áreas de tecnologia, a Física tem um papel central na descrição dos fenômenos naturais. Em última instância, vários dos fenômenos de outras áreas são estudados a fundo em algum dos ramos interdisciplinares da Física, como a bioeletricidade que discutimos na descrição do eletrocardiógrafo.

Apenas como uma referência da centralidade da Física como fundamento das carreiras de tecnologias, vamos tomar o processo seletivo para ingresso no Ensino Superior da USP promovido pela FUVEST em 2022 (para ingresso em 2023) [8]. A organização divide os cursos em três grandes áreas que designam ciências humanas, biológicas e exatas. Estas, por sua vez, são subdivididas em carreiras que englobam cursos afins de um mesmo campus e define quais provas específicas devem ser feitas na segunda fase do processo seletivo. Como a segunda fase possibilita a seleção de disciplinas, a tendência é que o estudante realize provas de áreas que tem mais aderência como fundamento das técnicas e tecnologias que ele estudará para se tornar um profissional e que são espécies de prerequisites importantes para realizar o respectivo curso.

Dentre as ciências exatas, que cobrem a maior parte das profissões da área de tecnologia, apenas o ingresso em Engenharia Ambiental (apenas no campus de São Carlos), Engenharia Bioquímica, Licenciatura em Ciências Exatas, Licenciatura em Geociências e Educação Ambiental, Oceanografia, Bacharelado e Licenciatura em Química (apenas para o campus de Ribeirão Preto) não determinaram a realização da prova de Física na segunda fase do processo seletivo. O total de vagas que exigiram a prova de Física para ingresso é de aproximadamente 92% nesta área.

Nas ciências biológicas, os cursos de Ciências Biomédicas, Fonoaudiologia, Medicina, Medicina Veterinária, Nutrição e Metabolismo, Odontologia, Educação Física e Fisioterapia consideraram a Física na segunda fase. Estes cursos totalizam aproximadamente 46% das vagas desta área.

Mesmo na área do que foi classificada como ciências humanas e que estaria mais afastada das tecnologias, a prova de Física é mandatória para os cursos de Arquitetura e de Design, totalizando aproximadamente 5% das vagas nesta área.

A abrangência das áreas profissionais e, conseqüentemente, das técnicas e tecnologias que podemos considerar relacionadas à Física é tão vasta que inclui uma nova dificuldade no ensino da Física básica – a abrangência de aplicações correlatas.

## **2.2 Espectro de Fourier no Ensino Médio – oportunidade de aprofundamento em temas de tecnologia**

As Leis nº 13.415/2017 e nº 14.945/2024, que modificam a Lei nº 9.394/1996 de diretrizes e bases da educação, instituiu no Ensino Médio o emprego de uma parte diversificada nos currículos do ensino para o atendimento de “características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos” considerando Itinerários Formativos que “serão compostos de aprofundamento das áreas do conhecimento”. Para os alunos e instituições que promovem ou identificam um direcionamento para seus alunos voltado para seu emprego em atividades relacionadas à tecnologia, a parte diversificada pode servir como oportunidade para aprofundamento, antecipação ou melhor preparação para os tópicos avançados em tecnologia e de certa forma pode auxiliar a resolver o problema da grande abrangência de aplicações relacionadas à Física.

Isto se observa no caso específico do Colégio Naval, estabelecimento de Ensino Médio localizado em Angra dos Reis e que prepara os alunos para o Curso de Graduação da Escola Naval. A Escola Naval é a academia militar responsável pela formação em nível superior dos oficiais considerados operativos na Marinha do Brasil. A principal forma de entrada na Escola Naval é pelo êxito no Curso de Preparação de Aspirantes, como é chamada a proposta de ensino básico promovida pelo Colégio Naval.

Uma vez cursando a Escola Naval, o aluno, designado Aspirante nesta instituição, deverá escolher em que corpo servirá. Os corpos realizam atividades distintas dentro da Marinha e são uma primeira forma de diferenciação da especialização. Os oficiais dos Corpos da Armada e de Fuzileiros Navais trabalham na linha de frente na operação e gestão dos meios navais (navios, submarinos e aeronaves) e de fuzileiros navais (veículos terrestres e aeronaves). Estes meios são complexos, compostos de estruturas, equipamentos para propulsão, governo, geração e distribuição de energia, combate a incêndio e controle de avarias, armazenamento, distribuição e tratamento de água

e esgoto, comunicação, navegação e detecção, além de armamentos e de seus sistemas de controle. Por esta razão, espera-se alto grau de especialização em tecnologias diversas, garantindo as competências necessárias para as atividades de operação, manutenção e assessoramento na modernização destes meios.

A estatística que considera a turma formada no ano de 2023 e as três turmas subsequentes mostra que 89% dos Aspirantes integrarão os Corpos da Armada e de Fuzileiros Navais. Com estes números, podemos estimar que em torno de nove de cada dez alunos, e portanto quase a totalidade, do Colégio Naval tendem a ser encaminhados para áreas onde a demanda pelo desenvolvimento de competências da área tecnológica é certa. Os alunos restantes optam pelo Corpo de Intendentes da Marinha, cujo enfoque é no apoio, logística e administração, menos orientado à área de tecnologia. Fica claro com esta estatística que a parte diversificada é uma excelente oportunidade para o desenvolvimento embrionário de competências de áreas da tecnologia no Colégio Naval.

O exemplo deste caso específico destaca o surgimento de uma oportunidade para a estruturação de cursos eletivos ocupando as partes diversificadas do ensino básico, uma vez que pode-se observar alta probabilidade de que os alunos do CN sigam uma carreira tecnológica. Conforme detalhado na seção 3.1, o estudo do espectro de Fourier e, de forma mais ampla, do processamento digital de sinais, é um tópico relevante na formação de grande quantidade de profissionais.

Mostramos no Capítulo 3 de forma geral que, embora seja hoje um tópico exclusivo do Ensino Superior, a amostragem e o espectro de Fourier de sinais amostrados é passível de uma abordagem empregando prerrequisitos do Ensino Médio presentes nos currículos atuais e em particular no currículo do CN [9]. Este tópico pode ser um caso relevante para apresentação de forma introdutória no Ensino Médio como uma antecipação ou preparação para seu aprofundamento no Ensino Superior. Um curso cobrindo tópicos de amostragem e de espectro de sinais no curso básico se encaixa ao caso específico do Colégio Naval na proposta da parte diversificada do currículo.

Delineado o caso específico podemos considerar o caso geral. Pode-se pro-



por o emprego de um curso de amostragem e análise de espectro empregando prerrequisitos do Ensino Médio para pelo menos os seguintes casos do ensino básico:

- em escolas de maior porte que possam reunir alunos suficientes para apresentação dos referidos tópicos de forma eletiva na parte diversificada de seu currículo;
- em instituições de educação profissional técnica de nível médio em cursos como eletrônica, instrumentação industrial, mecatrônica ou telecomunicações em que a amostragem e o processamento de sinais é tecnologicamente relevante; ou,
- em escola menores nas quais se possa estruturar a parte diversificada por meio de cursos a distância, conforme previsto na Lei nº 9.394/1996, como forma de atender a alunos interessados neste tópico como eletivo.

A simplificação da abordagem que torna a amostragem e análise de espectro viáveis no Ensino Médio discutida no Capítulo 3 pode também subsidiar mudanças curriculares nos próprios cursos superiores das áreas de tecnologia, uma vez que estes cursos poderiam ser apresentados desde a entrada do aluno nesta fase da formação pois os prerrequisitos para o curso são de nível médio.

Por fim, podemos considerar que o formato simplificado pode ser importante também como aprofundamento para profissionais das áreas específicas de onde são coletados os dados mas que não tenham formação aprofundada em tópicos típicos das carreiras de tecnologia no nível superior, como o cálculo diferencial e álgebra linear. Isto ocorre, por exemplo, para músicos, artista e editores que trabalham com áudio no formato digital ou com profissionais da saúde que operem instrumentos de medida e diagnóstico digital ou ainda que desejem fazer pesquisa com análise mais detalhada de sinais de origem biológica.

Conforme verificaremos nos Capítulos 3 e 4, embora possível, o desenvolvimento do curso exigirá emprego de recursos de programação, e dos limites da Matemática e Física do Ensino Médio, sendo considerado, portanto, um

curso avançado nesse nível e recomendado apenas para alunos com bom desenvolvimento nos seus prerrequisitos. Desta forma, não parece adequado que o mesmo seja um curso obrigatório ou aplicável em qualquer contexto.

O caso específico do Colégio Naval e da possível antecipação destes tópicos no Ensino Superior da Escola Naval, porém, são razões suficientes para a estruturação de um curso de amostragem e análise de Fourier empregando prerrequisitos do Ensino Médio e é o que tomamos como objetivo para este trabalho. A previsão de possibilidades diversas de demanda por um curso de espectro de Fourier apenas aumenta o interesse no desenvolvimento desta abordagem, embora entendamos que se trata de uma proposta de vanguarda e de aceitação limitada.

Para tal, vamos considerar os caminhos que delineamos no início deste capítulo e promover atividades de extensão por professores da Escola Naval junto aos professores do Colégio Naval consistindo na realização de atividades extracurriculares em análise de espectro de Fourier aos alunos de ambas as instituições. Esperamos conseguir, em médio prazo, converter a atividade extracurricular experimental em um curso curricular eletivo da parte diversificada do currículo.

## 2.3 Apresentação de amostragem e análise de espectro no Ensino Médio

Os resultados deste trabalho serão aplicados a fenômenos em que a descrição se faz por meio da conexão de duas grandezas, uma independente e uma dependente. Este é o caso da cinemática, por exemplo, em que se busca estudar as relações da posição (dependente) ao longo do tempo (independente). De fato, a maior parte de nosso trabalho considerará implicitamente que a variável independente é o tempo  $t$  para uma variável dependente qualquer  $x$ . Em nossos estudos, chamaremos por convenção  $x(t)$  de sinal.

Não nos importa grandes formalismos na ideia de sinais, embora façamos uma introdução das noções de sinais nos materiais instrucionais apresentados nos apêndices A e B. Sem muito rigor, podemos dizer que há certa similaridade

dade entre os conceitos de função na Matemática, grandeza dependente de outra grandeza na Física e de sinais na tecnologia. As principais diferenças se encontram no interesse de cada disciplina. Enquanto a Matemática enfoca na relação entre  $x$  e  $t$ , em que ambos são apenas números reais, a Física se importa com o estudo de  $x$  e  $t$  quando ambos são, necessariamente, grandezas físicas, desejando com isso tirar conclusões sobre a natureza da relação entre as grandezas ou fornecer uma descrição detalhada da relação. Já na interpretação tecnológica, importa que se  $x(t)$  é um sinal, ele carrega informação relevante que pode ser observada no valor de  $x$  a medida que o tempo  $t$  passa.

Como o estudo de relações do tipo  $x(t)$  coincide com o caso da cinemática, que é amplamente estudado na maior parte dos currículos de Física desde o primeiro ano de um curso do nível médio, espera-se que um aluno dedicado nesta disciplina no fim de 2º ano ou início do 3º já esteja familiarizado com este tipo de descrição.

Há uma característica interessante no ensino de Física do nível médio na descrição de fenômenos que envolvem a relação entre duas grandezas. Enquanto que o ensino se baseia na apresentação da relação entre  $x$  e  $t$ , tratando-os como contínuos, raramente, inclusive por razões tecnológicas, serão observados *registros* contínuos da associação destas grandezas. Ou seja, a forma mais comum é a observação de amostras das grandezas.

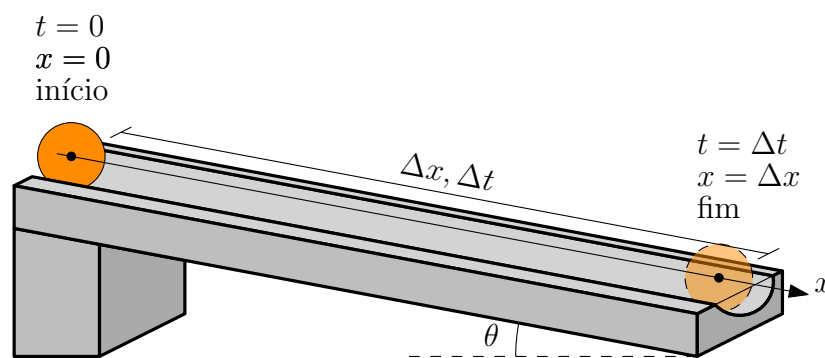


Figura 2.1: Amostras de posição e tempo no experimento de Galileu.

Este é o caso, por exemplo, do famoso experimento do rolamento inclinado

realizado por Galileo [10] que ilustramos na figura 2.1. Em termos modernos, se o eixo  $x$  é o eixo no qual marcamos as posições da esfera que rola no sulco, Galileo sabia apenas que a esfera rola uma distância  $\Delta x$  num tempo  $\Delta t$ . O primeiro ele mediu em proporção ao tamanho total da rampa e o segundo em proporção com a massa da água que ele coletava do início ao fim do rolamento. Ora, isto corresponde exatamente a conhecer apenas duas amostras da relação  $x(t)$ :  $x(0) = 0$  e  $x(\Delta t) = \Delta x$  – assumindo arbitrariamente que o início ocorre quando ambos,  $x$  e  $t$ , são nulos.

Vemos que, neste experimento, seria impossível, com os instrumentos disponíveis, ter conhecimento da relação  $x(t)$  para uma faixa contínua de  $t$ . Desta forma, a coleta do que interpretamos como duas amostras foi necessária pelas dificuldades tecnológicas inerentes ao experimento. O estabelecimento da relação entre  $x$  e  $t$  contínuos só é possível *a posteriori* considerando que as repetições do experimento seguem uma regra e de onde Galileo concluiu que em qualquer rolamento  $x \propto t^2$  e que hoje estudamos como

$$x = \frac{a}{2}t^2, \quad (2.1)$$

em que  $a$  é a aceleração da esfera. A equação 2.1 é tópico certo da literatura do ensino básico sob a denominação de equação horária do espaço para o caso em que a velocidade e posição iniciais são nulas e estabelece uma relação entre as duas grandezas contínuas  $x$  e  $t$ . Seu estudo dá ao aluno a impressão de que seria trabalho fácil observar e registrar o desenvolvimento do movimento considerando um tempo contínuo.

Caso ainda mais evidente do emprego da amostragem é feito por Newton em suas argumentações a respeito da segunda lei de Kepler, o que o faz por meio da figura 2.2 [11]. Nela, o estudo da trajetória de um corpo sobre ação de uma força centrípeta (em direção a  $S$ ) proporcional ao inverso do quadrado da distância (do corpo até  $S$ ) é feita por um conjunto de segmentos de reta de  $A$  até  $F$ . Os segmentos são justamente porções descritas em tempos iguais, o que coincide com o conceito de período de amostragem  $T_s$ .

Neste caso amostrado, as áreas varridas pelo raio num mesmo tempo coincidem com os triângulos  $ASB$ ,  $BSC$ ,  $CSD$  etc. Pela geometria, ele prova

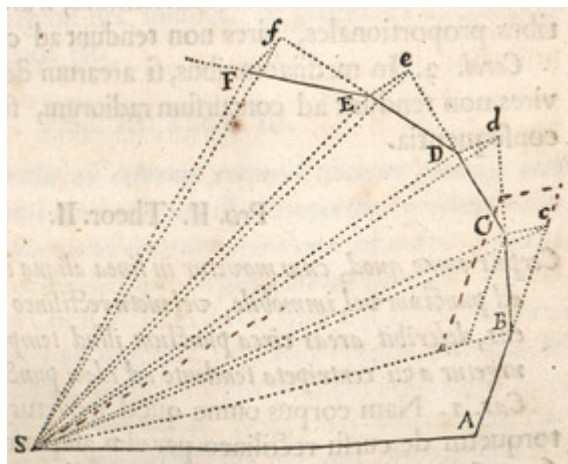


Figura 2.2: Amostras de posição de corpo sobre ação de força centrípeta proporcional ao inverso do quadrado da distância.

Fonte: Newton [11].

que estas áreas são iguais, mostrando a segunda lei de Kepler. É apenas após esta constatação do caso amostrado que Newton propõe “aumentar a quantidade de triângulos” de modo que a distância entre os pontos consecutivos diminua, assim como diminuirá o tempo decorrido entre as amostras, implicando no que poderíamos considerar hoje como a diminuição do período de amostragem. Com isso, o conjunto de segmentos tende a uma curva suave e a observação do progresso de amostras de tempo tende ao tempo contínuo.

Além do emprego da amostragem na elaboração da argumentação, observa-se repetidamente que os registros de experimentos na Física são quase em sua totalidade compostos de observações discretas ou amostras das grandezas envolvidas. Esta realidade se agravou com o emprego de aparatos tecnológicos como o estroboscópio, câmeras e o computador digital. Sensores eletrônicos e sinais digitalizados por meio de conversores analógico-digitais se tornaram baratos e abundantes e uma fonte de registro de amostras nos experimentos da Física.

Apesar da abundância do uso de observações discretas ou amostras, os livros didáticos consultados [12–15] não tratam das características da amostragem, e raramente empregam este termo atualmente difundido para des-

crever o emprego de observações discretas. Por esta razão, nossa proposta de sequência didática tratará de amostragem com detalhe matemático suficiente para seu uso na análise de espectro conforme apresentamos na seção 3.2. A necessidade do emprego de amostragem, além da abundância de sinais reais amostrados, se dá pela simplificação do cálculo do espectro de Fourier em sinais amostrados conforme vemos na seção 3.1. De fato, o cálculo do espectro de Fourier no nível do Ensino Médio só é possível em sinais finitos ou periódicos amostrados, situação em que se evitam o cálculo diferencial e os somatórios infinitos.

Já em relação a noção de espectro, observamos que o caso mais comum de sua apresentação no Ensino Médio se dá no estudo da composição da luz visível por componentes de acordo com o comprimento de onda. Os textos em geral associam comprimento de onda, velocidade e frequência, de sorte que pode-se associar com facilidade os componentes de onda eletromagnética no espectro visível à noção de espectro de frequências.

Como no espectro visível os componentes do espectro estão associados às cores, a apresentação é facilitada, inclusive, com a possibilidade de abordar as noções de cores primárias e de espectros de emissão e absorção que são argumentos passíveis de demonstrações visuais e associados ao cotidiano.

Não foram observadas discussões específicas ou detalhadas a respeito da decomposição em componentes de frequência ou de suas representações gráficas nos livros didáticos consultados [12–15]. É comum que seja apresentada a ideia de harmônicos, especialmente nos casos das cordas fixas em ambas as extremidades e na ressonância em tubos, abertos em uma extremidade ou em ambas.

Alguma ideia rudimentar de espectro e de componentes de frequência é apresentada, também, em tópicos relativos às qualidades do som quando tratando do timbre. Vários textos empregam a composição de harmônicos na onda sonora como traço distintivo entre os timbres como se observa, por exemplo, no livro adotado no Colégio Naval [15] que reproduzimos na figura 2.3. Ela ilustra brevemente a composição de uma onda periódica complexa chamando a apresentação dos diversos componente de “análise”.

Encontramos resultados similares aos que queremos reproduzir apenas na

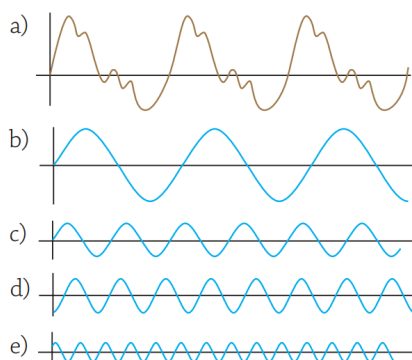


Figura 2.3: Sinal original a) e suas componentes senoidais de b) a e).

Fonte: Doca, Biscuola e Bôas [15].

obra de Tipler e Mosca [16] dentre os textos de Física. Eles estão reproduzidos na figura 2.4. Esta obra, porém, é indicada para o curso superior e o espectro é apresentado como ilustrativo do timbre. Os autores trazem estes dados em seção do livro designada “Tópicos adicionais” sob o título de “Análise e síntese harmônicas” e indicam no texto que a ponderação da intensidade de harmônicos é realizada pela técnica designada “análise de Fourier”, mas não detalha como esta análise é realizada.

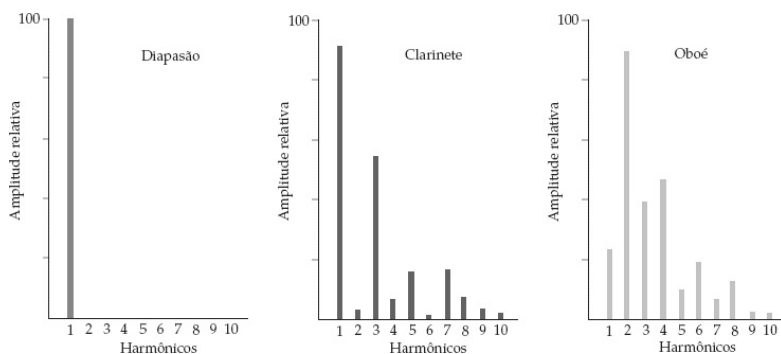


Figura 2.4: Análise de Fourier apresentada em Tipler e Mosca [16] em tópico de análise de harmônicos.

Fonte: Tipler e Mosca [16].

Embora a análise de espectro não seja claramente definida nos textos típicos do Ensino Médio, a ideia de componentes de frequência, sua represen-

tação gráfica e algumas de suas consequências e conceitos derivados podem ser observados em exercícios propostos em processos seletivos recentes, o que passamos a analisar a seguir.

### 2.3.1 Análise de espectro em processos seletivos

O fato de serem observadas noções de análise de espectro em exercícios de processos seletivos serve de evidência de que a esta ideia pode ser intuída ou deduzida a partir dos conceitos deste nível de ensino, embora não esteja formalizada. Esta proximidade do conceito de espectro com os conceitos do ensino básico são delineados em detalhes na seção 3.6.1.

Nos exames, a noção de espectro de frequências aparece diretamente ou em conceitos derivados. Como exemplo do emprego direto da noção de espectro de frequências, podemos citar a questão 9 da prova da 2ª fase do ITA de 2022. Ela trata do som emitido por cordas percutidas no piano e apresenta o gráfico do espectro de frequências da figura 2.5, chamado no enunciado de “decomposição espectral”.

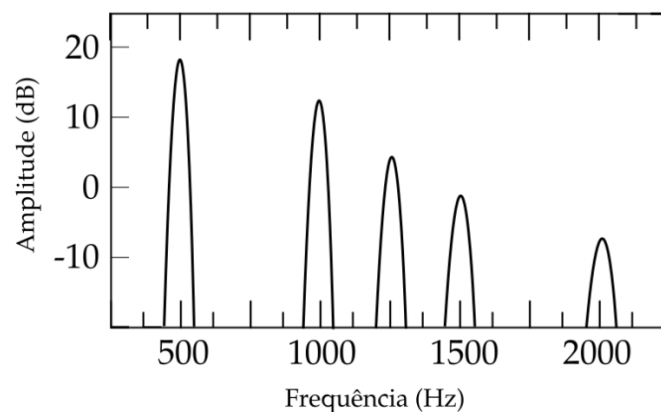


Figura 2.5: Espectro de frequência no exame do ITA na 2ª fase de 2022.  
Fonte: ITA 2022 (2ª fase).

Nenhuma descrição do que é esta decomposição espectral é dada, o que corrobora o entendimento de que o elaborador do exercício considera que os alunos têm conhecimento suficiente para concluir do que se trata apenas



pelo gráfico e pela compreensão do fenômeno (estímulo de uma corda presa nas extremidades). Como resultado, o gráfico fornecido é um exemplo muito próximo do que desejamos que o aluno seja capaz de produzir com exatidão a partir de amostras. Nota-se pelo gráfico não haver grande preocupação com os valores exatos de amplitude e de frequência. Podemos considerar que trata-se de um esboço.

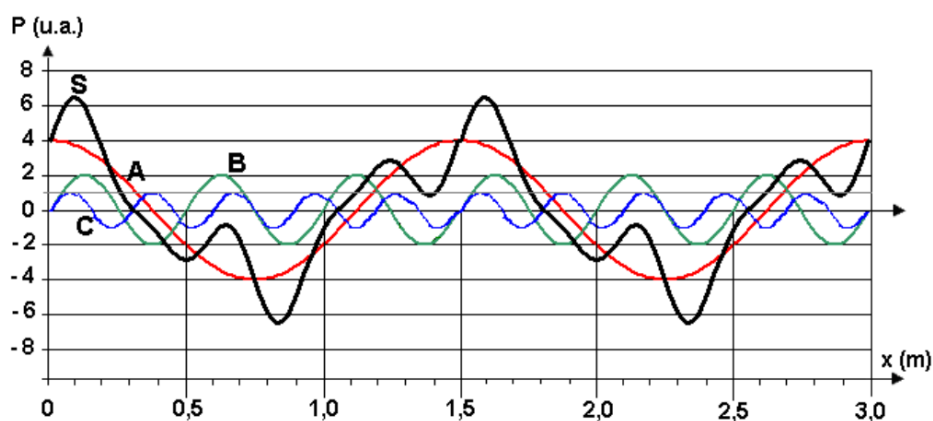


Figura 2.6: Gráfico de um instantâneo da pressão  $\times$  posição de uma onda sonora para obtenção do espectro da figura 2.7 no exame da 2ª fase da FUVEST 2005.

Fonte: FUVEST 2005 (2ª fase).

Ainda dentre os exercícios que abordam diretamente o conceito de análise de espectro, a questão 8 da prova de Física da 2ª fase da FUVEST de 2005 apresenta componentes de frequência do som pela representação das intensidades de três componentes senoidais e da onda resultante da superposição por meio de um gráfico de um instantâneo de intensidade  $\times$  distância reproduzido na figura 2.6. Pede-se no enunciado o preenchimento do gráfico da figura 2.7 sem que seja detalhado o gráfico. Para facilitar o candidato, um dos componentes vem preenchido no exercício (conforme se observa na figura 2.7). Quando completo, ele é o espectro de frequências da onda **S** também nos moldes do que desejamos desenvolver no curso.

Como um último caso em que se observa o conceito de espectro de frequências diretamente é o da questão 19 da 2ª fase do exame da UFU no processo de

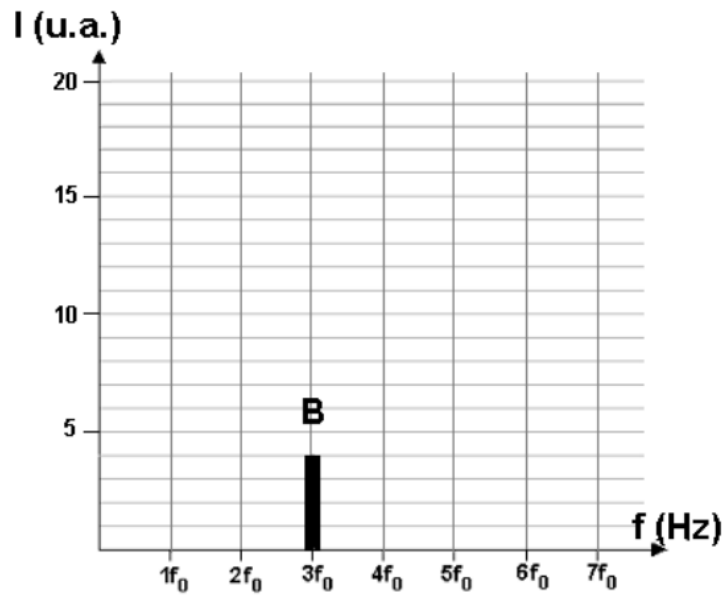


Figura 2.7: Espectro de frequências à preencher no exame da 2ª fase da FUVEST 2005.

Fonte: FUVEST 2005 (2ª fase).

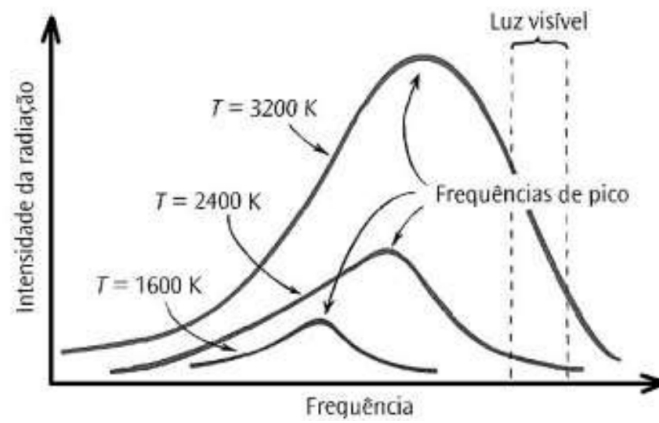


Figura 2.8: Espectro de frequência no exame da UFU 2021.2.

Fonte: UFU 2021.2 [17].

2021 do segundo semestre. O espectro reproduzido de [17] é dado no exame e também o reproduzimos na figura 2.8. Neste caso, é interessante notar que

o gráfico é extraído de um livro de Ensino Superior, e, ainda assim, o elaborador da questão também considera que o aluno é capaz de compreender o gráfico pois o mesmo não é detalhado no enunciado.

Partindo para alguns exemplos do uso de conceitos secundários, podemos observar os conceito de resposta em frequência na questão 55 da prova azul da 2ª aplicação do ENEM em 2016. Este gráfico, reproduzido na figura 2.9, indica a relação entre a intensidade da resposta de um sistema a um estímulo em termos da frequência do estímulo. Uma definição formal da resposta em frequência pode ser dada pelo módulo da razão

$$H(f) = \frac{A_y}{A_x}$$

entre as amplitudes das entradas e saídas do sistema, em que a entrada tem o formato

$$x(t) = A_x \cos(2\pi ft + \theta_x)$$

e a saída

$$y(t) = A_y \cos(2\pi ft + \theta_y).$$

Ou seja, o efeito do sistema é apenas sobre a amplitude e a fase quando se considera um estímulo senoidal. A razão  $A_y/A_x$  não é constante, ela depende da frequência, o que possibilita a elaboração do gráfico  $|H(f)| \times f$  que é o que é apresentado no problema.

Podemos ver que o conceito formal de resposta em frequência não é simples. Sua apresentação costuma se dar apenas no curso superior em tópicos de sistemas lineares, vibração, circuitos lineares, filtros etc. Dentre os cursos que delineamos na seção 3.1, a primeira vez que este conceito costuma aparecer é nos cursos de Circuitos Elétricos onde a sua definição pode ser vista em sua bibliografia típica [18–23]. Apesar disto, o elaborador explica apenas superficialmente o significado do gráfico e exige sua compreensão ao fim do nível médio, momento para o qual o ENEM é indicado.

Por fim, no ENEM de 2011, encontramos dois exemplos de conceitos secundários, o de espectro de absorção e o de espectro de reflectância (chamado no enunciado de curva de comportamento espectral ou assinatura espectral

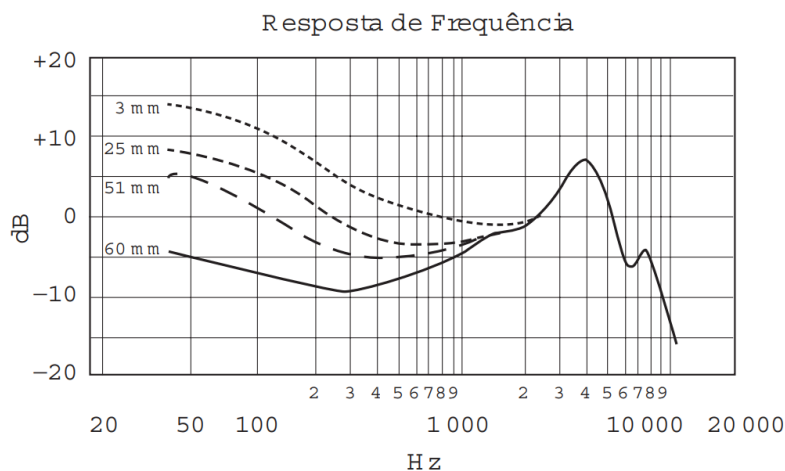


Figura 2.9: Resposta em frequência no ENEM 2016.  
Fonte: ENEM 2016.

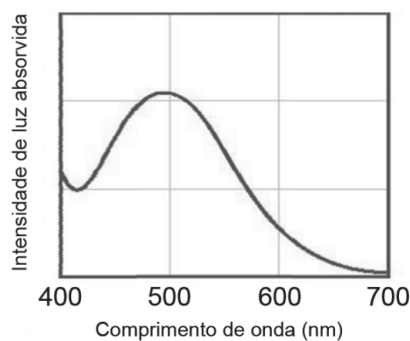


Figura 2.10: Gráfico do espectro de absorção no ENEM 2011.  
Fonte: ENEM 2011.

do objeto), respectivamente nas questões 63 e 67 da prova azul. Ambos os conceitos expressos por meio de gráficos e reproduzidos nas figuras 2.10 e 2.11. Neles, a variável independente é o comprimento de onda, de onde se pode obter a frequência pela relação

$$f = \frac{c}{\lambda},$$

em que  $c$  é a velocidade de propagação da onda e  $\lambda$  é o comprimento de onda.

Nos enunciados destes exercícios, há explicações sobre os fenômenos com

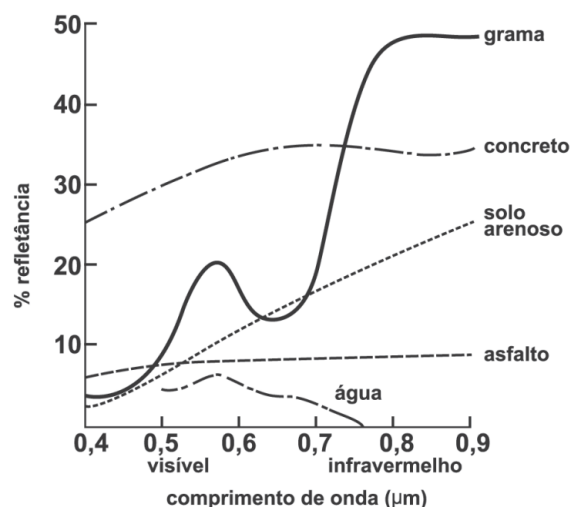


Figura 2.11: Curva de comportamento espectral ou assinatura espectral de um objeto no ENEM 2011.

Fonte: ENEM 2011.

os quais eles estão relacionados, mas as características específicas dos gráficos não são comentadas.

A tabela 2.1 resume os exemplos de exercícios e mostra que, de forma geral, os elaboradores assumiram que as representações envolvendo componentes de frequência não precisam de explicações adicionais. A compreensão pode ser depreendida do conhecimento prévio do aluno e da análise das características do gráfico. Fenômenos secundários como harmônicos em cordas e em ondas sonoras e a emissão, absorção e reflexão de radiação são resumidas em gráficos do tipo  $\text{grandeza} \times \text{frequência}$  (ou comprimento de onda) sem grandes floreios.

Esta evidência nos auxilia a assumir que a noção de espectro, neste nível, é relativamente intuitiva e que basta a apresentação detalhada dos procedimentos para o cálculo do espectro de Fourier com a finalidade de se obter exatidão na representação. Isto possibilitará o emprego da análise de espectro como instrumento para medir frequência e para realização da análise no domínio da frequência.

Tabela 2.1: Resumo das características de exercícios envolvendo espectro de frequências.

Processo	Conceito	Variável		Detalhamento
		Independente	Dependente	
ITA 2022 (2ª fase)	espectro de frequências do som	frequência em hertz	amplitude em decibel	não
FUVEST 2005 (2ª fase)	espectro de frequências do som	frequência em hertz	intensidade	não
UFU 2021.2	espectro de frequências da radiação térmica	frequência sem escala	intensidade	não
ENEM 2016 (2ª aplicação)	resposta em frequência de microfone	frequência em hertz	intensidade em decibel	parcial
ENEM 2011	espectro de absorção	comprimento de onda em nanometro	intensidade absorvida	não
ENEM 2011	espectro de reflectância	comprimento de onda em micrometro	percentual de radiação refletida	não

## 2.4 Espectro de frequências como instrumentação para medida de frequência

Consideramos até agora que a análise de espectro é importante por seu emprego no processamento de sinais e, portanto, para um tópico de tecnologia. A Física era envolvida aqui apenas por ser, no ensino básico, a principal porta para introdução de temas de tecnologia. A realização de medidas e a instrumentação, porém, são tópicos da Física e um gráfico como o da figura

2.5 fornece informações fundamentais a respeito de medidas de frequência do fenômeno observado.

Este aspecto será utilizado como principal conector entre o ensino básico, os problemas da Física e os problemas de tecnologia quando da determinação de aplicações no formato de problemas que propomos na seção 3.7.

## Capítulo 3

# Proposta de Curso de Análise de Espectro para o Ensino Médio

O curso que queremos propor é uma adaptação dos cursos de processamento digital de sinais realizados no Ensino Superior, a ser introduzido por meio de problemas da Física. Por esta razão, vamos partir de uma análise breve de como estes cursos são apresentados em seu nível típico e realizar, ao longo deste capítulo, as adaptações necessárias para torná-lo apresentável no nível médio. Vamos, também, delinear os prerequisites específicos para um curso desta natureza de modo a facilitar o seu encaixe nas instituições que desejem aplicá-lo.

### 3.1 Cursos com amostragem e análise de espectro no ensino regular

Análise de espectro e amostragem são tópicos apresentados formalmente em cursos das engenharias eletrônica (ou elétrica, de forma mais geral), da computação, de comunicações (ou telecomunicações), de automação e controle, biomédica etc. em disciplinas de análise e processamento de sinais e sistemas lineares e, portanto, apenas no Ensino Superior. Costuma ser tópico de



Tabela 3.1: Exemplos de cursos e suas referências bibliográficas.

IE	Curso	Código	Disciplina	Referências
MIT	Engenharia Elétrica	6.003	<i>Signals and Systems</i>	[27]
LSJU	Engenharia Elétrica	EE 102A	<i>Signals and Systems I</i>	[27]
EPFL	Engenharia Eletrônica	EE-205	<i>Signaux et systèmes</i>	[27]
USP	Eng. de Telecomunicações e Controle	PTC3007	Sistemas e Sinais	[27]
USP	Eng. Eletrônica e da Computação	SEL0383	Sinais e Sistemas em Engenharia Elétrica	[27–29]
UFAM	Eng. Eletrônica	FTL023	Sinais e Sistemas	[28–33]
UFRGS	Eng. de Energia	ENG10017	Sistemas e Sinais	[27, 28, 30, 33, 34]

componente curricular obrigatório nestes cursos.

Reunimos apenas alguns exemplos de disciplinas deste tópico oferecidas em instituições do Brasil e do exterior na tabela 3.1. Elas foram selecionadas tomando por base os resultados do ENADE [24], e os rankings QS [25] e RUF [26] e para os quais foram encontradas páginas ou documentos como currículos e ementas contendo a bibliografia sugerida, que também é apresentada na tabela. Ala nos auxilia a estabelecer a obra de Oppenheim, Willsky e Nawab [27] como bom representante do tópico.

Nela, observamos que os principais resultados que desejamos adaptar ao Ensino Médio estão detalhadamente demonstrados e aplicados por meio do uso do cálculo diferencial e integral. As noções de sinais e sistemas lineares são introduzidos nos dois capítulos iniciais, a série de Fourier de tempo

discreto é apresentada na seção 3.6 em sua forma exponencial e a amostragem está descrita no seu Capítulo 7. Isto significa que os objetivos do curso que desenvolvemos para Ensino Médio neste trabalho estão completamente contidos em um curso de análise de sistemas lineares baseados nessa obra.

Os cursos de engenharia são subdivididos em conteúdos básicos, profissionais e específicos e os tópicos de processamento de sinais são típicos da parte profissional ou específica [35]. É comum que, quando cursando disciplinas referentes a processamento de sinais, principalmente de processamento digital de sinais, o aluno já esteja familiarizado com a série de Fourier (SF), válida para funções periódicas ou limitadas, de variável independente contínua e resultado de seus estudos de Matemática ou Cálculo da parte básica da formação.

Ainda nos cursos de Cálculo e motivados pela solução de equações diferenciais no domínio  $s$  por meio de equações algébricas, o aluno típico do Ensino Superior dessa área também tem contato com a transformada de Laplace (TL). Esta transformada, com um domínio amplo, já que  $s \in \mathbb{C}$ , pode ser interpretada como o cálculo de componentes de frequência se se restringe o domínio de  $s$  ao eixo imaginário, ou seja, se

$$s = j\omega$$

para  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Apesar das interpretações tanto a série de Fourier como da transformada de Laplace fornecerem informações relativas ao espectro de sinais, o foco no estudo destas entidades matemáticas nos cursos dos conteúdos básicos, conforme revela análise de considerável bibliografia dos cursos iniciais de Cálculo e Equações Diferenciais [36–43], é a ampliação de possibilidades de manipulação algébrica para a solução de problemas já representados no formato matemático, e não na capacidade que as séries ou transformadas têm de representar componentes de frequência.

Guidorizzi [36] desenvolve a série apenas para frequência angular unitária, ou com período  $2\pi$ , com enfoque na convergência da série e abordando apenas a solução de equações diferenciais lineares de 2ª ordem em um apêndice. Já

a transformada de Laplace é apresentada também para solução de equações diferenciais e como exemplo de aplicação do cálculo de integrais. Hass, Heil e Weir [39] e Spivak [42] comentam em seus textos que consideram as séries de Fourier como “cálculo avançado” e não tratam da transformada de Laplace enquanto Stewart [37, 38] apresenta a série de Fourier e de Laplace apenas em exercícios de aplicação de integrais.

Esta opção curricular e de abordagem dos textos de Matemática superior introdutório é explícita no delineamento dado por Boyce, DiPrima e Meade [43], por exemplo, após a exposição da série de Fourier de tempo contínuo, para o objetivo de sua obra:

Neste livro, as séries de Fourier aparecem, principalmente, como um meio para resolver determinados problemas em equações diferenciais parciais. No entanto, tais séries têm uma aplicação muito mais ampla em ciência e Engenharia, e, em geral, são ferramentas valiosas na investigação de fenômenos periódicos. Um problema básico consiste em decompor um sinal de entrada em seus componentes harmônicos, o que corresponde a construir sua representação em série de Fourier. Em algumas bandas de frequência, os termos separados correspondem a cores diferentes ou a tons audíveis diferentes. O módulo do coeficiente determina a amplitude de cada componente. Este processo é conhecido como *análise espectral* [43, seção 10.2].

Os autores reconhecem a importância tecnológica da série de Fourier, explicitando o recurso da análise de espectro, mas optam por explorar apenas os aspectos operacionais da mesma. É importante observar que esta última obra já trata de um tópico específico, as equações diferenciais, e pode já não ser considerado um texto introdutório de Cálculo.

É comum o emprego da série de Fourier de tempo contínuo e da transformada de Laplace com interpretações de espectro de frequências nos cursos de circuitos elétricos que precedem ou são concomitantes aos cursos de sistemas lineares e processamentos de sinais de tempo contínuo. Isto porque os circuitos lineares estão entre os mais simples e abundantes sistemas capazes de

realizar filtragem, fenômeno cuja interpretação emprega a noção de espectro. A bibliografia típica das disciplinas de circuitos elétricos [18–23] contempla capítulos para análise de circuitos considerando estímulos representados por sua série de Fourier ou por sua transformada de Laplace e os conceitos de função de transferência e de resposta em frequência como representantes dos circuitos lineares.

O estudo de sinais amostrados e sistemas digitais de tempo discreto concluem estes estudos. A figura 3.1 resume esta sequência típica das trilhas de aprendizado nos cursos de engenharia em que os tópicos de amostragem e análise de espectro são relevantes. Observa-se que a análise de sistemas digitais figura ao fim do curso, depois de adquirida maturidade na análise de sistemas de tempo contínuo.

### 3.1.1 Abordagem da amostragem no Ensino Superior

Apesar da apresentação formal tardia nos cursos de graduação, os sinais digitais, em função da miniaturização e redução dos custos proporcionados pela eletrônica digital, se tornaram abundantes e de fácil emprego. Quando se soma o baixo custo, a facilidade de realizar projetos por meio de soluções sequenciais programadas e os aspectos teóricos simplificados dos sinais digitais com relação aos analógicos, é de se estranhar que os cursos de processamento de sinais mantenham uma trilha que privilegia a exposição de sinais analógicos de tempo contínuo com relação aos sinais digitais, uma vez que estes últimos se tornaram mais baratos e mais fáceis de manipular.

Uma das consequências é que parte das simplificações promovidas pelo trabalho com tempo discreto não são aproveitadas nestes cursos, principalmente nas demonstrações. Como se espera um aluno com uma base matemática sólida, potencialmente experiente em cálculo diferencial e integral, na solução de equações diferenciais, e até mesmo com aptidão em cálculo com variáveis complexas, não é necessário recorrer às simplificações na abordagem. Apresenta-se, então, a amostragem com um altíssimo nível de abstração – o produto entre um trem de impulsos e a função contínua original. Mate-

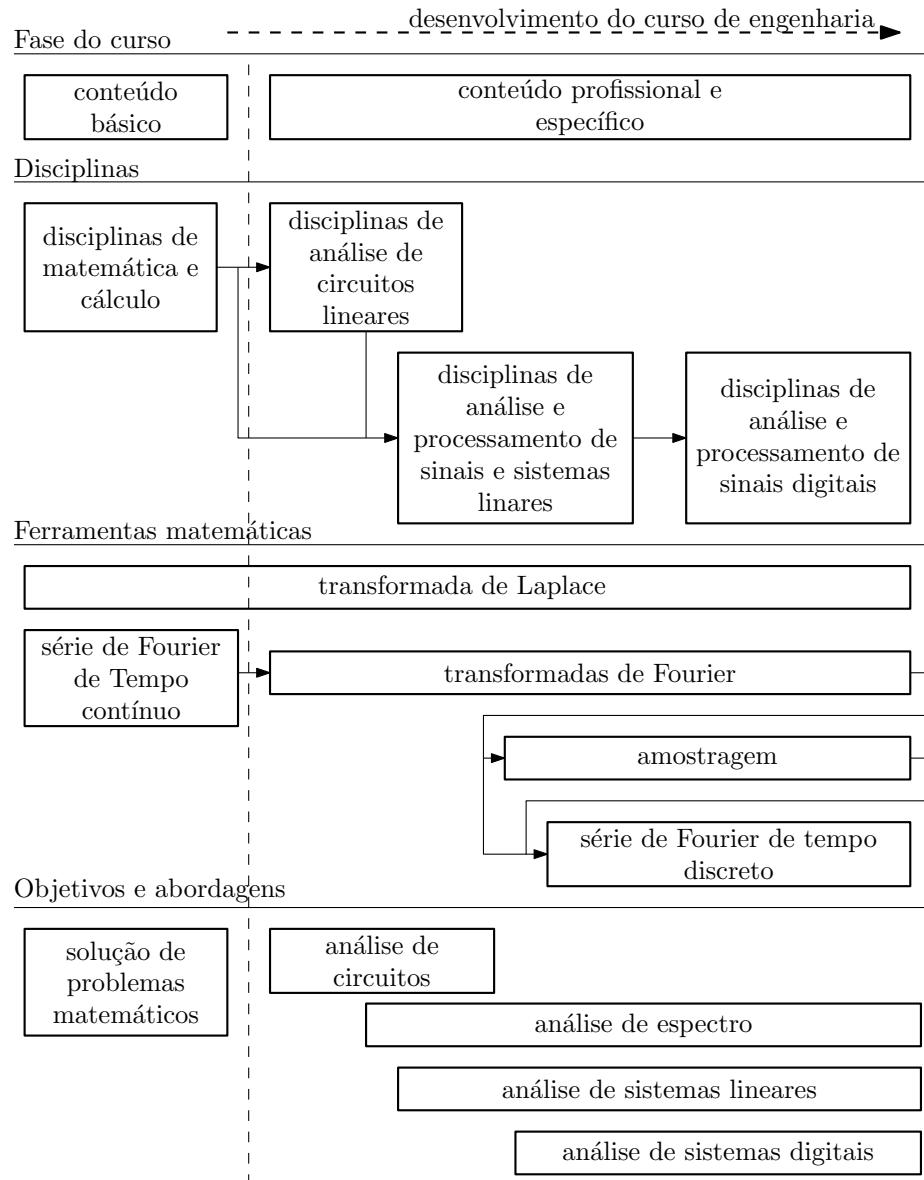


Figura 3.1: Esquema do desenvolvimento do estudo de amostragem e análise de espectro no Ensino Superior.

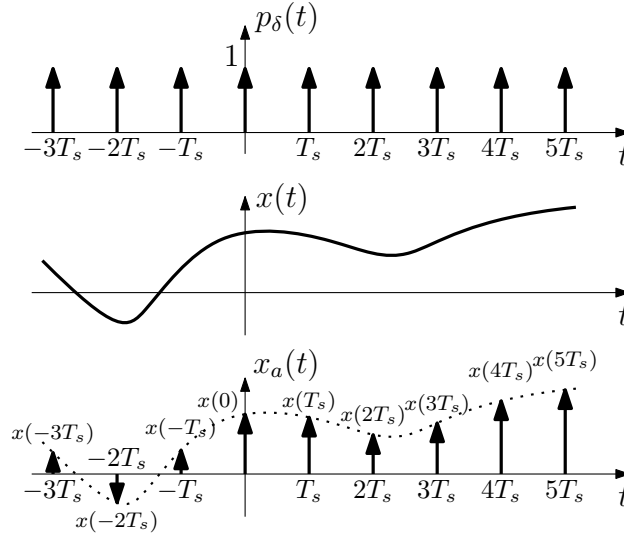


Figura 3.2: Representação teórica da amostragem no tempo.

maticamente, este processo é expresso por

$$x_a(t) = x(t)p_\delta(t)$$

em que

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

e  $x_a(t)$  é a versão amostrada de  $x(t)$  com período de amostragem  $T_s$ .

A figura 3.2 ilustra a obtenção de  $x_a(t)$  a partir de um  $x(t)$  genérico e de  $p_\delta(t)$ . Nela, esboçamos o comprimento das setas que convencionam a representação da função  $\delta$  na proporção da intensidade do impulso. Veja que resta para  $x_a(t)$ , com relação a  $x(t)$ , apenas informação relativa aos pontos em que  $t = nT_s$ , os instantes de amostragem, contida na intensidade dos impulsos localizados nestes instantes de tempo. Qualquer informação de  $x(t)$  fora dos instantes de amostragem são perdidas em  $x_a(t)$ .

Já a figura 3.3 ilustra os espectros de  $x(t)$  e  $p_\delta(t)$  dados respectivamente por  $X(f)$  e  $P_\delta(f)$  e obtidos pela transformada de Fourier (TF) destes sinais. Consideramos que  $X(f)$  tem banda limitada em  $f_{\text{máx}}$ , ou seja,  $x(t)$  não carrega componentes de frequência para qualquer frequência maior do que  $f_{\text{máx}}$ ,

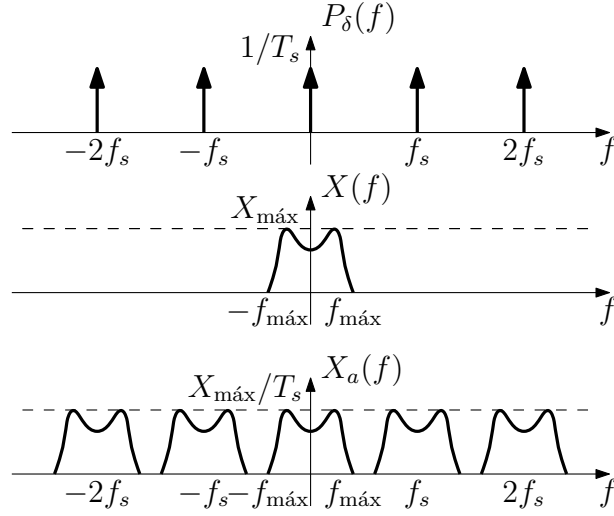


Figura 3.3: Representação teórica da amostragem na frequência.

de modo que  $X(f) = 0$  para  $|f| > f_{\text{máx}}$ . Já o espectro do trem de pulsos unitários com pulsos a cada  $T_s$ , é dado também por um trem de impulsos de intensidade  $1/T_s$  e centrado em múltiplos inteiros de  $f_s = 1/T_s$ , a frequência de amostragem. Analiticamente,

$$P_\delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s). \quad (3.1)$$

Pelas propriedade da convolução, se

$$y(t) = x_1(t)x_2(t) \xLeftrightarrow{\text{TF}} Y(f) = X_1(f) * X_2(f), \quad (3.2)$$

ou seja, a multiplicação no tempo resulta na convolução na frequência. Desta forma,  $X_a(f)$  é dado pela convolução entre  $X(f)$  e  $P_\delta(f)$ , conforme também

apresentado na figura 3.3. Analiticamente, temos

$$\begin{aligned}
 X_a(f) &= X(f) * P_\delta(f) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) P_\delta(f - \phi) d\phi \\
 &= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \phi - kf_s) d\phi \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \delta(f - \phi - kf_s) d\phi \\
 X_a(f) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)
 \end{aligned}$$

Ou seja,  $X_a(f)$  é dado pela superposição de várias repetições de  $X(f)$  escaladas em  $1/T_s$  e deslocadas de múltiplos inteiros de  $f_s$ , assim como mostrado na figura 3.3. Ora, se  $f_{\text{máx}} < f_s/2$ , não há coincidência entre os trechos não-nulos das várias repetições de  $X(f)$ , e, por esta razão, pode-se dizer que ao observar o espectro de  $X_a(f)$  entre  $-f_s/2$  e  $f_s/2$ , é possível constatar a preservação da “informação” do espectro de  $X(f)$ . Idealmente, isto significa que se poderia recuperar  $x(t)$  pela filtragem de  $x_a(t)$  com um filtro passa-baixas com frequência de corte em  $f_s/2$ .

Esta argumentação é conhecida como o Teorema de Nyquist – se  $x(t)$  é limitado na frequência  $f_{\text{máx}}$ , e ele é amostrado com frequência de amostragem  $f_s$ , com  $f_{\text{máx}} < f_s/2$ , não haverá perda de informação no processo de amostragem e  $x(t)$  pode ser recuperado de sua versão amostrada por meio de filtragem. É um tópico fundamental no estudo de sistemas digitais e abordado em profundidade na literatura e em especial no Capítulo 7 da obra de Oppenheim, Willsky e Nawab [27], referência para este tópico como vimos na tabela 3.1.

Este método de representação da amostragem traz uma elegância aos resultados uma vez que por ele é possível determinar o espectro de um sinal amostrado pela propriedade da convolução e com esta metodologia o Teorema da Amostragem é facilmente verificável. Vemos, porém, que se trata de um caminho matematicamente pesado, mesmo para o aluno do Ensino Superior, empregando a função impulso, uma função generalizada, integrais



impróprias, somatórios infinitos e convolução.

### 3.1.2 Abordagem da análise de espectro no Ensino Superior

O caminho para representação do espectro no Ensino Superior também não considera uma trilha que vá dos resultados mais simples ao resultado mais complexo já que se costuma contar com uma formação comum básica entre todas as engenharias que garante ao aluno uma base sólida em Matemática. Não é necessário se preocupar com o nível de complexidade da representação matemática do espectro.

Como consequência, o caminho típico da apresentação das representações em frequência costuma figurar dentre os conteúdos básicos com a transformada de Laplace (TL) e a série de Fourier (SF) e em disciplinas iniciais de análise de circuitos lineares com a transformada de Fourier de tempo contínuo (TFTC). Outras representações em frequência como a série de Fourier de tempo discreto (SFTD) e a transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) ficam reservadas às disciplinas de processamento de sinais como as que listamos na tabelas 3.1.

A tabela 3.2 resume as principais representações em frequência estudadas num curso típico de engenharia com processamento de sinais. Empregamos a terminologia convencional que designa a obtenção dos componentes (ou coeficientes) representantes da frequência a partir do sinal no tempo como a relação de análise e a que constrói o sinal no tempo a partir de seus componentes de frequência como a de síntese.

É importante enfatizar a ocorrência de operações elaboradas em ambas as relações nas representações mais comuns como a TL, SF e TFTC. Há uso de integral, inclusive impróprias ou o emprego de somatórios infinitos em todas elas. O caso mais crítico é a síntese da TL que consiste no emprego de integral no plano complexo [27, 44], não é apresentada nos cursos mais básicos e, com frequência, nem mesmo nos de processamento de sinais. Para evitar este complicante, a inversão do domínio  $s$  para o domínio  $t$  costuma ser feita pelo uso de propriedades até a identificação por inspeção de transformadas

conhecidas com o auxílio de tabelas.

Apesar de não ser tão comum, a TFTD emprega somatório infinito na análise e integral na síntese, de sorte que a amostragem, neste caso, não traz grandes vantagens computacionais.

Ainda na tabela 3.2, observamos que a série de Fourier de tempo discreto, aplicável à descrição de sinais amostrados limitados ou periódicos no tempo, tem como representação uma quantidade finita de componentes de frequência. Os cálculos necessários tanto para a análise como para a síntese são dados por somatórios finitos. Computacionalmente é o caso mais simples dentre as representações em frequência listadas.

Embora possa parecer que o emprego de sinais limitados ou periódicos seja demasiadamente restritivo com relação ao universo de sinais, isto não é verdade quando se considera que:

- os sinais de tempo discreto, amostrados, são os sinais típicos nos sistemas digitais modernos;
- os sistemas digitais abundam devido à diminuição no custo e a miniaturização; e
- a coleta de dados num sistema digital, num experimento etc. é sempre limitada no tempo (tem início e tem fim) ou são limitadas (quando a variável independente não é o tempo) devido a incapacidade de realização de variações até o infinito nas grandezas observadas em experimentos reais.

Fica claro, na verdade, que os sinais discretos limitados compreendem a maior parte dos sinais ou dos registros de dados nas ciências ou em aplicações tecnológicas.

Por esta razão, destacamos a relevância de propor a inversão das trilhas típicas do estudo da análise de espectro, privilegiando a antecipação do estudo sobre grandezas amostradas e a vantagem que o curso que propomos pode representar. Desta forma, nosso interesse se volta para a adaptação da SFTD ao nível médio.

Tabela 3.2: Representações em frequência típicas no Ensino Superior.

Formulação	restrição	variável independente	cálculo
<p>Análise TL  <math>F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{st}dt</math></p> <p>Síntese TL  Por tabela</p>	<p>nenhuma</p> <p>nenhuma</p>	<p><math>s \in \mathbb{C}</math> contínuo</p> <p><math>t</math> contínuo</p>	<p>integral imprópria</p> <p>consulta à tabela</p>
<p>Análise SF  <math>c_k = \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kn} dt</math></p> <p>Síntese SF  <math>x(t) = \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}</math></p>	<p>nenhuma</p> <p>limitado ou periódico</p>	<p><math>k</math> discreto</p> <p><math>t</math> contínuo</p>	<p>integral num período</p> <p>somatório infinito</p>
<p>Análise TF  <math>X(f) = \int_{-\infty}^\infty x(t)e^{-j2\pi ft}dt</math></p> <p>Síntese TF  <math>x(t) = \int_{-\infty}^\infty X(f)e^{j2\pi ft}df</math></p>	<p>nenhuma</p> <p>nenhuma</p>	<p><math>f</math> contínua</p> <p><math>t</math> contínua</p>	<p>integral imprópria</p> <p>integral imprópria</p>
<p>Análise TFTD  <math>X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^\infty x[n]e^{-j\omega n}</math></p> <p>Síntese TFTD  <math>x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega</math></p>	<p>limitado ou periódico em intervalo <math>2\pi</math></p> <p>nenhuma</p>	<p><math>\omega</math> contínua</p> <p><math>n</math> discreto</p>	<p>somatório infinito</p> <p>integral em <math>2\pi</math></p>
<p>Análise SFTD  <math>X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n \in [N]} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}</math></p> <p>Síntese SFTD  <math>x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}</math></p>	<p>limitado</p> <p>limitado ou periódico</p>	<p><math>k</math> discreto</p> <p><math>n</math> discreto</p>	<p>somatório finito</p> <p>somatório finito</p>

## 3.2 Adaptação das noções de amostragem para o Ensino Médio

Como a representação em frequência mais simples é a que emprega tempo discreto, torna-se necessário o emprego de amostragem para o estudo da análise de Fourier no nível do Ensino Médio. Mais do que uma simples técnica, ela costuma ser uma necessidade quando se trata da observação e registro de grandezas como discutimos na seção 2.3, ainda mais por meio de instrumentação eletrônica.

As tecnologias digitais e o computador impulsionaram o registro de grandezas por meio de amostras. Exceto quando empregando álgebra simbólica, que não se aplica a dados amostrados, todo o funcionamento do computador se baseia em grandezas quantizadas e amostradas.

Tabela 3.3: Conceitos de amostragem e abordagem de ensino

Conceito	Abordagem
Noção de amostragem	Recorrer à noção intuitiva e aos usos típicos. Apresentação da terminologia. Apresentação de exemplos em geral. Construção de gráficos em computador. Variação do período de amostragem e seu efeito. Observação qualitativa de que grande quantidade de amostras é difícil de distinguir do caso contínuo. Apresentação do exemplo específico do áudio digital.
Representação matemática da amostragem	Limitar a apresentação ao caso mais simples de taxa de amostragem fixa em que a variável independente $t$ é amostrada como $t = nT_s$ . Apresentar a notação $x[n]$ e a noção de frequência angular normalizada.
Teorema de Nyquist	Demonstração pela lógica necessária para evitar representações ambíguas de sinais senoidais de frequências distintas. Verificação gráfica da ocorrência da ambiguidade. Demonstração analítica por trigonometria da relação de ambiguidade.

Considerando o alto nível de complexidade da apresentação da amostra-

gem no nível superior, é necessário elaborar uma abordagem inédita adequada ao nível médio. Para isso, resumimos na tabela 3.3 alguns conceitos fundamentais para emprego da amostragem a partir dos conceitos de domínio do aluno e a abordagem que vamos desenvolver para consolidar o uso desta técnica.

Conforme veremos no Capítulo 4, a noção de amostragem é bem consolidada no senso comum do aluno nos últimos anos do Ensino Médio. Ele já a empregou tanto na Matemática, no esboço de gráficos, por exemplo, quando se recorre a marcação de amostras do gráfico antes do traçado contínuo aproximado à mão livre, quanto em diversos casos da Física. Nesta última matéria, é comum a apresentação de dados na forma de amostras, por vezes tabeladas, para o estudo dos diversos fenômenos. Se o aluno teve oportunidade de realizar atividades laboratoriais, é ainda mais provável que ele tenha colhido amostras de grandezas.

Tabela 3.4: Amostras de pontos notáveis de  $y = x^3 - 3x^2 - 144x + 432$ .

$x$	$y$	tipo
-12	0	raíz
-6	972	máximo
0	432	interseção com eixo $y$
3	0	raíz
8	-400	mínimo
12	0	raíz

Pode-se propor, então, atividades progressivas com elaboração de gráficos a partir de pontos notáveis (amostras). Para a função,  $y = x^3 - 3x^2 - 144x + 432$ , por exemplo, fornecemos 7 amostras de pontos notáveis na tabela 3.4. Mesmo sem grandes conhecimentos a respeito de cúbicas, um aluno de Ensino Médio pode elaborar um esboço do seu gráfico a mão livre a partir destas amostras tal como ilustrado no gráfico superior da figura 3.4.

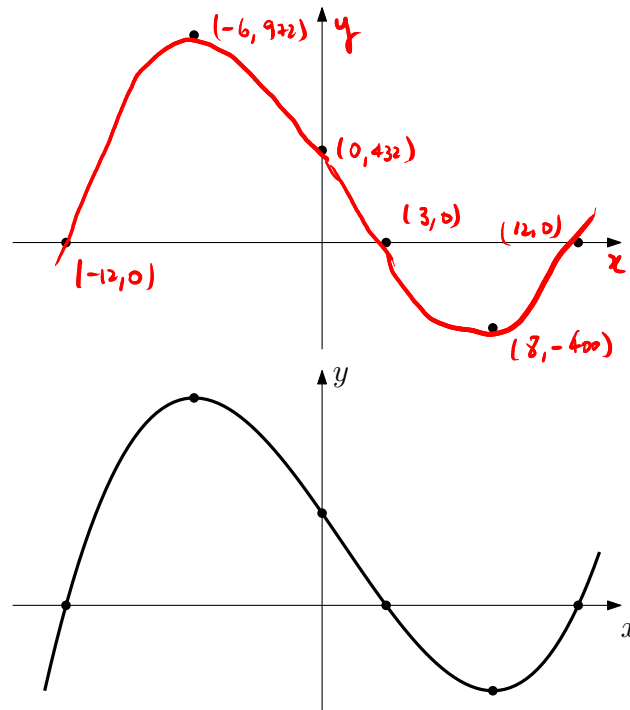


Figura 3.4: Esboço a mão livre (superior) e gráfico elaborado por computador a partir de 99 segmentos de reta ou 100 amostras (inferior).

Embora imperfeito, o esboço com estas amostras não difere demasiadamente no comportamento geral do gráfico mais preciso elaborado no computador e também exibido na figura 3.4 em sua parte inferior.

Neste simples exemplo, uma série de questões relacionadas à amostragem podem ser discutidas:

- O próprio computador costuma construir gráficos por amostras, o da figura 3.4, por exemplo, é composto de 100 amostras ligadas por segmentos de reta. A quantidade de amostras é tão grande que não é possível identificar visualmente o caráter amostrado.
- A própria exibição em telas e impressão de mídias digitais é feita por amostras, designadas pixels.
- O efeito no traçado a mão dos gráficos realizado sem que todos os pontos notáveis fossem fornecidos.

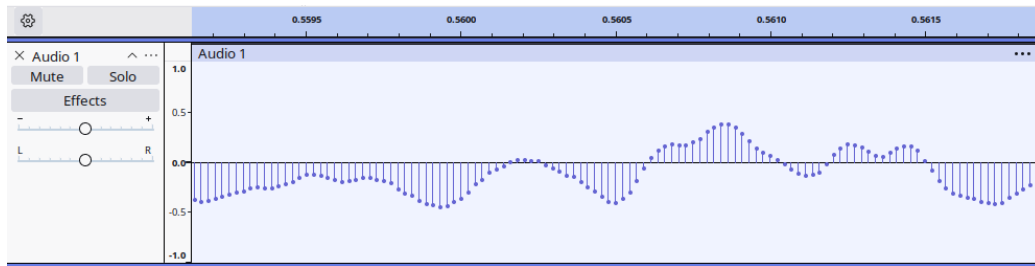


Figura 3.5: Zoom sobre gráfico de um áudio gravado no Audacity detalha cada amostra.

- O uso dos termos amostra, período de amostragem e frequência de amostragem.
- Os limites nas quantidades de amostras para que se possa representar o comportamento aproximado da função.

Nesta fase, a introdução de um recurso computacional para a elaboração de gráficos permite a exploração das nuances da amostragem. Recomendamos o uso do Python [45] com os recursos básicos disponíveis na instalação padrão e as bibliotecas NumPy e Matplotlib. Espera-se que o aluno compreenda o conceito de amostragem e conclua que a amostragem não tem capacidade ilimitada de representar o comportamento de uma função, principalmente se a quantidade de amostras for muito pequena para expressar a variação da função em um trecho.

Para os exercícios específicos que pretendemos desenvolver, é útil apresentar áudios digitais diversos em um software que permita a distinção das amostras. Isto é possível, por exemplo, no Audacity [46], software livre e de código aberto para edição de áudio conforme ilustramos na figura 3.5. Cada amostra é isoladamente apresentada neste tipo de gráfico chamado de gráfico de ramos (*stem*) amplamente empregado na comunidade acadêmica e comercial para explicitar o caráter amostrado em um gráfico.

Apesar das nuances e detalhes do emprego da amostragem, sua representação matemática neste nível é muito simples. Se a variável independente real de um determinado problema é  $t$ , sua amostragem pode ser representada

pela troca da variável  $t \in \mathbb{R}$  pela variável  $n \in \mathbb{Z}$  pela substituição

$$t = nT_s, \quad (3.3)$$

em que a constante  $T_s$  é definida como o período de amostragem, dado em unidades de tempo por amostra, e define um intervalo regular entre as coletas de amostra sobre a variável independente. Como amostra pode ser considerado um adimensional,  $T_s$  pode ser medido em unidades de tempo – segundos no SI. Seu recíproco,

$$f_s = \frac{1}{T_s}, \quad (3.4)$$

é a frequência de amostragem dada em amostras por unidade de tempo, ou pelo recíproco da unidade de tempo – hertz no SI. Uma unidade comercial comum para esta medida é sps (sigla de *samples per second*), do inglês para amostras por segundo, e seus múltiplos decimais ksp eMsp.

Com a substituição definida na equação 3.3, nos interessará num sinal  $x(t)$ , apenas os casos  $x(nT_s)$ , que convencionaremos chamar

$$x(nT_s) \equiv x[n], \quad (3.5)$$

em que os colchetes são empregados para designar que a variável independente é inteira e que  $x$  é um sinal amostrado.

Com a substituição  $t = nT_s$  sobre uma função trigonométrica representante de um movimento harmônico simples de frequência  $f = 1/T$  como em

$$\cos(2\pi ft),$$

obtemos

$$\cos(2\pi ft) = \cos(2\pi fT_s n)$$

em que o multiplicador  $2\pi fT_s = 2\pi f/f_s = 2\pi T_s/T$  é um adimensional, ou, considerando os adimensionais radiano e amostra, uma frequência angular dada em radianos por amostra, definida como

$$w \equiv 2\pi fT_s = 2\pi f/f_s = 2\pi T_s/T \quad (3.6)$$



e designada frequência angular normalizada, já que ela é normalizada por um parâmetro dimensional associado à amostragem.

### 3.2.1 Ambiguidade da amostragem de senóides e o Teorema de Nyquist no Ensino Médio

Pela abordagem até aqui, fica bem estabelecida a noção de amostragem e sua representação matemática. Resta o estudo das restrições da amostragem que vimos na seção 3.1.2 ser resolvida pelo teorema de Nyquist ao custo de uma demonstração demasiadamente avançada para o nível médio. Por esta razão, vamos observar o efeito da amostragem sobre o cosseno  $\cos(2\pi ft)$ , supondo que ele seja a componente de um sinal qualquer. Ao amostrar esse componente, pela substituição  $t = nT_s$ , obtemos

$$\begin{aligned}\cos(2\pi fnT_s) &= \cos(-2\pi fnT_s) \\ &= \cos(-2\pi fnT_s + 2\pi n) \\ &= \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{T_s} - f\right)nT_s\right] \\ \cos(2\pi fnT_s) &= \cos[2\pi(f_s - f)nT_s].\end{aligned}$$

Ou seja, apenas pelo emprego da paridade e periodicidade da função cosseno e por manipulação algébrica, conclui-se que

$$\cos(2\pi fnT_s) = \cos(2\pi f't) = \cos[2\pi(f_s - f)nT_s], \quad (3.7)$$

em que a frequência  $f' = f_s - f$  se apresenta igual a frequência  $f$  quando amostrada. Isto significa que ao observar amostras de cossenóides de frequência  $f$  ou  $f'$ , elas se apresentam iguais e há, portanto, uma ambiguidade na distinção entre as amostragens destas duas frequências. Tendo conhecimento apenas das amostras, o que se observa é uma oscilação na frequência  $f$  ou  $f'$ ?

A solução deste problema de ambiguidade também leva ao teorema de Nyquist. A figura 3.6 mostra a localização de  $f$  e  $f'$  quando  $f$  é pequeno. Vamos considerar que em um sinal de interesse não poderiam haver, como

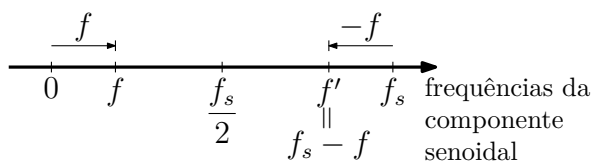


Figura 3.6: Localização no eixo de frequências de um componente  $f$  qualquer e de sua contraparte  $f'$  a medida que o valor de  $f$  cresce.

componentes, as frequências  $f$  e  $f'$  ao mesmo tempo, pois elas teriam a mesma representação, e, certamente, o sinal amostrado não seria uma boa representação do sinal original.

Desta forma, podemos propor a noção de limitação em banda para um sinal. Um sinal limitado teria componentes de frequência até um valor máximo, que vamos identificar como  $f_{\text{máx}}$ . Dentre  $f$  e  $f'$ , apenas  $f$  poderia existir como componente nos sinais sob estudo, pois é uma frequência menor e que estaria dentro do limite de  $f_{\text{máx}}$ . A frequência ambígua,  $f'$ , deveria ser, com certeza, maior do que  $f_{\text{máx}}$ .

Ora, pela figura 3.6 observamos que a medida que  $f$  cresce partindo da frequência 0 e sua contraparte  $f'$  diminui a partir de  $f_s$ , a região ocupada por possíveis valores de  $f$  e possíveis valores de  $f'$  atinge um ponto limítrofe em  $f_s/2$ . Assim, se houver garantia de que qualquer componente de um sinal tem frequência máxima  $f_{\text{máx}} < f_s/2$ , garantimos que apenas  $f$  precisará ser representada, sua contraparte  $f'$ , estaria fora da região limitada do espectro do sinal e não haveria ambiguidade na representação das componentes de frequência.

Este resultado, sugerido pela eliminação da ambiguidade na representação de cossenoides na forma  $\cos(2\pi ft)$  amostrados com frequência de amostragem  $f_s$ , é exatamente o teorema de Nyquist. Como ele pode ser demonstrado apenas por propriedades de trigonometria e argumentação, ele é mais viável para apresentação no Ensino Médio.

Para os alunos mais detalhistas, pode-se observar que o mesmo raciocínio pode ser desenvolvido considerando que o componente em questão é tomado

pela função seno, caso em que se encontraria

$$\sin(2\pi f n T_s) = -\sin(2\pi f' t) = -\sin[2\pi (f_s - f) n T_s]. \quad (3.8)$$

Aqui seria necessário argumentar que nossa intenção é ponderar os componentes de frequência por meio de coeficientes, e, por esta razão,  $\sin(2\pi f n T_s) = -\sin(2\pi f' t)$  diferem apenas no sinal do coeficiente e também seriam considerados ambíguos levando ao mesmo resultado do teorema de Nyquist, afinal, as funções seno e cosseno diferem apenas na fase.

Como exercício complementar, e ainda considerando o emprego de ferramentas de elaboração de gráfico, a visualização dos gráficos das cossenoides ambíguas é um bom argumento para esclarecer o problema da representação. Como um caso específico, consideremos a amostragem com  $T_s = 5$  ms que equivale a  $f_s = 200$  Hz e um componente com frequência  $f = 80$  Hz. Esta frequência está abaixo de  $f_s/2 = 100$  Hz e, portanto, seria uma frequência válida para ser representada nesta taxa de amostragem. Sua contraparte,  $f' = f_s - f = 120$  Hz teria a mesma representação que  $f$ . Ao fazer o gráfico da figura 3.7 de  $f$  (preto contínuo) junto ao de  $f'$  (vermelho tracejado) ao longo de dois períodos de  $f$  ou três de  $f'$ , vemos que, nesta região, se obtém 5 amostras que coincidem perfeitamente entre  $\cos(2\pi 80t)$  e  $\cos(2\pi 120t)$ . As amostras de  $f$  são tomadas no gráfico do tipo *stem* com um ramo amarelo e as de  $f'$  com um ramo verde tracejado, de modo que o que se observa, devido a coincidência das amostras, são ramos listrados em verde e amarelo.

É importante observar que 120 Hz é um sinal com variação rápida demais para que seja representado com amostragem a 200 Hz, o que se observa pela perda de um trecho importante de sua variação que é o segundo vale do gráfico. Pareceria muito mais intuitivo tentar traçar a senoide de 80 Hz sobre as amostras dadas do que a de 120 Hz.

Outra questão importante mas mais aprofundada é observar que existe, na verdade, uma infinidade de frequências ambíguas com relação a  $0 \leq f \leq f_s/2$ . Elas são todas as frequências distantes de  $f$  com relação a qualquer frequência no formato  $m f_s$ , para qualquer  $m \in \mathbb{Z}$ . Nenhuma delas deve estar presente em um sinal cujas componentes estejam garantidas estar limitadas

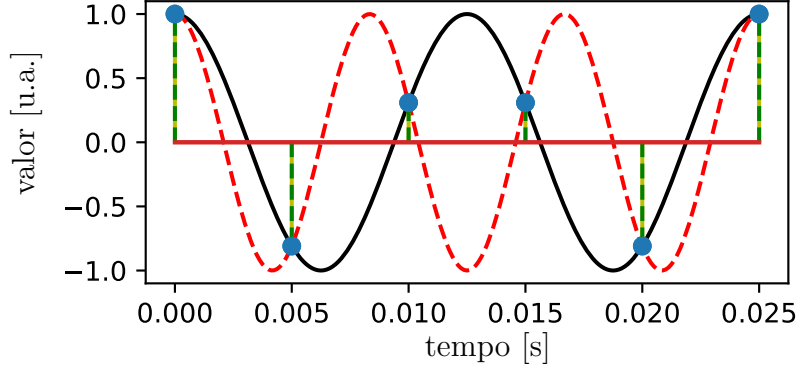


Figura 3.7: Gráfico ilustrativo da coincidência entre cossenoides de 80 e 120 Hz quando amostrados a 5 ms.

a  $f_{\text{máx}} < f_s/2$ .

Com estas observações, conseguimos concluir os conceitos propostos na tabela 3.3 suficientes para estabelecer a noção, a representação matemática e as limitações da amostragem num nível de Ensino Médio.

### 3.3 Adaptação da série de Fourier para o Ensino Médio

Um sinal ou função de tempo discreto  $x[n]$  que seja periódico com período  $N$  ou limitado com  $N$  amostras tem, nas obras de Ensino Superior, comumente, a definição de sua série de Fourier de tempo discreto em termos de exponenciais complexas no formato

$$x[n] = \sum_{k \in I_N} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (3.9)$$

Nestas expressões, três generalidades costumam ser empregadas. A primeira é que a variável  $k$  que faz o percurso pelas diferentes frequências discretas pode estar em um subconjunto qualquer  $I_N$  de  $N$  números inteiros consecutivos. Ela surge da periodicidade da exponencial complexa expressa

como

$$e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n}$$

para qualquer  $m \in \mathbb{Z}$ . Isto significa que são necessários apenas  $N$  valores consecutivos de  $k$  para cobrir todas as exponenciais complexas distintas com argumento na forma dada. Ao se escolher um conjunto com  $N$  números inteiros quaisquer, ganha-se em liberdade e generalidade mas se perde no significado da variável  $k$ . Podemos fazer  $k$  corresponder exatamente às ordens dos harmônicos, dando-lhe significado, fazendo  $0 \leq k \leq N-1$  ou  $-(\lceil N/2 \rceil - 1) \leq k \leq \lfloor N/2 \rfloor$ , ou seja, forçando o uso de

$$I_N = I_{N0} = \{0, 1, \dots, N-2, N-1\}$$

ou

$$I_N = I_{NS} = \{-(\lceil N/2 \rceil - 1), -(\lceil N/2 \rceil - 2), \dots, \lfloor N/2 \rfloor - 1, \lfloor N/2 \rfloor\}.$$

O intervalo  $I_{N0}$  parte do harmônico 0, atribuído à exponencial  $e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot 0 \cdot n} = 1$ , que é o componente constante, e segue para o 1º harmônico  $e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot 1 \cdot n} = \cos(\frac{2\pi}{N} \cdot 1 \cdot n) + j \sin(\frac{2\pi}{N} \cdot 1 \cdot n)$ , associado a frequência angular normalizada fundamental

$$w_0 = w_1 = \frac{2\pi}{N}.$$

Já o intervalo  $I_{NS}$  é aproximadamente simétrico com relação à  $k = 0$ . Ele não é exatamente simétrico pois quando  $N$  é par, há um valor a mais para  $k > 0$ , que é aquele em que  $k = N/2$ , do que há para  $k < 0$ . Com estes intervalos, escrevemos

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (3.10)$$

ou

$$x[n] = \sum_{k=-(\lceil N/2 \rceil - 1)}^{\lfloor N/2 \rfloor} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (3.11)$$

Esta última expressão pode ser reescrita de forma simplificada para cada caso

da paridade de  $N$ , resultando em

$$x[n] = \begin{cases} \sum_{k=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, & \text{para } N \text{ ímpar} \\ \sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + C_{N/2} e^{j\pi n}, & \text{para } N \text{ par} \end{cases}, \quad (3.12)$$

ficando evidente o termo não simétrico do caso par.

A segunda generalidade é o emprego de um coeficiente  $C_k$  complexo e a última é o uso de exponenciais complexas. Ambas têm a finalidade de obter uma função trigonométrica qualquer contemplando as características de frequência e fase quando se considera a interação entre o coeficiente complexo  $C_k$  e a função a exponencial complexa  $e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$ .

O uso de números complexos pode ser dispensado pois, se  $x[n]$  é real, ele deve ser igual ao seu complexo conjugado, ou seja,

$$x[n] = x^*[n].$$

Utilizando a expressão para  $x[n]$  para  $N$  par da equação 3.12 que contém mais complicantes, obtemos

$$\sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + C_{N/2} e^{j\pi n} = \sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} C_k^* e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} + C_{N/2}^* e^{-j\pi n}.$$

Mudando a variável  $k \rightarrow -k$  no somatório do membro direito, e desenvolvendo  $e^{j\pi n} = e^{-j\pi n} = \cos(\pi n)$ ,

$$\sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + C_{N/2} \cos(\pi n) = \sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} C_{-k}^* e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + C_{N/2}^* \cos(\pi n),$$

que, pela ortogonalidade de  $e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$  para quaisquer valores de  $k$  num intervalo de comprimento  $N$ , implicam

$$C_k = C_{-k}^*. \quad (3.13)$$

Considerando

$$C_k = A_k + jB_k, \quad (3.14)$$

a equação 3.13 implicará em  $\text{Re}\{C_k\} = A_k$  par com  $k$  e  $\text{Im}\{C_k\} = B_k$  ímpar com essa variável, ou seja

$$A_{-k} = A_k, \text{ e} \quad (3.15)$$

$$B_{-k} = -B_k. \quad (3.16)$$

Retomando a expressão para  $x[n]$  para  $N$  par da equação 3.12, podemos agora desenvolver

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + C_{N/2} e^{j\pi n} \\ &= \sum_{k=-(N/2-1)}^{-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + C_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + C_{N/2} e^{j\pi n}. \end{aligned}$$

Fazendo, novamente, a mudança de variável  $k \rightarrow -k$  apenas no primeiro somatório, teremos

$$\begin{aligned} x[n] &= C_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{k=1}^{N/2-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + C_{N/2} e^{j\pi n} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left[ C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] + C_{N/2} e^{j\pi n} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left\{ (A_k - jB_k) \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (A_k + jB_k) \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right\} + C_{N/2} \cos(\pi n) \\ x[n] &= C_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left[ 2A_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - 2B_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] + C_{N/2} \cos(\pi n). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Desta última expressão, podemos ver que como  $x[n] \in \mathbb{R}$ , tanto  $C_0$  como  $C_{N/2}$  devem ser reais pois a expressão no somatório é real. Podemos concluir

que

$$C_0 = A_0, \quad (3.18)$$

$$B_0 = 0, \quad (3.19)$$

$$C_{N/2} = A_{N/2}, \text{ e} \quad (3.20)$$

$$B_{N/2} = 0. \quad (3.21)$$

Podemos observar que os termos e funções da equação 3.17 já estão adequadas ao Ensino Médio, uma vez que todos os valores são reais ou inteiros, o único operador utilizado é o somatório e as únicas funções empregadas são as trigonométricas. Todas essas entidades e ferramentas são parte dos currículos comuns até o Ensino Médio e, em especial, do currículo do Colégio Naval para o qual nosso curso será direcionado [9].

Podemos agora determinar os coeficientes  $A_0$ ,  $2A_k$ ,  $-2B_k$  e  $A_{N/2}$  a partir do coeficiente complexo  $C_k$  dado nos livros de Ensino Superior por

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in I_N} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (3.22)$$

Ao desenvolvê-la e adotando  $I_N = I_{N0}$ , teremos

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - j \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right), \end{aligned}$$

de onde se obtém pela separação das partes real e imaginária

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right), \text{ e} \quad (3.23)$$

$$B_k = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right). \quad (3.24)$$

Vemos, também, que os coeficientes, compostos por  $A_k$  e  $B_k$  também utilizam apenas o operador somatório e funções trigonométricas, verificando



que tanto a expressão de Fourier adaptada da equação 3.17 como as equações 3.23 e 3.24 para cálculo dos coeficientes se restringe à matemática do nível de Ensino Médio.

Para evitar o uso de multiplicadores nos coeficientes, vamos reescrever em nossa proposta o formato para a equação 3.17 empregando apenas coeficientes distintos entre os termos de seno e cosseno, obtendo

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \quad (3.25)$$

que chamaremos de *equação de síntese* seguindo a convenção da literatura para a equação que expressa  $x[n]$  em termos do somatório de seus componentes de frequência.

Pela comparação entre as equações 3.17, 3.25, e pelos valores obtidos nas equações 3.18 a 3.21 podemos verificar que

$$a_k = 2A_k, \quad k \neq 0 \text{ e } k \neq N/2 \quad (3.26)$$

$$b_k = -2B_k, \quad k \neq 0 \text{ e } k \neq N/2 \quad (3.27)$$

$$a_0 = C_0 = A_0, \quad (3.28)$$

$$b_0 = B_0 = 0, \quad (3.29)$$

$$a_{N/2} = C_{N/2} = A_{N/2}, \text{ e,} \quad (3.30)$$

$$b_{N/2} = 0, \quad (3.31)$$

de onde podemos obter as *equações de análise* que determinam os coeficientes

da equação de síntese em termos do sinal  $x[n]$  como

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right), \quad \text{para } k \neq 0, \quad k \neq N/2; \quad (3.32)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right), \quad \text{para } k \neq 0, \quad k \neq N/2; \quad (3.33)$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]; \quad (3.34)$$

$$b_0 = 0, \quad (3.35)$$

$$a_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(\pi n), \text{ e} \quad (3.36)$$

$$b_{N/2} = 0. \quad (3.37)$$

Uma das grandes desvantagens da transposição da série de Fourier de tempo discreto para sua forma trigonométrica é a obtenção de uma equação de síntese com grande quantidade de termos e a impossibilidade de expressar a análise por uma única equação.

### 3.4 Outros suportes para a construção da série de Fourier de tempo discreto e suas equações de análise

#### 3.4.1 Rearranjo das equações de síntese e análise na forma matricial

Considerando a possibilidade de emprego repetitivo das equações de síntese e análise e o seu cálculo por meio de computadores, é importante garantir a possibilidade de uso de cálculo matricial com a finalidade de diminuir o tempo de processamento. Para tal, é possível reorganizar as equações 3.25 e de 3.32 até 3.37 por meio de três equações matriciais.

Para realizar a análise, descrita pelas equações de 3.32 até 3.37, precisamos definir a matriz dos coeficientes dos cossenos, a matriz coluna  $\mathbf{a}_{(\lfloor N/2 \rfloor + 1) \times 1}$

que contém os coeficientes  $a_k$  que multiplicam o  $\cos(w_k n)$ ; a matriz dos coeficientes dos senos, a matriz coluna  $\mathbf{b}_{(\lfloor N/2 \rfloor + 1) \times 1}$  que contém os coeficientes  $b_k$  que multiplicam o  $\sin(w_k n)$ ; e a matriz das amostras, a matriz coluna  $\mathbf{x}_{N \times 1}$  que contém as  $N$  amostras do sinal  $x[n]$ , ou seja,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\lfloor N/2 \rfloor - 1} \\ a_{\lfloor N/2 \rfloor} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\lfloor N/2 \rfloor - 1} \\ b_{\lfloor N/2 \rfloor} \end{bmatrix}; \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{bmatrix}.$$

Nas equações de 3.32 até 3.37, estas grandezas estão relacionadas, pois obtém-se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  por meio dos valores de  $\mathbf{x}$  relacionando-os com a matriz dos cossenos da análise a matriz  $\mathbf{C}_a_{(\lfloor N/2 \rfloor + 1) \times N}$  das amostras de cossenoides cujos elementos são dados por

$$C_{aij} = \begin{cases} \frac{1}{N}, & i = 1 \\ \frac{1}{N} \cos[w_{i-1}(j-1)], & i = \lfloor N/2 \rfloor + 1, N \text{ par} , \\ \frac{2}{N} \cos[w_{i-1}(j-1)], & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.38)$$

em que  $w_k = w_0 k = \frac{2\pi}{N} k$  é a frequência angular normalizada do  $k$ -ésimo harmônico representável com  $N$  amostras, e pela matriz dos senos da análise, a matriz  $\mathbf{S}_a_{(\lfloor N/2 \rfloor + 1) \times N}$  das amostras de senoides cujos elementos são dados por

$$S_{aij} = \begin{cases} 0, & i = 1, \text{ ou} \\ \frac{2}{N} \sin[w_{i-1}(j-1)], & i = \lfloor N/2 \rfloor + 1, N \text{ par} . \\ \frac{2}{N} \sin[w_{i-1}(j-1)], & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.39)$$

Dadas as matrizes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{C}_a$  e  $\mathbf{S}_a$ , os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  da SFTD do sinal

$x[n]$  podem ser extraídos das matrizes  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  obtidas pelas equações

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}, \text{ e,} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{S}_a \mathbf{x}.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Já a equação 3.25 pode ser obtida com as mesmas matrizes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{x}$ , e pela matriz dos cossenos da síntese, a matriz  $\mathbf{C}_s$   $N \times (\lfloor N/2 \rfloor + 1)$  das amostras de cossenoides, cujos elementos são dados por

$$C_{sij} = \cos[w_{j-1}(i-1)],\tag{3.41}$$

e pela matriz dos senos da síntese, a matriz  $\mathbf{S}_s$   $N \times (\lfloor N/2 \rfloor + 1)$  das amostras de senoides, cujos elementos são dados por

$$S_{sij} = \sin[w_{j-1}(i-1)].\tag{3.42}$$

Dadas as matrizes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{C}_s$  e  $\mathbf{S}_s$ , as amostras do sinal  $x[n]$  podem ser recuperados da matriz  $\mathbf{x}$  dada pela equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}_s \mathbf{a} + \mathbf{S}_s \mathbf{b}.\tag{3.43}$$

Assim, todos os cálculos dos coeficientes de Fourier, ou o inverso, o cálculo do sinal a partir dos coeficientes de Fourier, podem ser realizados pelas três equações matriciais dadas em 3.40 e 3.43.

### 3.4.2 A SFTD compacta e o espectro de Fourier

A SFTD definida na equação 3.25 é um primeiro passo na explicitação das intensidades dos componentes de frequência de um sinal. Com isso queremos dizer que não é óbvia a intensidade de uma frequência angular normalizada  $w_k$  pois ela está dividida em  $a_k$  e em  $b_k$ , o que pode ser resolvido ao se adotar uma única função trigonométrica, já que

$$a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = c_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \phi_k\right),\tag{3.44}$$

ou

$$a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = c_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right), \quad (3.45)$$

onde

$$\begin{aligned} c_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \\ \phi_k &= -\arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right), \text{ e,} \\ \theta_k &= \arctg\left(\frac{a_k}{b_k}\right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

conforme se pode provar pelas equações de seno e cosseno de soma de arco ao multiplicar o membro esquerdo das equações 3.44 e 3.45 por  $c_k/c_k$ .

Esta identidade permite definir as SFTD compactas

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \phi_k\right), \quad (3.47)$$

ou

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right). \quad (3.48)$$

Pelas SFTD compactas, as intensidades de cada frequência estão evidentes. A intensidade  $c_k$ , amplitude de uma cossenoide, está relacionada à frequência  $w_k$ . Esta observação será fundamental na definição de espectro que daremos na seção 3.5.

### 3.4.3 Componentes de um sinal periódico a partir da relação básica de periodicidade

Nesta fase dos estudos, nenhuma ideia comprobatória relativa à existência de componentes de frequência está bem desenvolvida. É raro o estudo da soma de senoides e o estudo de equações de onda. Algumas noções de superposição de ondas costuma ser ilustrada e exercitada, principalmente considerando ondas de propagação em uma dimensão, como ocorre no deslocamento transversal em uma corda.

Propomos uma demonstração breve sobre componentes de uma função

periódica partindo da relação que define periodicidade em que se  $g(t)$  é periódica com período fundamental  $T$ , então

$$g(t) = g(t + T).$$

A substituição sucessiva de  $t \rightarrow t + T$  leva a relação

$$g(t) = g(t + T) = g(t + 2T) = g(t + 3T) = \dots$$

e, por indução, a relação geral

$$g(t) = g(t + kT).$$

Ora,  $kT$  é um múltiplo inteiro do período fundamental. Isto significa que se é sabido que  $h(t)$  é periódica e que  $h(t) = h(t + U)$ , para um número  $U$  qualquer, então a frequência fundamental  $T_h$  de  $h$  deve ser submúltiplo de  $U$ , ou seja,

$$T_h = \frac{U}{k},$$

para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

Vamos considerar, agora, que  $g(t)$  é formado por funções componentes  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  por meio da soma, tal como na superposição de ondas. Assim,  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  serão parcelas de  $g(t)$ ,

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t).$$

Pela periodicidade de  $g$ ,

$$\begin{cases} g(t) = g(t + T) \\ g(t) = g_1(t) + g_2(t) \end{cases} \Rightarrow g_1(t) + g_2(t) = g_1(t + T) + g_2(t + T).$$

Ora, a igualdade da direita não implica periodicidade de  $g_1$  ou de  $g_2$ , implica apenas periodicidade da sua soma. Mas podemos propor, arbitrari-

amente, a periodicidade de  $g_1$  e de  $g_2$ , fazendo

$$\begin{cases} g_1(t) = g_1(t + T) \\ g_2(t) = g_2(t + T) \end{cases}.$$

Isto significa que as frequências fundamentais de  $g_1$  e  $g_2$ , dadas respectivamente por  $T_1$  e  $T_2$ , devem ser submúltiplos de  $T$ , ou seja

$$\begin{cases} T_1 = T/k_1 \\ T_2 = T/k_2 \end{cases},$$

e, invertendo estas relações, obtemos

$$\begin{cases} f_1 = k_1 f \\ f_2 = k_2 f \end{cases},$$

em que  $f$ ,  $f_1$  e  $f_2$  são as respectivas frequências de  $g$ ,  $g_1$  e  $g_2$ . Isto significa que se quisermos interpretar  $g$  com componentes periódicas, as frequências das componentes deverão ser, necessariamente, múltiplos inteiros da frequência de  $g$ .

Este é um importante resultado e, como vimos, fácil de demonstrar. Por indução, o que provamos para  $g$  composto por duas componentes, pode ser provado para uma quantidade qualquer de componentes.

#### 3.4.4 Obtenção dos coeficientes da SFTD por sistema de equações

Como ferramenta de convencimento adicional com relação a existência e unicidade dos coeficientes e a possibilidade de obter seus valores, pode-se, também, mostrar que a substituição de cada um dos  $N$  valores de  $n$  na equação 3.25 de síntese resultará em  $N$  equações lineares com as incógnitas  $a_k$  e  $b_k$ . Como no total, há também  $N$  coeficientes considerando os  $a_k$  e  $b_k$  para todos os valores de  $k$ , temos um sistema com  $N$  equações e  $N$  incógnitas e, portanto, uma possível solução única que determina todos os coeficientes.

A razão pela qual os coeficientes não são calculados pela solução do sistema de equações, é meramente computacional. Contemporaneamente, os coeficientes da SFTD são calculados empregando o algoritmo de Cooley-Tookey [47], baseado no desenvolvimento do cálculo matricial dos coeficientes de série similar a da equação 3.9. Este método é chamado de transformada rápida de Fourier e conhecido por sua sigla FFT do inglês *fast Fourier transform*. Nossa proposta sugere inicialmente o uso do cálculo matricial para familiarização com as equações de síntese e análise e o significado dos coeficientes da SFTD, muito difíceis de extrair dos coeficientes da SFTD exponencial, principalmente devido ao uso de coeficientes complexos, o que tentaremos contornar com a maior simplicidade possível e sem entrar nos detalhes e deduções. Detalhamos a proposta de uso da FFT na seção 3.8.

### 3.4.5 Senoides como base de um espaço vetorial do $\mathbb{R}^N$

Um curso de Ensino Médio que consiga tratar aspectos de geometria analítica ou álgebra linear, mesmo que de forma introdutória, como é o caso do Colégio Naval [9], e que trate do produto interno ou produto escalar entre vetores apresentando-o como

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_0 u_0 + v_1 u_1 + v_2 u_2 \quad (3.49)$$

e como

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \theta, \quad (3.50)$$

em que  $v_0, v_1, v_2$  são os componentes de  $\vec{v}$  e  $u_0, u_1$  e  $u_2$  são os componentes de  $\vec{u}$ , também pode tratar a definição de projeção e de apresentação de um vetor numa base qualquer.

Para tal, é necessário conectar as ideias de projeção e de base ortogonal e que um vetor qualquer  $\vec{u}$  pode ser representado numa base com vetores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  como

$$\vec{v} = v_{e1} \vec{e}_1 + v_{e2} \vec{e}_2 + v_{e3} \vec{e}_3 \quad (3.51)$$



desde que os vetores  $\vec{e}_j$  sejam ortogonais entre si, ou seja

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \text{ para } i \neq j, \quad (3.52)$$

que é o mesmo que o ângulo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  entre os vetores da base. A projeção do vetor  $\vec{v}$  sobre o vetor  $\vec{u}$  é o vetor  $\vec{v}_u$  dado por

$$\vec{v}_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = v_u \vec{u} \quad (3.53)$$

que representa o vetor na direção de  $\vec{u}$  que é a projeção geométrica de  $\vec{v}$  ou que mais se aproxima de  $\vec{v}$ .

Apresentamos as relações acima em  $\mathbb{R}^3$ , mas pode-se mostrá-las, antes, para  $\mathbb{R}^2$ , e, só então, para  $\mathbb{R}^3$ . Este processo, inclusive, ajuda a sugerir por indução o caso de  $N$  valores amostrados. As  $N$  amostras de um sinal podem ser interpretadas como as  $N$  coordenadas de um vetor no  $\mathbb{R}^N$ . Neste caso, as equações 3.49 e 3.51 são generalizadas como

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{k=0}^{N-1} v_k u_k, \quad (3.54)$$

e,

$$\vec{v} = \sum_{k=0}^{N-1} v_{ek} \vec{e}_k, \text{ para } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, i \neq j. \quad (3.55)$$

Daqui, pode-se mostrar que  $N$  amostras de cosseno e de seno de frequência angular normalizada  $\frac{2\pi}{N}$  são todos ortogonais entre si. Vamos designar como  $\vec{c}_k$  e  $\vec{s}_k$  os vetores com coordenadas  $c_{kn} = \cos(\frac{2\pi}{N}kn)$  e  $s_{kn} = \sin(\frac{2\pi}{N}kn)$ ,

respectivamente. Assim, considerando  $1 \leq i, j \leq \lfloor N/2 \rfloor$ , teremos

$$\begin{aligned}\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}in\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N}jn\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \cos\left[\frac{2\pi}{N}n(i+j)\right] + \cos\left[\frac{2\pi}{N}n(i-j)\right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N}n(i+j)\right] + \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N}n(i-j)\right] \right\} \\ &= 0, \text{ para } i \neq j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{c}_i \cdot \vec{s}_j &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}in\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}jn\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sin\left[\frac{2\pi}{N}n(i+j)\right] + \sin\left[\frac{2\pi}{N}n(i-j)\right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left[\frac{2\pi}{N}n(i+j)\right] + \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left[\frac{2\pi}{N}n(i-j)\right] \right\} \\ &= 0,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j &= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N}in\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}jn\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \cos\left[\frac{2\pi}{N}n(i-j)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{N}n(i+j)\right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N}n(i-j)\right] - \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N}n(i+j)\right] \right\} \\ &= 0, \text{ para } i \neq j.\end{aligned}$$

Vemos que vetores  $\vec{c}_k$  e  $\vec{s}_k$  são sempre ortogonais entre si e resta estudar

o módulo destes vetores. Para  $\vec{c}_k$ , temos

$$\begin{aligned}
 \vec{c}_k \cdot \vec{c}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}2kn\right) + 1 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}2kn\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} 1 \\
 \vec{c}_k \cdot \vec{c}_k &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}2kn\right) + \frac{N}{2}.
 \end{aligned}$$

O somatório  $\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}2kn\right)$  para  $0 \leq k \leq \lfloor N/2 \rfloor$ , resulta sempre em 0, exceto quando  $k = 0$  ou quando  $N$  é par e  $k = N/2$ , caso em que  $\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}2kn\right) = N$ . Desta forma,

$$\vec{c}_k \cdot \vec{c}_k = \begin{cases} N, k = 0 \text{ ou } N \text{ é par e } k = N/2 \\ \frac{N}{2}, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Já para  $\vec{s}_k$ , temos

$$\begin{aligned}
 \vec{s}_k \cdot \vec{s}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}2kn\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}2kn\right) \\
 \vec{s}_k \cdot \vec{s}_k &= \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}2kn\right).
 \end{aligned}$$

Pela mesma razão do que observamos no cálculo de  $\vec{c}_k \cdot \vec{c}_k$ , teremos

$$\vec{s}_k \cdot \vec{s}_k = \begin{cases} 0, k = 0 \text{ ou } N \text{ é par e } k = N/2 \\ \frac{N}{2}, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Desta forma, considerando o vetor  $\vec{x}$  a ser representado como composto pelas amostras do sinal  $x[n]$ , ou seja,  $x_k = x[k]$ , e tomando  $\vec{e}_0 = \vec{c}_0$ ,  $\vec{e}_{2k-1} = \vec{c}_k$  e  $\vec{e}_{2k} = \vec{s}_k$ , para  $1 \leq k \leq \lfloor N/2 \rfloor$ , a equação 3.55 toma a forma da equação de síntese 3.25 com  $a_0 = x_{c0}$ ,  $a_k = x_{ck}$  e  $b_k = x_{sk}$  e as equações de análise de 3.32 a 3.37 coincidem exatamente com a projeção de  $\vec{x}$  sobre os vetores de base  $\vec{c}_k$  e  $\vec{s}_k$ .

Efetivamente, tomemos como exemplo o cálculo de  $a_k$  para  $1 \leq k < N/2$ . Pelas equações 3.32, 3.54 e 3.53 e pela relação  $a_k = x_{ck}$ , teremos

$$\begin{aligned} a_k &= x_{ck} \\ \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) &= \frac{\vec{x} \cdot \vec{c}_k}{\vec{c}_k \cdot \vec{c}_k} \\ \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) &= \underbrace{\frac{1}{\vec{c}_k \cdot \vec{c}_k}}_{N/2} \cdot \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{c}_k}_{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)} \end{aligned}$$

de onde se observa claramente que o multiplicador  $2/N$  da equação 3.32 pode ser interpretado como vindo do termo  $1/(\vec{c}_k \cdot \vec{c}_k)$  e o somatório nada mais é que o produto interno entre  $\vec{x} \cdot \vec{c}_k$ , ambos os fatores são os componentes do cálculo do coeficiente  $x_{ck}$  da projeção de  $\vec{x}$  sobre o vetor  $\vec{c}_k$ .

Ou seja, pode-se concluir que um sinal  $x[n]$  com  $N$  amostras é análogo a um vetor no  $\mathbb{R}^N$ , que há  $N$  senoides amostradas que formam uma base ortogonal deste espaço e a que a SFTD nada mais é do que a expressão do vetor que representa este sinal neste espaço nesta base.

### 3.4.6 Cálculo das equações de síntese e análise da SFTD com Python

Apenas como exemplo do que se espera na elaboração dos cálculos para obter o espectro, vamos apresentar alguns códigos em Python, linguagem empregada na aplicação descrita no Capítulo 4. O primeiro deles calcula  $x[n]$  a partir dos coeficientes da SFTD, implementando a equação 3.25 por meio de duas iterações com o comando de controle de fluxo **for**, um para correr os valores de  $n$  e outro os de  $k$  de modo que se some, para todos os valores de  $n$ , todas as parcelas  $a_k \cos(2\pi nk/N)$  e  $b_k \sin(2\pi nk/N)$  que o compõem. Esta estratégia é mostrada no código 3.1. Nele, consideramos importado o módulo NumPy, que os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  estão nos vetores **a** e **b** e que a quantidade de amostras se encontra na variável **N**. Estas considerações serão feitas em todos os códigos que se seguem.

```

1 w0 = 2*pi/N
2 x = zeros(N)
3 for n in range(N):
4     for k in range(int(N/2)):
5         x[n] = x[n] + a[k]*cos(w0*k*n) + b[k]*sin(w0*k*n)

```

Código 3.1: Implementação da equação 3.25 de síntese com dois laços **for**.

O código 3.1 é computacionalmente ineficiente. Em geral, laços **for** aninhados não são o melhor caminho para aproveitamento dos recursos de paralelismo disponíveis nos computadores contemporâneos. O laço que percorre os valores de  $n$  pode ser dispensado se empregarmos um vetor com os valores de  $n$  e recorrermos à operações matriciais elemento-a-elemento, resultando no código 3.2.

```

1 w0 = 2*pi/N
2 n = arange(N)
3 x = zeros(N)
4 for k in range(int(N/2)):
5     x = x + a[k]*cos(w0*k*n) + b[k]*sin(w0*k*n)

```

Código 3.2: Implementação da equação 3.25 de síntese com um laços **for** e operações elemento a elemento.

Uma próxima abordagem faz uso do produto matricial descrito na equação 3.43, construindo as matrizes  $\mathbf{C}_s$  e  $\mathbf{S}_s$  pelas regras dadas nas equações 3.41 e 3.42, obtendo como resultado o código 3.3. As linhas de 2 a 7 criam as matrizes  $\mathbf{C}_s$  e  $\mathbf{S}_s$ , o que só precisa ser realizado uma vez no programa, com a vantagem do cálculo da síntese com uma única linha, como a linha 8, de aritmética matricial cujo cálculo é extremamente eficiente nos computadores contemporâneos. O programa será tão mais eficiente, quanto mais a equação de síntese for realizada.

```

1 w0 = 2*pi/N
2 Cs = empty((N,int(N/2)+1))
3 Ss = empty((N,int(N/2)+1))
4 for i in range(N):
5     for j in range(int(N/2)+1):
6         Cs[i,j] = cos(w0*j*i)
7         Ss[i,j] = sin(w0*j*i)
8 x = Cs@a + Ss@b

```

Código 3.3: Implementação da equação 3.43 de síntese pela construção das matrizes em laços **for**.

Uma última abordagem apresentada no código 3.4 leva ao extremo o emprego de matrizes partindo de uma matriz **matrizIJ** em que seus elementos **matrizIJ[i,j] = i\*j**, o que se obtém pelo produto matricial entre uma matriz coluna com os valores de  $i$  por uma matriz linha com os valores de  $j$  e aplicando a função trigonométrica elemento a elemento sobre esta matriz de base. Como resultado, nenhum laço é empregado, sendo toda atividade

repetitiva relegada às operações matriciais.

```
1 w0 = 2*pi/N
2 i = reshape( arange(N) ,(N,1) )
3 j = reshape( arange( int(N/2)+1) ,(1 , int(N/2)+1))
4 matrizIJ = i@j
5 Cs = cos(w0*matrizIJ)
6 Ss = sin(w0*matrizIJ)
7 x = Cs@a + Ss@b
```

Código 3.4: Implementação da equação 3.43 de síntese apenas com operações matriciais.

Os códigos 3.1 a 3.4 encerram o que esperamos que seja obtido na aplicação para a equação de síntese da SFTD. Vemos que os códigos são muito curtos. Nenhum deles emprega mais de 7 linhas na preparação e a operação matricial chega ao resultado ótimo de executar efetivamente a síntese com uma única linha de operação matricial que é exatamente igual à sua definição matemática (exceto pelo uso dos símbolos específicos da sintaxe do Python).

Ideias progressivas e similares as que utilizamos para a síntese podem ser empregadas para desenvolver as equações de análise. O código 3.5 implementa as equações 3.32 a 3.37 empregando dois laços **for**, enquanto que o código 3.6 o faz com um único laço.

```

1 w0 = 2*pi/N
2 a = zeros(int(N/2)+1)
3 b = zeros(int(N/2)+1)
4 for n in range(N):
5     for k in range(int(N/2)):
6         a[k] = a[k] + x[n]*cos(w0*k*n)
7         b[k] = b[k] + x[n]*sin(w0*k*n)
8     a = (2/N)*a
9     b = (2/N)*b
10 a[0] = 0.5*a[0]
11 if N%2==0:
12     a[int(N/2)] = 0.5*a[int(N/2)]

```

Código 3.5: Implementação das equações 3.32 a 3.37 de síntese com dois laços **for**.

```

1 w0 = 2*pi/N
2 n = arange(N)
3 a = zeros(int(N/2)+1)
4 b = zeros(int(N/2)+1)
5 for k in range(int(N/2)):
6     a[k] = sum(x*cos(w0*k*n))
7     b[k] = sum(x*sin(w0*k*n))
8 a = (2/N)*a
9 b = (2/N)*b
10 a[0] = 0.5*a[0]
11 if N%2==0:
12     a[int(N/2)] = 0.5*a[int(N/2)]

```

Código 3.6: Implementação das equações 3.32 a 3.37 de síntese com um laço **for**.

Já o código 3.7 constrói as matrizes  $\mathbf{C}_a$  e  $\mathbf{S}_a$  dos cossenos e senos para análise a partir das regras construtivas dadas nas equações 3.38 e 3.39 preenchendo-a por meio de laços **for** que percorrem todos os elementos destas matrizes. As matrizes **a** e **b** são calculadas pelo par de relações dado na 3.40.



```

1 w0 = 2*pi/N
2 Ca = empty((int(N/2)+1,N))
3 Sa = empty((int(N/2)+1,N))
4 for i in range(int(N/2)+1):
5     for j in range(N):
6         Ca[i,j] = cos(w0*i*j)
7         Sa[i,j] = sin(w0*i*j)
8 Ca = (2/N)*Ca
9 Sa = (2/N)*Sa
10 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
11 if N%2==0:
12     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
13 a = Ca@x
14 b = Sa@x

```

Código 3.7: Implementação do par de relações matriciais da equação 3.40 empregando laços **for** para construir as matrizes auxiliares.

Por fim, o código 3.8 emprega apenas matrizes com mesma abordagem do código 3.4 evitando o uso de qualquer laço.

```

1 w0 = 2*pi/N
2 i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
3 j = reshape(arange(N),(1,N))
4 matrizIJ = i@j
5 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
6 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
7 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
8 if N%2==0:
9     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
10 a = Ca@x
11 b = Sa@x

```

Código 3.8: Implementação do par de relações matriciais da equação 3.40 apenas com operações matriciais.

Vemos que, por haver algumas exceções nas equações 3.32 a 3.37, os códigos para realização da análise possuem poucas linhas adicionais para

preparação do resultado final considerando os casos especiais. Ainda assim, podemos resumir que as operações de síntese e análise exigem menos de uma dezena de linhas cada para preparação das operações e as operações matriciais são realizadas em uma única linha na síntese e em duas linhas na análise. Além disso, estes códigos, uma vez aplicados a um caso, podem ser copiados para novas aplicações, tornando-se trechos com excelente reusabilidade.

Na abordagem matricial, os coeficientes e a defasagem da SFTD compacta dados na equação 3.46 podem ser obtidos a partir das matrizes **a** e **b** em duas linhas mostradas no código 3.9 em que uma linha adicional é empregada para contemplar as duas possibilidades de fase (a que toma o seno como função trigonométrica e a que toma o cosseno).

```
1 c = sqrt(a**2+b**2)
2 phi = -arctg(b/a)
3 theta = arctg(a/b)
```

Código 3.9: Obtenção dos coeficientes e defasagens da SFTD compacta das relações da equação 3.46.

Com o código 3.9, trouxemos trechos de códigos suficientes para o completo estudo do espectro de um sinal amostrado, restando para a seção 3.5 a realização da representação gráfica e para a seção 3.8 a simplificação destes procedimentos pelo uso das FFT já implementadas no módulo NumPy.

## 3.5 Noção e definição de sinais, espectro e conversores

Já discutimos na seção 2.3 a ideia de sinais tal como nos interessa e em nível suficiente para realizar as primeiras inferências a respeito de seu uso na tecnologia. Lá, consideramos um sinal  $x(t)$  similar a uma função  $x(t)$  (Matemática) ou a uma grandeza  $x$  dependente da grandeza  $t$  (Física), com a diferença de que maior importância recai na possibilidade de que se possa extrair informação ao se observar a variação de  $x$  ao longo de  $t$ .

Nos interessa agora discutir as ideias de espectro de frequência e de banda de frequências. Também na seção 2.3, discutimos a introdução, no Ensino Médio, dos conceitos de espectro pelo espectro de emissão, pelo espectro eletromagnético e pelo fato de que as relações entre intensidade de componentes de frequência *versus* frequência são considerados compreensíveis no nível do Ensino Médio.

As noções de altura de um som também estão bem definidas neste nível, de onde se pode inferir noções de ordem de grandeza de frequências fundamentais e de seus harmônicos. Na literatura, são comuns as discussões acerca da noção de timbre recaírem na existência de harmônicos e suas intensidades relativas, o que implica observação de componentes em altas frequências nos múltiplos inteiros da frequência fundamental em uma emissão periódica, mesmo que sua frequência fundamental seja baixa. Na seção 3.4.3, mostramos que é fácil apresentar no nível médio ser possível decompor uma função periódica qualquer em componentes periódicos. Estes terão, necessariamente, frequência dada por um múltiplo inteiro da frequência fundamental da função original.

Desta forma, há aspectos suficientes para argumentar que quando se observa os componentes de frequência num fenômeno aproximadamente periódico, eles se distribuirão em uma faixa de frequências associada às potencialidades e limitações físicas do sistema emissor. Esta característica é visível na escolha dos sistemas físicos preparados para emissão. Pequenos sinetes soam agudos, enquanto grandes sinos soam graves. Instrumentos elaborados para emitir em tessitura aguda são pequenos, enquanto que os que devem emitir nos tons mais baixos são grandes e volumosos. As características físicas não estão dissociadas da região de emissão de um sistema físico.

As noções de banda de emissão podem ser introduzidas seguindo esta linha. A banda de emissão é importante para estabelecer com o mínimo de racionalidade uma frequência de amostragem funcional. Saber, por exemplo, que os tons audíveis se encontram aproximadamente entre 20 Hz e 20 kHz, permitem concluir que o estudo do som não precisará ser amostrado acima 40 kHz de acordo com o teorema de Nyquist.

A banda de emissão é a região de frequências em que uma fonte emite

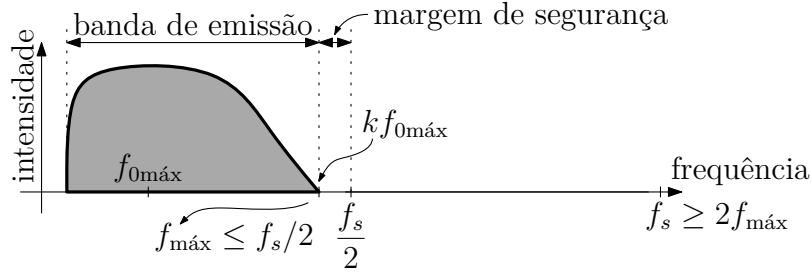


Figura 3.8: Noção de banda de frequências, estimativa de frequência máxima e de uma frequência de Nyquist razoável.

as suas componentes de frequência. Para definir a frequência de Nyquist é importante considerar o maior valor das componentes. Este valor pode ser estimado considerando a maior frequência de uma emissão multiplicado por um fator inteiro  $k$  que indique aproximadamente o maior harmônico relevante. Esta ideia está ilustrada na figura 3.8. A frequência fundamental máxima emitida pela fonte é mostrada como  $f_{0\text{máx}}$ , a frequência máxima da banda de emissão é estimada como  $f_{\text{máx}} = k f_{0\text{máx}}$ . Embora teoricamente justo de acordo com critério de Nyquist, não é boa prática fazer  $f_{\text{máx}} = f_s/2$ . Chamamos a diferença  $f_s/2 - f_{\text{máx}}$  de margem de segurança da proposta de amostragem.

Um sistema de amostragem emprega um conversor analógico para digital (conversor A/D), que amostra a grandeza de entrada em intervalos regulares. O exemplo mais simples de uma conversor A/D é a entrada para microfone de um computador ou de um celular moderno. Ele converte a onda de pressão do som em amostras de som que, como vimos na figura 3.5 da seção 3.2, encontram-se amostrados internamente no computador. Este esquema é apresentado na figura 3.10 em que destacamos também o papel do elemento sensor responsável por converter a grandeza captada  $x(t)$  em uma grandeza do tipo elétrica que chamamos de  $v(t)$ . Como os conversores A/D recebem em sua entrada uma grandeza do tipo elétrica, o sensor é necessário para realizar esta transformação.

Um último aspecto importante com respeito a conversão de sinais é a possibilidade de que  $x(t)$  não contenha apenas componentes de frequência na região de interesse para o estudo. É o caso, por exemplo, da existência

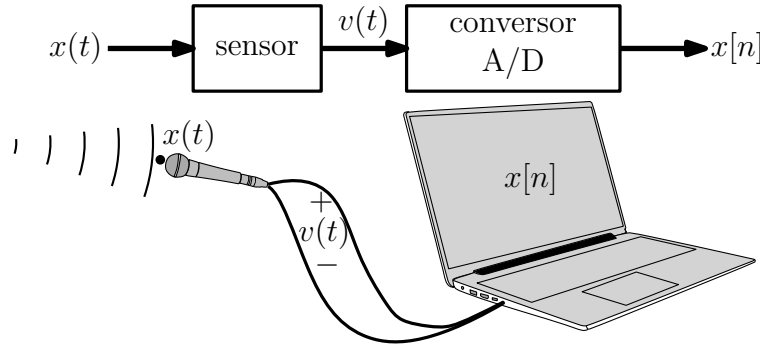


Figura 3.9: Esquema geral da conversão e a específica realizada sobre áudio em um computador.

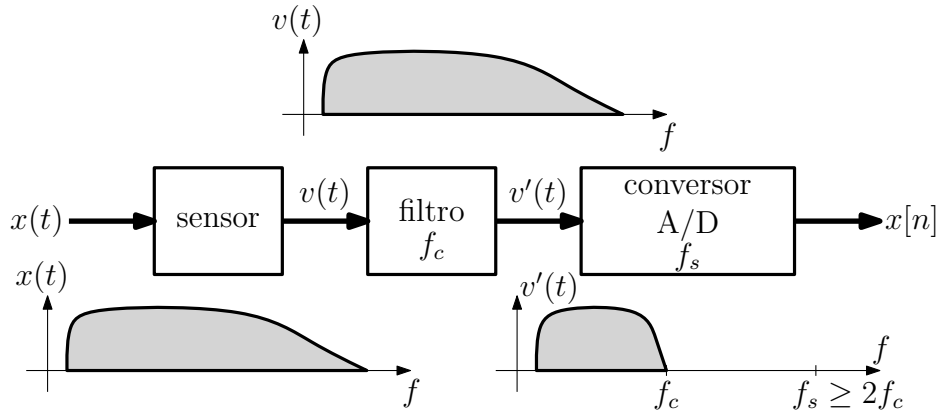


Figura 3.10: Esquema geral do conversor A/D com filtragem.

de ultrassom no ambiente em que se deseja estudar apenas o som. Neste caso, os componentes de ultrassom interferem na grandeza de pressão que será amostrada. Este problema pode ser superado pelo uso de filtros que removam as componentes indesejadas fora da região de frequências do estudo como ilustra o esquema da figura 3.10. O uso do filtro, além de eliminar informação indesejada para o estudo, garantirá que o sinal que será convertido no conversor A/D respeitará o critério de Nyquist.

Por fim, a exata quantificação dos componentes de frequência pode ser feita pela análise da SFTD compacta das equações 3.47 e 3.48 de onde se

pode observar que a frequência angular normalizada

$$w_k = \frac{2\pi}{N}k$$

está associada a intensidade  $c_k$ . Um gráfico  $c_k \times f_k$ , em que

$$f_k = \frac{1}{NT_s}k$$

é a frequência em hertz associada a  $w_k$ , fornece graficamente a relação entre frequência das componentes e suas intensidades e é uma boa definição do espectro (de amplitude) de Fourier de um sinal. A construção e interpretação deste gráfico é o grande objetivo do curso.

Empregando o Python, o código 3.10 mostra como pode ser feito o gráfico do espectro considerando dado o vetor `c` dos coeficientes da SFTD compacta calculada na código 3.9 e que o módulo Pyplot do Matplotlib foi importado como `plt`.

```
1 f = 1/(N*Ts) * arange(int(N/2) + 1)
2 plt.plot(f, c)
3 plt.show()
```

Código 3.10: Apresentação gráfico do espectro dados os coeficientes  $c_k$ .

Com os códigos para cálculo das equações de síntese e análise sugeridos na seção 3.4.6 e este último código, consideramos concluídas as ferramentas computacionais necessárias para realização da análise de espectro no nível do Ensino Médio. O código 3.11 apresenta o que se espera obter em um código curto de apenas 34 linhas para análise de dois áudios de uma flauta irlandesa soando as notas ré (D) e sol (G). As três primeiras linhas apenas importam os módulos empregados, sendo o NumPy para uso das funções trigonométricas e matrizes, o Matplotlib para elaborar o gráfico e o Soundfile para leitura do áudio como uma matriz. As linhas que se seguem até a 11 apenas carregam o áudio e extraem as suas informações de período de amostragem e limitam o estudo a um total de  $N = 5000$  amostras. As linhas de 12 a 26 são uma

cópia dos códigos 3.9 e 3.8 que realizam o cálculo dos coeficientes de Fourier, e, portanto, a análise do espectro.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import soundfile
4  x1, fs1 = soundfile.read("flautaD.wav")
5  x2, fs2 = soundfile.read("flautaG.wav")
6  Ts1 = 1/fs1
7  Ts2 = 1/fs2
8  N = 5000
9  k = arange(int(N/2)+1)
10 x1 = x1[0:N]
11 x2 = x2[0:N]
12 w0 = 2*pi/N
13 i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
14 j = reshape(arange(N),(1,N))
15 matrizIJ = i@j
16 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
17 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
18 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
19 if N%2==0:
20     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
21 a1 = Ca@x1
22 b1 = Sa@x1
23 c1 = sqrt(a1**2+b1**2)
24 a2 = Ca@x2
25 b2 = Sa@x2
26 c2 = sqrt(a2**2+b2**2)
27 f1 = 1/(N*Ts1)*k
28 f2 = 1/(N*Ts2)*k
29 plt.subplot(2,1,1)
30 plt.plot(f1,c1)
31 plt.subplot(2,1,2)
32 plt.plot(f1[:int(N/5)],c1[:int(N/5)])
33 plt.plot(f2[:int(N/5)],c2[:int(N/5)])
34 plt.show()

```

Código 3.11: Análise do espectro de Fourier de dois áudios de uma flauta irlandesa.

As linhas restantes do código 3.11 apenas estabelecem os eixos da frequência em hertz e plotam dois gráficos mostrados na figura 3.11. A identificação dos eixos foi adicionada por meio de edição posterior por simplificação, mas poderia ser adicionado ao código. O eixo horizontal em ambos os gráficos

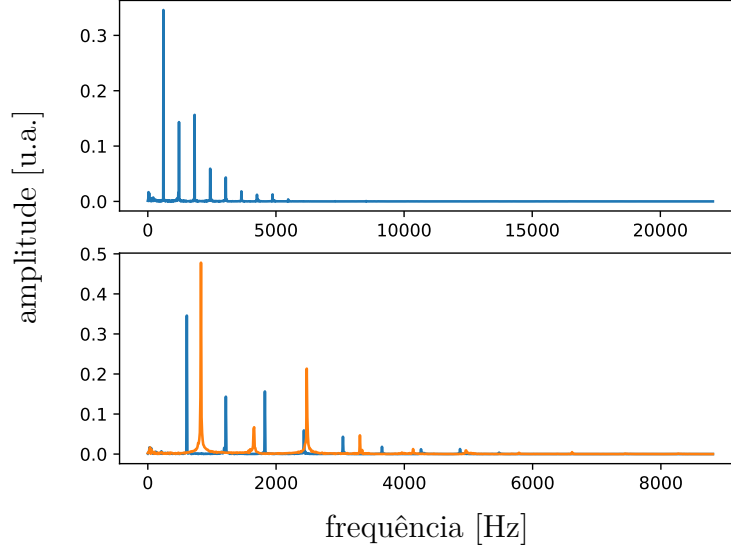


Figura 3.11: Espectros de Fourier de áudios de flauta irlandesa obtidos pelo código 3.11.

é a frequência em hertz obtida de  $f_k$ . O vertical é a intensidade dos coeficientes  $c_k$  obtidos na frequência  $f_k$  correspondente. Embora traçado em linha contínua por haver grande quantidade de pontos (2500 no primeiro e 1000 no segundo), temos conhecimento apenas de alguns valores discretos de frequência e sua intensidade correspondente.

No primeiro gráfico (superior) da figura 3.11, o espectro completo é exibido para o primeiro áudio, onde se pode observar até a frequência máxima de

$$\frac{f_s}{2} = \frac{44100}{2} \text{ Hz} = 22050 \text{ Hz},$$

pois o áudio utiliza a frequência de amostragem padrão de 44100 Hz. Ficam muito bem definidos os picos de intensidades em múltiplos inteiros de frequência fundamental  $f_0 \approx 608 \text{ Hz}$  emitida pela flauta quando soando a nota ré, de acordo com a expectativa da Física da ressonância em um tubo com ambas as extremidades abertas. Fora das regiões em que se tem as frequências dos harmônicos, as intensidades das componentes é praticamente nula.



O segundo gráfico sobrepõe os espectros devido a ambos os áudios, sendo o da nota sol (G) acrescentado em laranja, e destaca apenas as frequências mais baixas onde há harmônicos mais relevantes até a frequência aproximada de 8820 Hz. O mesmo fenômeno de ressonância no tubo da flauta é observado em ambos os traçados, mas para a nota sol temos uma frequência fundamental de aproximadamente 829 Hz<sup>1</sup>.

O código 3.12 é posposto ao código 3.11 e recupera o sinal **x1** no sinal **x1rec** a partir da equação de síntese matricial implementada no código 3.4. Ao fim da recuperação de **x1**, comparamos ambos pela diferença entre o sinal original e o recuperado e apresentamos o gráfico desta diferença que reproduzimos na figura 3.12. O algoritmo ainda indica o desvio absoluto máximo de  $2,9581892491137296 \times 10^{-13}$  e um desvio médio de  $5,816073594955285 \times 10^{-14}$  entre as amostras originais e a recuperada. Um desvio próximo da 14<sup>a</sup> casa decimal, neste caso, é compatível com a precisão de ponto flutuante de dupla precisão, ou seja, a diferença entre o sinal original e recuperado é praticamente nula.

```

1 i = reshape( arange(N) ,(N,1) )
2 j = reshape( arange( int(N/2)+1) ,(1, int(N/2)+1))
3 matrizIJ = i@j
4 Cs = cos(w0*matrizIJ)
5 Ss = sin(w0*matrizIJ)
6 x1rec = Cs@a1 + Ss@b1
7 plt.plot(x1rec-x1)
8 plt.show()
9 print("Máximo desvio:",max(abs(x1rec-x1)))
10 print("Desvio médio:",mean(abs(x1rec-x1)))

```

Código 3.12: Recuperação do sinal **x1** do código 3.11 a partir de seus coeficientes de Fourier.

Um último conceito associado à análise de espectro de Fourier é o de espectro de fase que complementa o espectro de amplitudes e dado pela relação  $\theta_k \times f_k$  ou  $\phi_k \times f_k$  entre a defasagem e a frequência de cada componente

---

<sup>1</sup>Para uma afinação padrão em que a nota lá está em 440 Hz, a flauta empregada encontra-se desafinada emitindo frequências acima das esperadas.

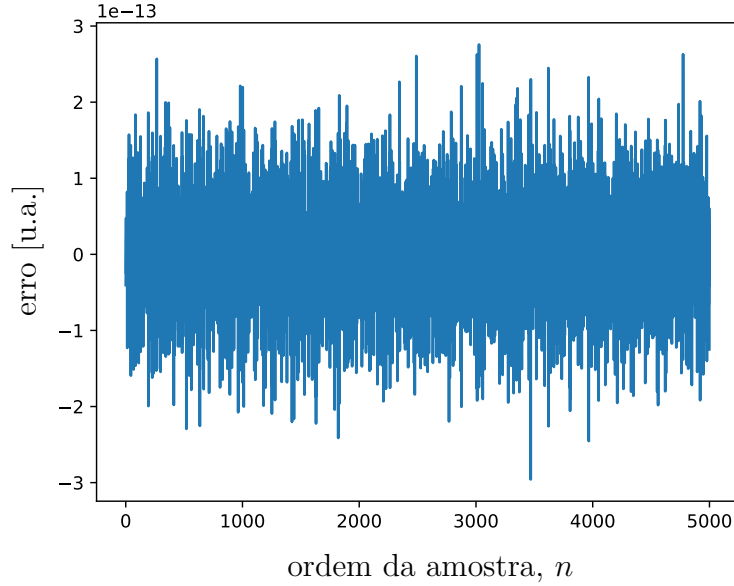


Figura 3.12: Diferença entre `x1rec` e `x1` para cada uma das 5000 amostras.

da SFTD compacta. Os espectros de amplitude e fase, juntos, descrevem completamente um sinal pois ilustram todos os valores de  $c_k$  e  $\phi_k$  ou  $\theta_k$  que, como vimos na definição da SFTD e da SFTD compacta, são suficientes para obter  $x[n]$ .

De forma resumida, as noções de sinais e de sua banda de frequências, o emprego do conversor A/D e de possível filtragem para limitação da banda da gradeza às frequências sob estudo, e a definição do espectro como a relação  $f_k \times c_k$ , são conceitos e questões tecnológicas suficientes para empregar dados reais, principalmente de áudio, no estudo do espectro de Fourier de sinais, como mostramos por meio do código 3.11.

### 3.6 Construção de uma sequência didática para obtenção da série de Fourier de tempo discreto para Ensino Médio

Conseguimos obter na equação 3.25 e nas equações de 3.32 a 3.37 expressões que empregam Matemática ao nível de Ensino Médio para a síntese e análise da SFTD. Quando nós as obtivemos, porém, seguimos um caminho em que consideramos dadas a série e as equações de análise empregando coeficientes complexos e componentes de frequência exponenciais complexas e tomamos como fonte dos desenvolvimentos a literatura disponível para o nível superior. Ora, o emprego e os desenvolvimentos realizados pressupõem o conhecimento de resultados que não estão disponíveis no nível do Ensino Médio, principalmente a relação de Euler,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta,$$

cujas demonstrações exigem cálculo diferencial.

Desta forma, o conhecimento de nível superior não pode ser considerado como dado, restando a adaptação, também, de uma sequência na qual se derive a equação para a SFTD a partir de outras premissas. Nos materiais didáticos dos apêndices A e B demonstramos que as equações 3.32 a 3.37 podem ser feitas:

- Realizando o somatório para  $n$  de 0 até  $N - 1$  em ambos os membros da equação 3.25 para obter  $a_0$ ;
- Multiplicando ambos os membros da equação 3.25 pelo  $\cos(\frac{2\pi}{N}k'n)$  e realizando o somatório para  $n$  de 0 até  $N - 1$ , também em ambos os membros, para obter  $a_{k'}$ ; e,
- Multiplicando ambos os membros da equação 3.25 pelo  $\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{N}k'n)$  e realizando o somatório para  $n$  de 0 até  $N - 1$ , também em ambos os membros, para obter  $b_{k'}$ .

Tabela 3.5: Propriedades empregadas na demonstração das equações de 3.32 a 3.37.

Formulação
<p>Somatório de constante</p> $\sum_{k=a}^b C = C(b - a + 1)$
<p>Somatório de uma soma</p> $\sum_{k=a}^b [a_k + b_k] = \sum_{k=a}^b a_k + \sum_{k=a}^b b_k$
<p>Somatório de termo multiplicado por constante</p> $\sum_{k=a}^b C a_k = C \sum_{k=a}^b a_k$
<p>Comutação de somatório duplo</p> $\sum_{i=a}^b \sum_{j=c}^d a_{i,j} = \sum_{j=c}^d \sum_{i=a}^b a_{i,j}$
<p>Produto de cossenos</p> $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
<p>Produto de senos</p> $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
<p>Produto de cosseno por seno</p> $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

O desenvolvimento também exige apenas o emprego de propriedades e identidades do nível do Ensino Médio, em especial as propriedades trigonométricas e de somatório listadas na tabela 3.5.

O único resultado que não está expresso tipicamente em textos do nível do Ensino Médio e que também é necessário para demonstrar as equações de

3.32 a 3.37, é o das relações

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & 1 \leq k \leq N-1 \\ N, & k = N, N \text{ par} \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = 0$$

para  $0 \leq k \leq N$ . Apesar disso, empregando a geometria do ciclo trigonométrico e simetria, estas expressões são fáceis de demonstrar. Isto ocorre pois o argumento das funções trigonométricas no somatório são sempre  $N$  arcos múltiplos inteiros do arco  $\frac{2\pi}{N}k$ , de sorte que para grande parte dos valores de  $k$ , os pontos de onde se observa o cosseno e seno (abscissa e ordenada) são simétricos radialmente sobre o ciclo e o somatório dos  $N$  termos é nulo. Eles sempre se distribuem sobre os vértices de um polígono regular de  $N/\text{mdc}(N,k)$  lados. Isto não ocorre apenas para  $k = 0$  e  $k = N$ , caso em que o arco  $\frac{2\pi}{N}k$  é sempre congruente com o arco que mede 0 radianos, de cosseno unitário, e o somatório dos  $N$  termos unitários resulta em  $N$ .

### 3.6.1 Análise de prerrequisitos para uso da SFTD no Ensino Médio

Desta forma, observamos pela análise das equações 3.25, de 3.32 a 3.37, 3.38, 3.39, 3.43, 3.47, 3.48, pelas propriedades da tabela 3.5 e da equação 3.56, que os seguintes tópicos são prerrequisitos primários para o curso:

- funções e identidades trigonométricas;
- somatório e suas propriedades (em especial as listadas na tabela 3.5);
- matrizes e as operações de produtos por constante, soma e produto de matrizes; e,

- emprego de matrizes (arrays) e comandos de controle de fluxo em programação para realização dos cálculos.

Secundariamente, usamos a simetria do ciclo trigonométrico e a SFTD compacta tem como argumento em seu cosseno um termo identificável com a posição num movimento circular uniforme e cada parcela desta série coincide com uma equação da posição no movimento harmônico simples. Com isso, é importante associar as funções trigonométricas à projeção de um ponto sobre o ciclo trigonométrico. Por outro lado, nossas aplicações, mesmo as que tenham maior relação com questões tecnológicas, estão fortemente conectadas a ocorrência de fenômenos ondulatórios, de sorte que o domínio dos tópicos de ondas e acústica do nível do Ensino Médio é fundamental para o sucesso no desenvolvimento dos problemas do apêndice C. Devemos, com isso, acrescentar os seguintes tópicos como prerequisites:

- movimento circular uniforme;
- movimento harmônico simples; e
- ondas e acústica.

Estes prerequisites estão ilustrados de forma esquemática na figura 3.13 em blocos escritos com fonte direita. Devido ao caráter interdisciplinar da empreitada, destacamos as regiões que acreditamos terem maior aderência aos prerequisites como estando nas disciplinas de Matemática (vermelho), Física (azul) e Computação/Programação (amarelo). Estamos considerando que se trate de um curso em que um mínimo de conhecimento de Programação é garantido ainda no nível médio, o que é o caso de nossa aplicação específica, realizada no Colégio Naval. Dentre os tópicos do Ensino Médio no esquema, o único que pusemos mas ainda não tratamos em detalhe é o emprego de números complexos que discutiremos na seção 3.8.



### 3.6.2 Resumo de tópicos relevantes para análise de espectro de Fourier

Os tópicos que completam nossa aplicação estão em grande parte numa “disciplina” inteiramente nova no esquema da figura 3.13, que identificamos como engenharia/tecnologia (verde). Todos os tópicos do curso que não são tópicos do Ensino Médio foram grafados em itálico nos blocos e são os tópicos que exploramos nas seções 3.3, 3.4 e 3.5 e englobam a ideia de sinais, o cálculo da SFTD, sua representação gráfica e as aplicações específicas de análise de áudio.

### 3.6.3 Desenvolvimento do curso

Considerando a experiência da aplicação apresentada no Capítulo 4, as discussões com os docentes participantes da aplicação e a experiência compartilhada com os alunos, resumimos na tabela 3.6 a estimativa da duração das etapas do curso proposto. Nela, propusemos uma classificação para a apresentação como sendo opcional ou obrigatória. A classificação reflete a importância para o curso com o tema de “análise de Fourier em gradezas amostradas”.

Desta forma, os tópicos que comumente compõem um currículo regular do Ensino Médio, foram considerados como opcionais. É o caso daqueles associados à Matemática (itens 1, 2 e 5), a Física (itens 3 e 4) e Programação (itens 6, 7 e 8) no nível médio. Os tópicos muito avançados (como demonstrações do item 12 e uso da FFT do item 13) também foram classificados como opcionais. Neste caso, trata-se de tópico específico de análise de Fourier, mas que pode ser deixado para os alunos com um nível de interesse e maturidade em Matemática suficientes para não interferir na condução do curso.

Os temas inéditos e que dificilmente figurariam em um currículo típico do Ensino Médio foram considerados como obrigatórios para o desenvolvimento do curso, o que é o caso dos itens 9, 10 e 11. Como motivação final e pelo amplo interesse demonstrado pelos alunos e professores participantes, a resolução dos problemas finais do item 14 também figura como tópico obrigatório.



Tabela 3.6: Sugestão de desenvolvimento do curso

Item	Aula	CH Estimada [hora-aula]	
		Opcional	Obrigatória
1	Revisão de somatório	1	-
2	Revisão de funções trigonométricas	2	-
3	Revisão de movimento circular uniforme	1	-
4	Revisão de ondas e acústica	3	-
5	Revisão de matrizes	1	-
6	Comandos de controle de fluxo no Python	4	-
7	Funções matemáticas no Python com o módulo NumPy	4	-
8	Gráficos no Python com o módulo Matplotlib	4	-
9	Noções de Amostragem	-	4
10	Noções de espectro	-	2
11	Série de Fourier de Tempo Discreto	-	6
12	Demonstrações da SFTD	2	-
13	Espectro por FFT	2	-
14	Projetos finais	-	20
Total		24	32

No caso de nossa aplicação, as revisões foram realizadas e, mesmo a Programação sendo competência curricular no CN e na EN, a linguagem empregada não é o Python. Isto implicou na necessidade de apresentação desta linguagem, permitindo a devida familiarização antes do uso da mesma como ferramenta para o cálculo e apresentação do espectro.

## 3.7 Definição de problemas para aplicação

Como proposta metodológica, vamos direcionar a aplicação à solução de alguns problemas ou pequenos projetos resumidos no material instrucional do apêndice C. Listamos algumas características dos problemas na tabela 3.7. Ela ajuda a explicar a escolha dos problemas. Tentamos seguir um crescente na complexidade da solução e dos conceitos envolvidos, partindo daqueles que são mais familiares no nível do Ensino Médio para aqueles mais propriamente associados a tecnologia e engenharia. As soluções e sugestões para resolução destes problemas estão detalhados no material instrucional do apêndice D.

### 3.7.1 Problemas direcionados à SFTD como instrumentação na medida de frequências

Nos primeiros problemas, o objetivo principal é familiarizar o aluno com a SFTD como instrumento de medida de frequência, explorando fenômenos periódicos, efeito Doppler e altura das ondas sonoras. Os quatro primeiros problemas, por exemplo, se resumem a estas questões e são fortemente influenciados por propostas como a de Souza [48]. A grande diferença entre estes problemas se encontra no tema e na área de aplicação, mas as competências gerais para solução são as mesmas. Ela se inicia com a obtenção das amostras, e segue para a seleção de trechos em que os fenômenos de interesse se desenvolvem e estão aproximadamente isolados. Neles, a análise do espectro e realização das medidas das frequências estão melhor associadas ao fenômeno, possibilitando tirar conclusões em direção à solução dos problemas. Sugerimos o uso do Audacity [46] para os cortes de trechos dos áudios muito extensos associado aos scripts em Python para análise como ferramentas suficientes para o estudo.

O problema de identificação de dígitos em *dual-tone* já é o primeiro associado a questões tecnológicas, em particular ao processo de transmissão numérica por linhas de áudio telefônicas. Embora o problema de identificar os tons seja relacionado com a mera medida de frequências, a solicitação da proposição de uma forma de automatizar a identificação pode demandar o

Tabela 3.7: Lista dos problemas para aplicação e suas características.

Problema	Competência	Conteúdo
Quão rápido batem as asas	Medida de frequência	Instrumentação
Estimativa de velocidade na F1	Medida de frequência	Instrumentação e efeito Doppler
Velocidade do chute ao gol	Medida de frequência	Instrumentação e efeito Doppler
Identificação da altura de som monofônico	Medida de frequência	Escala temperada e ondas periódicas
Identificação de dígitos no <i>dual-tone</i>	Medida de frequência	Codificação eletrônica
Pêndulo, ângulo de partida e MHS	Medida de frequência e simulação	Modelagem de sistemas dinâmicos e MHS
Comportamento massa-mola com 2 graus de liberdade	Medida de frequência e simulação	Modelagem de sistemas dinâmicos e mecânica clássica
Filtragem da voz	Filtragem no domínio da frequência	Processamento digital de sinais
Flauta sintética	Filtragem no domínio da frequência	Síntese de áudio digital
Reconhecimento de altura ( <i>pitch</i> ) automático	Filtragem no domínio da frequência	Escala temperada e processamento digital de sinais
Transmissão simultânea empregando AM	Análise no domínio da frequência	Modulação AM
Separação de sinais AM	Filtragem no domínio da frequência	Modelagem de telecomunicações
Demodulação AM	Análise no domínio da frequência	Demodulação AM
Amortecedor massa-mola com atrito viscoso	Análise no domínio da frequência e simulação	Modelagem de sistemas dinâmicos, resposta em frequência e resposta ao impulso

uso de recursos de lógica adicionais. Por esta razão, o docente pode realizar as medidas dos valores codificados em *dual-tone* e concluir a automatização deste problema mais adiante, quando os alunos estiverem mais maduros com a lógica da programação e até podendo empregar filtros para eventualmente facilitar a solução.

Seguimos com dois problemas de dinâmica longe do trivial para solução no Ensino Médio. O primeiro, associado ao pêndulo, devido a aproximação

$$\text{sen } \theta \approx \theta \quad (3.57)$$

tipicamente feita para se obter um MHS no movimento do pêndulo com frequência fundamental de oscilação independente do ângulo inicial. Ambas as características só são observadas enquanto a aproximação da equação 3.57 for verdadeira, o que só acontece para  $\theta$  pequeno. A medida da frequência fundamental da oscilação é um problema de instrumentação para a SFTD, enquanto que a oscilação não-harmônica pode ser vista na SFTD pelo surgimento de harmônicos de ordem maior. Propomos a simulação do movimento do pêndulo pelo estudo aproximado de amostras de sua posição tal como já documentado por Sousa [49]. Em nossa notação, o menor intervalo de tempo entre amostras é o período de amostragem  $T_s$ , de modo que a velocidade instantânea pode ser aproximada por

$$v[n+1] \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[n+1] - x[n]}{T_s}. \quad (3.58)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a aceleração instantânea pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} a[n+1] &\approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v[n+1] - v[n]}{T_s} = \frac{\frac{x[n+1]-x[n]}{T_s} - \frac{x[n]-x[n-1]}{T_s}}{T_s} \\ a[n+1] &\approx \frac{x[n+1] - 2x[n] + x[n-1]}{T_s^2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Com algumas amostras iniciais da posição  $x[n]$ , pode-se obter equações recursivas para o cálculo das posições sucessivas empregando a Física do sistema e

as equações 3.58 e 3.59, o que possibilita o estudo tanto do pêndulo como do sistema de duas massas acopladas por molas. A formulação para o pêndulo é mais simples e tem algumas soluções aproximadas propostas por Beléndez et al. [51] e Quirino [50], a solução completa para o sistema de duas massas acopladas com dois graus de liberdade é discutido em livros de vibrações [52], permitindo a verificação do estudo realizados com estes problemas.

### 3.7.2 Problemas orientados ao uso de filtros no domínio da frequência

Os problemas que se seguem são todos mais associados a questões de tecnologia e engenharia. Nos três primeiros dentre eles ainda tratamos de questões mais básicas como uso de filtros e síntese e análise associados à música. A filtragem de voz tem o objetivo de familiarizar os alunos a operarem sobre os componentes de frequência no domínio da frequência. Neste nível, sugerimos, apenas, a alteração das intensidades dos coeficientes por um artifício que podemos designar de máscara. Esse processo é ilustrado na figura 3.14. O espectro  $Y(f)$  do sinal filtrado é obtido a partir do espectro  $X(f)$  pela operação

$$Y(f) = X(f)H(f).$$

Este processo é similar ao efeito da resposta em frequência  $H(f)$  de um sistema sobre a entrada  $X(f)$  para obter a saída  $Y(f)$ .

O perfil da máscara pode ser escolhido arbitrariamente nesta metodologia de trabalho no domínio da frequência. Ela deve ser montada considerando que valores relativamente altos em uma região de frequências de  $H(f)$  acentuarão as respectivas frequências com relação àquelas em que  $H(f)$  tem valores menores. No exemplo da figura 3.14, mostramos a filtragem passa-baixas, ou seja, as baixas frequências passam e as altas frequências são filtradas. Para tal, nas frequências abaixo de  $f_c$ , que designamos frequência de corte, fizemos  $H(f) \approx 1$ , enquanto que para frequências acima de  $f_c$ , fizemos  $H(f) \approx 0$ . Próximo de  $f_c$  há uma transição suave. Desta forma, para frequências baixas  $Y(f) \approx X(f)$  e para frequências altas  $Y(f) \approx 0$ , ou seja, os componentes de

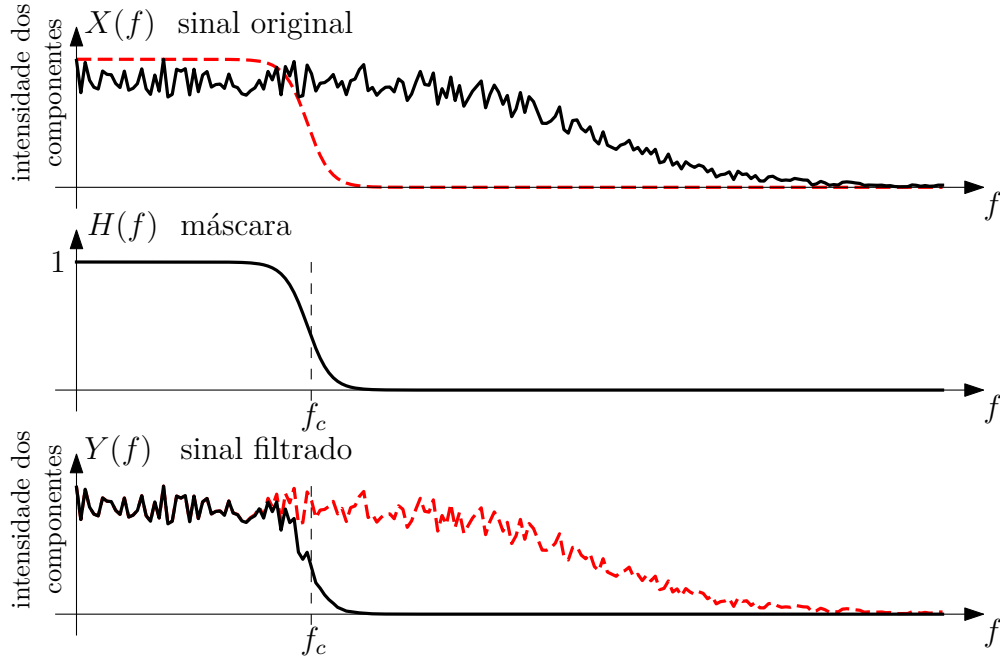


Figura 3.14: Aplicação da máscara do filtro sobre o sinal original.

alta frequência são atenuados enquanto que os de baixa passam inalterados pelo processo de filtragem.

Para o nível médio, propomos perfis de filtragem sigmóides

$$H(f) = \frac{1}{1 + e^{\alpha(f-f_c)}} \quad (3.60)$$

para filtragem passa-baixas e

$$H(f) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(f-f_c)}} \quad (3.61)$$

para passa-altas. O perfil

$$H(f) = e^{-\alpha|f-f_0|} \quad (3.62)$$

é estreito, unitário em  $f_0$ , se aproxima de 0 por um arco exponencial ao se afastar de  $f_0$  e é empregado para uma filtragem muito seletiva de uma frequência próxima de  $f_0$ . Em todos os perfis de filtro que sugerimos, o parâ-

metro  $\alpha$  diz respeito à velocidade da transição. Valores altos de  $\alpha$  significam uma transição abrupta enquanto pequenos valores de  $\alpha$  fazem transições mais suaves.

Seguem-se aos problemas de áudio, três problemas associados à transmissão AM que são discutidos em textos introdutórios de comunicações, pois se trata da mais antiga técnica de transmissão no meio eletromagnético [31, 53]. Sendo um problema da área de tecnologia e engenharia, instruções detalhadas são dadas para que se obtenham os resultados desejados. Como efeito, se observa o deslocamento do espectro na frequência.

### **3.7.3 Problema orientado a noções de resposta em frequência e resposta ao impulso**

O último problema é o que trata de um tópicos mais avançado na engenharia – a resposta em frequência ou ao impulso. Já definimos esta medida na seção 2.3.1 como a razão entre a intensidade da entrada com relação a saída. Sugerimos a simulação de uma excitação de um sistema massa-mola com atrito viscoso, resultando em um sistema de 2ª ordem, por uma força senoidal e indicamos que a resposta será, também, senoidal e solicitamos que sejam registradas as razões entre a amplitude da saída e da entrada após a acomodação do sistema.

Solicitamos a seguir que o sistema seja simulado com uma entrada do tipo impulso e que seja levantado o espectro da saída quando o sistema é estimulado pelo impulso. Verifica-se que o espectro da resposta ao impulso é idêntica à resposta em frequência do sistema, resultado que é amplamente empregado em análise de sistemas lineares e provado desde as disciplinas de análise de circuitos até as de processamento de sinais em sistemas lineares.

Trata-se de um resultado avançado e que não queremos que seja detalhadamente demonstrado e trabalhado. Esperamos apenas que o resultado cause espanto e desperte curiosidade, mostrando que há ainda uma grande quantidade de fenômenos e interpretações a serem exploradas quando se emprega o domínio da frequência.

Este último conceito pode ainda ser empregado para mostrar o surgimento

natural em sistemas físicos do fenômeno da filtragem e ressonância, uma vez que a razão entre as intensidade da entrada e da saída podem ser identificadas aproximadamente com o  $H(f)$  que sugerimos empregar como máscara de filtro nos exercícios com filtragem.

### 3.8 Uso e interpretação da transformada rápida de Fourier (FFT) no Ensino Médio

Com certos cuidados, é possível trabalhar os problemas propostos apenas empregando as formulações de somatório implementados com iterações ou matrizes que sugerimos na seção 3.4.6.

O uso destes recursos mais simples, porém, tem um custo. As implementações com iterações costumam ser ineficientes em termos de processamento, tornando-se excessivamente lentas quando a quantidade de amostras  $N$  é em torno de alguns milhares de amostras. Já as operações matriciais são especialmente otimizadas nos computadores contemporâneos, principalmente aqueles com processamento paralelo em muitos núcleos, e poderiam ser ainda mais aceleradas se fossem empregados artifícios para delegar as operações matriciais para a placa gráfica. O NumPy, porém, emprega como padrão números com ponto flutuante de dupla precisão que ocupam 64 bits ou 8 bytes cada. As matrizes  $\mathbf{C}_a$  e  $\mathbf{S}_a$  de análise, tem, juntas, aproximadamente  $N^2$  elementos. Isto significa que a memória empregada apenas para armazenar estas matrizes é  $8N^2$  bytes. A ordem da memória principal dos computadores atuais é de gibibytes ou  $2^{30}$  bytes. Isto significa que se  $N$  for da ordem de dezenas de milhares de amostra as matrizes já ocuparão um espaço proibitivo na memória. Ocorre que um áudio com amostragem padrão de 44100 Hz tem esta ordem de amostras em um trecho que não chega a totalizar um segundo, o que pode impedir o cálculo pela formulação matricial.

Uma solução para estes problemas é empregar os algoritmos que otimizam o cálculo dos coeficientes, ou dos termos da transformada. Eles são conhecidos genericamente como transformadas rápidas de Fourier e implementam as transformadas de Fourier discretas (TFD). Estão disponíveis em biblio-



tecas matemáticas em linguagens de programação populares e identificadas pela sigla FFT de *fast Fourier transform*, transformada rápida de Fourier no inglês. Há, porém, uma pequena diferença entre a série de Fourier de tempo discreto descrita pela equação 3.9 e a formulação chamada transformada. Na série, estuda-se o sinal como composto por uma ponderação de exponenciais complexas e o cálculo dos coeficientes, enquanto que na transformada os coeficientes são interpretados como uma nova entidade independente. Há neste último caso uma relação entre o sinal  $x[n]$  do domínio da variável  $n$  e a sua transformada  $X[k]$  existente no domínio da variável  $k$ . Uma das formulações desta relação é dada pelo par de equações

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \text{ e} \quad (3.63)$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (3.64)$$

A primeira é conhecida como transformada de Fourier discreta ou equação de síntese e a segunda como transformada de Fourier discreta inversa ou equação de análise. Ambas as variáveis são compostas de  $N$  amostras com  $0 \leq n \leq N-1$  e  $0 \leq k \leq N-1$ . Podemos observar na documentação [54] que as formulações da transformada rápida de Fourier implementada no NymPy como `numpy.fft.fft`, por exemplo, coincidem exatamente com a dada pelas equações 3.63 e 3.64.

Comparando as equações 3.63 com 3.9 e 3.64 com 3.22, vemos que ambas são equivalentes quando

$$C_k = \frac{1}{N} X[k]. \quad (3.65)$$

e considerando que o conjunto  $I_N = I_{N0}$  definido na equação 3.3. Isto significa que podemos achar uma relação entre os termos  $X[k]$  da TFD e os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  ou o coeficiente  $c_k$  e a fase  $\phi_k$  da SFTD, com a vantagem de que o cálculo para obter  $X[k]$  é otimizado tanto em termos de velocidade como de memória.

Pela manipulação das equações 3.14, 3.26 a 3.31, 3.46 e 3.65 chegamos a

$$a_k = \frac{2}{N} \operatorname{Re}(X[k]), \quad k \neq 0 \text{ e } k \neq N/2 \quad (3.66)$$

$$b_k = -\frac{2}{N} \operatorname{Im}(X[k]), \quad k \neq 0 \text{ e } k \neq N/2 \quad (3.67)$$

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{N} \operatorname{Re}(X[k]) = \frac{1}{N} X[k], \quad (3.68)$$

$$b_0 = 0, \quad (3.69)$$

$$a_{N/2} = c_{N/2} = \frac{1}{N} \operatorname{Re}(X[N/2]) = \frac{1}{N} X[N/2], \text{ e,} \quad (3.70)$$

$$b_{N/2} = 0, \quad (3.71)$$

$$c_k = \frac{2}{N} |X[k]| \quad k \neq 0 \text{ e } k \neq N/2, \text{ e,} \quad (3.72)$$

$$\phi_k = \arg(X[k]). \quad (3.73)$$

Com estas relações, o código 3.11 que calcula e plota o espectro de um áudio e é realizado em 34 linhas, é reproduzido em apenas 17 linhas no código 3.13 com o emprego da FFT. Na comparação, considere o fato de que no primeiro código são feitos os espectro para dois áudios e no segundo para apenas o primeiro deles. Em particular, o cálculo do espectro matricial do código 3.11 emprega das linhas 13 até 20 para preparação das matrizes da análise, totalizando 8 linhas, e o cálculo dos coeficientes  $c_k$  é feito das linhas 21 a 23, totalizando 3 linhas. Já com a FFT, como no código 3.13, a análise é feita das linhas 11 até 15, totalizando 5 linhas.

Esta operação é ainda mais simplificada no código 3.14 por meio do emprego da definição da função `analise` que recebe o sinal `x` e retorna os coeficientes de sua SFTD. Com isto, a função para cálculo dos coeficientes da SFTD é definida nas linhas de 4 até 11 empregando FFT, totalizando 8 linhas, para que a análise possa ser feita em uma única linha sempre que for necessário. No código 3.14 a análise é feita na linha 19.

O uso de funções não é tão simples para o cálculo matricial e muito lento para o cálculo por iterações. No caso matricial, a necessidade de preparação das matrizes de análise é um dificultante, principalmente se o valor de  $N$  mudar em um programa de análise de espectro mais elaborado.

```
1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import soundfile
4 x, fs = soundfile.read("flautaD.wav")
5 Ts = 1/fs
6 N = 5000
7 k = arange(int(N/2)+1)
8 x = x[0:N]
9 w0 = 2*pi/N
10 f = 1/(N*Ts)*k
11 X = fft.fft(x)
12 c = 2*abs(X[k])/N
13 c[0] = 0.5*c[0]
14 if N%2==0:
15     c[int(N/2)] = 0.5*c[int(N/2)]
16 plt.plot(f,c)
17 plt.show()
```

Código 3.13: Análise do espectro de Fourier de um dos áudios do código 3.11 empregando FFT.

```
1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import soundfile
4 def analise(x):
5     N = len(x)
6     X = fft.fft(x)
7     c = 2*abs(X[0:int(N/2)+1])/N
8     c[0] = 0.5*c[0]
9     if N%2==0:
10         c[int(N/2)] = 0.5*c[int(N/2)]
11     return c
12 x, fs = soundfile.read("flautaD.wav")
13 Ts = 1/fs
14 N = 5000
15 k = arange(int(N/2)+1)
16 x = x[0:N]
17 w0 = 2*pi/N
18 f = 1/(N*Ts)*k
19 c = analise(x)
20 plt.plot(f,c)
21 plt.show()
```

Código 3.14: Simplificação do código 3.13 empregando uma função definida pelo usuário.

## Capítulo 4

### Aplicação

Organizamos no 3º ano do Colégio Naval e no 1º ano da Escola Naval grupos de estudo para aplicar o curso considerando o planejamento descrito na seção 3.6.3. Os grupos contaram com, respectivamente, 8 e 9 alunos destas instituições.

Embora tentativas tenham sido feitas para realizar o curso em 2022 e em 2023, os grupos de estudo se desenvolveram na forma de atividade extracurricular, o que diminui a disponibilidade dos alunos. Nestas tentativas iniciais, com a finalidade de facilitar o trabalho e agilizar as interações, os alunos demandaram videoaulas para o acompanhamento das atividades. As videoaulas desenvolvidas estão listadas no apêndice B.

Com as videoaulas disponíveis, no ano de 2024, as reuniões dos grupos se iniciaram em 5 de março na EN e em 14 de março no CN. A maior disponibilidade de material e o início ainda no segundo mês letivo possibilitou a condução dos trabalhos a contento neste ano. Os encontros dos grupos de estudo ocorreram em salas reservadas das respectivas instituições em horário livre, acompanhando a disponibilidade dos alunos. Não foram marcadas atividades nas semanas de avaliações ou nas que as antecedia.

O acompanhamento das atividades no CN foi encerrado em 15 de agosto, após a conclusão do segundo problema do apêndice C (Estimativa de velocidade na F1). As atividades da EN foram encerradas em 21 de outubro após a conclusão do sexto problema do mesmo apêndice (Pêndulo, ângulo de

partida e MHS).

Apesar do término prematuro antes da realização de todos os projetos propostos, a aplicação foi suficiente para observar a validade do curso nesta fase e com os objetivos propostos conforme observaremos na seção 4.7.

As observações e discussões descritos neste capítulo foram amplamente debatidas com os docentes do CN participantes. Para tal, foram-lhes apresentadas versões preliminares do texto do capítulo para garantir a concordância e de modo que o texto pudesse representar com fidelidade as impressões da aplicação em ambas as instituições, o Colégio Naval e a Escola Naval.

## 4.1 Treinamento de docentes e acompanhamento das atividades

As tratativas com os docentes do Colégio Naval foram iniciadas em setembro de 2021. As primeiras reuniões para treinamento e qualificação foram realizadas em maio de 2022 por meio de videoconferência. Nas reuniões, foram discutidos os objetivos do trabalho e apresentados os materiais instrucionais e a forma de apresentação da análise de Fourier nesta fase experimental. A decisão pelo estabelecimento dos grupos de estudo como caminho viável para desenvolver o curso ainda em fase extracurricular foi fruto das discussões nesta fase entre o autor e os docentes do CN.

Os docentes do CN solicitaram a inclusão da aplicação da análise de espectro em tecnologias de emprego naval como uma demanda constante dos alunos. Esta demanda foi atendida em parte nos materiais dos apêndices de A a C e em parte pela descrição de exemplos específicos encaminhados diretamente aos docentes daquela instituição nas reuniões de acompanhamento de modo que os materiais elaborados como produto desta dissertação não perdessem a generalidade.

Foram necessários por volta de 6 horas de treinamento para apresentação completa dos objetivos do curso e da abordagem teórica antes do início das atividades dos grupos de estudo.

A partir destes encontros iniciais, as orientações e treinamentos se segui-

ram de modo a acompanhar os encontros do grupo de estudo. Os docentes foram orientados com relação às atividades específicas a desenvolver a cada semana seguindo aproximadamente o planejamento descrito na seção 3.6.3 durante o desenvolvimento das atividades dos grupos de estudo. Em média, para cada 4 horas de reunião do grupo de estudos, os docentes tiveram 1 hora de orientação junto ao autor, em que foram discutidos os aspectos específicos, os detalhes foram aprofundados e as dúvidas que poderiam surgir no encontro da semana foram esclarecidas.

## 4.2 Motivação dos alunos

Foi observado que as duas principais motivações dos alunos na participação no grupo de estudos foram

- o uso do Python, que já se tornou uma linguagem suficientemente popular para atrair o desejo dos alunos em dominá-la, e
- a oportunidade de antecipar aspectos das tecnologias navais com as quais esperam ter maior contato na formação superior e profissional.

Enquanto o primeiro aspecto motivacional é geral e deverá ser encontrado em qualquer instituição de ensino, o segundo mostra uma necessidade de conhecimento dos anseios profissionais em cada instituição de ensino. No Colégio Naval, como o caminho mais natural é o prosseguimento da carreira para incorporação na Marinha, esta tarefa é mais fácil. Uma escola que deseje introduzir este curso, poderá buscar motivação nos interesses de formação de seus alunos que tenham propensão aos cursos de engenharia elétrica, eletrônica, de telecomunicações e de controle e automação etc. entre os candidatos que poderão ter maior interesse no curso.

### 4.3 Emprego do computador e programação em Python

Tanto na Escola Naval como no Colégio Naval, os alunos participantes preferiram utilizar seus computadores pessoais para estudo e nas reuniões do grupo de estudo. Foram utilizados apenas o Python, seus módulos e o Audacity. Neste formato, nenhum aluno considerou relevante a “pegada” dos recursos do curso em seus computadores quando consideraram o peso da instalação dos programas necessários para o desenvolvimento das atividades.

Também não houve dificuldade em instalar e utilizar os programas. A configuração utilizada, em todos os programas, foi a padrão. Todos os alunos empregaram o sistema operacional Windows. Neste sistema operacional, o IDLE, programa que facilita o desenvolvimento e execução dos códigos em Python, compõe a instalação padrão. Não foi necessário nem recomendamos a instalação de nenhuma IDE mais avançada (como Anaconda, PyCharm etc.), sendo o Python padrão e o IDLE suficientes para o nível do curso.

Nos casos em que os alunos não tenham computadores pessoais disponíveis para uso acadêmico, é necessária a instalação e preparação dos recursos empregados em laboratório de informática previamente. Isto requer testes prévios e a verificação das políticas da administração dos computadores da escola. Também é especialmente delicado no caso do emprego de módulos do Python que deverão estar instalados antes das reuniões. Neste caso, o suporte dos técnicos da escola é fundamental para o sucesso da aplicação.

### 4.4 O que os alunos acharam da experiência

Durante as reuniões com os grupos de estudo as impressões dos alunos foram observadas com a finalidade de acompanhar o desenvolvimento dos objetivos. Destacamos

- a manutenção do interesse geral no grupo de estudos ao longo de todo o período de reuniões dos grupos;

- o bom desempenho dos alunos na interpretação das situações físicas subjacentes aos problemas propostos e ao longo dos estudos;
- a dificuldade de realizar as conversões entre linguagem matemática e a linguagem computacional; e
- a necessidade de interação com o docente intermediário em quase todas as fases do estudo.

Ao fim das atividades dos grupos, solicitamos aos alunos expressar sua opinião sobre as seguintes questões:

- Se considerou a experiência proveitosa de forma geral.
- Se indicaria o curso a outros alunos caso o curso fosse eletivo da parte diferenciada do currículo.
- Se o curso influenciou positivamente em sua forma de observar as questões interdisciplinares de Física, Matemática, Programação e tecnologia.

Dos 17 alunos participantes 7 responderam às perguntas. As respostas positivas foram unânimes. A inclinação de indicar o curso a outros alunos foi considerada um parâmetro fundamental para o futuro desenvolvimento de uma disciplina eletiva, uma vez que um curso eletivo só faz sentido se houver voluntários e os voluntários só aparecerão se a experiência for considerada positiva pelos participantes anteriores, fortalecendo uma espécie de indicação boca a boca.

Também foi unânime a observação de dificuldades no desenvolvimento do grupo de estudos no formato extracurricular, uma inconveniência inevitável nesta fase experimental que deverá ser contornada quando da eventual formalização do curso como integrante do currículo.



## 4.5 O que os docentes acharam da experiência

Os docentes consideraram excelente o tema escolhido para um curso de aprofundamento – a análise de Fourier de grandezas amostradas – já que traz aplicações reais fortemente associadas às matérias típicas do Ensino Médio. Funções trigonométricas, matrizes, números complexos, ondas e acústicas não são considerados temas simples ou fáceis de trabalhar e de expor com aplicações quando se acompanha um curso curricular típico. O tema oferece uma oportunidade de facilitar estas questões.

A integração entre as diferentes áreas do conhecimento – em especial de Programação, Física e Matemática – impõem desafios aos docentes, uma vez que são, em geral, especialistas em apenas uma destas áreas. Isto implica em uma necessidade de tempo para qualificação e familiarização com as formas de abordagem e com os problemas típicos que aparecem na SFTD e em fenômenos e tecnologias típicas que esta ferramenta auxilia a descrever.

O material instrucional escrito do apêndice A foi considerado suficiente para compreensão dos objetivos propostos tendo sido amplamente empregado como fonte de consulta durante o desenvolvimento das atividades.

Em materiais escritos é habitual encontrar temas mais densos que podem ser dominados aos poucos com a releitura e com a depuração do apresentado. Isto já não é tão fácil no formato de vídeo. Por esta razão, nas videoaulas, há um conflito difícil de resolver entre complexidade do tema, que exige tempo e detalhamento, e a dinâmica esperada em materiais desta mídia.

Enquanto o autor optou por vídeos detalhados, os docentes participantes consideraram necessários, também, videoaulas mais curtas e diretas, mesmo que isto pudesse limitar a amplitude do que é apresentado a cada vídeo. Apesar desta demanda, os docentes participantes consideraram que não é fácil a exposição em vídeo do tema do trabalho, devido a sua complexidade, nos formatos mais curtos e diretos. Isto significa que o material instrucional pode ser melhorado, ampliado ou modificado para usos posteriores, mas estas modificações exigem adaptações que precisam de estudo mais aprofundado.

Os docentes participantes também solicitaram acesso aos trechos dos có-

digos fonte para facilitar a cópia e reuso de maneira a dinamizar a condução dos encontros. Consideram que tê-los à disposição antes das aulas acelera partes consideradas mais tediosas do processo de programação e auxiliam a disponibilização de tempo na solução dos problemas e na lógica subjacente aos trechos do código.

Nesta primeira experiência, o acompanhamento do autor as atividades foi considerada indispensável pelos docentes participantes, devido às próprias dificuldades relacionadas a novidade do tema e da interdisciplinaridade que exige empregar técnicas e conteúdos que não são especialidades de suas áreas de formação. Apesar disto, consideram que em um futuro próximo a condução das aulas deste curso correrá independente do auxílio ou participação do autor.

Por fim observando o desenvolvimento da aplicação, o desempenho dos alunos foi considerado satisfatório mas suficientemente desafiador para dificultar o desenvolvimento ostensivo da proposta para além do público voluntário e preparado.

## 4.6 Dificuldades, melhorias futuras e observações

Foi observado que o trabalho com “problemas abrangentes”, tais como os propostos no apêndice C, foge do habitual para os alunos. O ensino das ciências exatas emprega exercícios que costumam enquadrar algum aspecto e exigir o desenvolvimento de um raciocínio simples e relativamente direto na sua solução.

Já os problemas propostos para o fim do curso envolvem dados reais, a necessidade de uma modelagem, e com ela, realizar considerações e aproximações. Tomemos como exemplo o problema mais simples proposto, o da estimativa da frequência do bater das asas de um beija-flor. A solução que sugerimos no apêndice D recorre ao som produzido pelo bater das asas. Para que o som possa ser empregado como fonte da estimativa da frequência do bater, é necessário uma modelagem dos fenômenos: a batida das asas agita

os gases nas proximidades das asas que se propagam na forma de som. Como o estímulo para a propagação do som é a agitação das asas, espera-se que as ondas de pressão oscilem na mesma frequência que as asas. Assim, a frequência medida no som, pode ser tomada como igual a frequência do bater das asas.

Este raciocínio é apenas a primeira parte do problema, pois agora surge o problema de medir componentes de frequência no som, o que se pode resolver com a SFTD. Por fim ainda há duas outras etapas a cumprir – isolar o fenômeno, o que pode ser feito pela segmentação de um trecho do áudio em que esteja claro o som do bater das asas e interpretar a SFTD para extrair a medida. Nesta última etapa, a SFTD deve apresentar picos de amplitude em frequências que são múltiplos inteiros da frequência fundamental, e a frequência fundamental coincide com o bater das asas.

Este encadeamento de modelagens, considerações, emprego de técnicas e interpretações é muito distinto do problema típico disponível no Ensino Médio.

Os docentes participantes e o autor observaram, porém, que ao mesmo tempo que os problemas são difíceis – e talvez a melhor palavra para descrevê-los seja desafiadores – eles são o grande diferencial do curso proposto e considerados parte indispensável de todo o trabalho.

Nos debates que se realizaram após a conclusão desta primeira aplicação, foi considerada a mudança de ritmo nas reuniões com relação ao proposto na seção 3.6.3. Uma sugestão é encurtar o tempo dedicado exclusivamente às revisões de Física e Matemática. Elas poderiam ser feitas aos poucos sob demanda a medida que fossem necessárias no desenvolvimento da SFTD ou dos problemas. O tempo economizado pode ser empregado para aprofundar os conceitos da série e de amostragem.

Uma segunda demanda é o emprego de exercícios para repetição e operacionalização da SFTD, amostragem e dos conceitos correlatos. A proposta inicial visou um curso sem os elementos tradicionais de fixação por meio de exercícios, motivo pelo qual o curso é concluído com pequenos projetos. As ideias de coeficientes de termos da série, taxa de amostragem, resolução em frequência etc. tinham sempre que ser consultados e revisados pois ainda

não eram naturais para os alunos participantes. A insistência nesses conceitos poderá agilizar a realização dos problemas finais.

## 4.7 Conclusão

Desde a concepção do trabalho, consideramos que a proposta de um curso com análise de espectro de Fourier e amostragem para o Ensino Médio não seria simples. A garantia de que apenas conhecimentos desta fase do ensino eram suficientes para introduzir com rigor estas competências foi o único suporte para a consideração da proposta.

A aplicação confirmou o caráter desafiador do curso mas mostrou, também, que alunos voluntários e bem preparados conseguem acompanhar o seu desenvolvimento com motivação. Isto reforça a premissa de que um curso desta natureza deva ser eletivo e orientado a alunos com este perfil, cumprindo a parte diversificada do currículo com a finalidade de aprofundamento.

Nossas expectativas com relação às vantagens da apresentação prematura de tópicos de tecnologia integrados com as diversas disciplinas do nível médio em um formato interdisciplinar se confirmaram pela observação da motivação dos alunos e docentes participantes. Em particular, a confirmação por parte dos docentes participantes da introdução do curso como disciplina eletiva no Colégio Naval, com previsão de início em 2026, é suficiente para validar a proposta do trabalho.

# Referências Bibliográficas

- [1] HEIDEMAN, Michael T.; JOHNSON, Don H.; BURRUS, C. Sidney. Gauss and the history of the fast fourier transform. *IEEE ASSP Magazine*, [s.l.], v. 1, n. 4, p. 14-21, out. 1984. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- [3] FEYNMAN, Richard P. *O que é uma Lei Física?* Lisboa: Gradiva, 1989
- [4] BROOKS, Harvey. Technology, Evolution, and Purpose. *Daedalus*. Massachusetts, p. 65-81. dez. 1980.
- [5] WEBSTER, John G.; NIMUNKAR, Amit J. (ed.). *Medical Instrumentation: Application and design*. 5. ed. Hoboken: Wiley, 2020.
- [6] SEDRA, Adel S. et al. *Microelectronic Circuits*. 8. ed. New York: Oxford University Press, 2020.
- [7] REZENDE, Sergio M. *Materiais e Dispositivos Eletrônicos*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- [8] FUNDAÇÃO UNIVERSITÁRIA PARA O VESTIBULAR. *Manual do Candidato FUVEST 2022*. São Paulo: [s.n.], 2022. Disponível em: <https://acervo.fuvest.br>. Acesso em: 30 jul. 2024.
- [9] MARINHA DO BRASIL. Ofício nº 10-39/2024 da Diretoria de Ensino da Marinha. Currículo do Curso de Preparação de Aspirantes.
- [10] GALILEI, Galileo. *Dialogues concerning two new sciences*. New York: The Macmillan Company, 1914. Tradução de: Henry Crew e Alfonse de Salvio.
- [11] NEWTON, Isaac. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Londres: Royal Society Press, 1686.

- [12] BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. *Física aula por aula: terminologia, óptica, ondulatória*, 2º ano. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- [13] LUZ, Antônio Máximo Ribeiro da; ÁLVARES, Beatriz Alvarenga; GUIMARÃES, Carla da Costa. *Física: contexto & aplicações, ensino médio*. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2016.
- [14] BONJORNO, José Roberto et al. *Física: terminologia, óptica, ondulatória*, 2º ano. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- [15] DOCA, Ricardo Helou; BISCUOLA, Gualter José; BÔAS, Newton Villas. *Tópicos de Física: volume 2*. 21. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.
- [16] TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. *Física para cientistas e engenheiros: vol. 1*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [17] HEWITT, P. G. *Física conceitual*. 11. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.
- [18] NILSSON, James W.; RIEDEL, Susan A. *Circuitos Elétricos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.
- [19] JOHNSON, David E.; HILBURN, John L.; JOHNSON, Johnny R. *Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1994.
- [20] ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- [21] DORF, James A.; SVOBODA, James A. *Introdction to Electric Circuits*. 9. ed. [S.l.]: Wiley, 2014.
- [22] IRWIN, J. David; NELMS, R. Mark. *Basic Engineering Circuit Analysis*. 12. ed. Hoboken: Wiley, 2021.
- [23] HAYT JUNIOR, William H.; KEMMERLY, Jack E.; PHILLIPS, Jamie D.; DURBIN, Steven M. *Engineering Circuit Analysis*. 10. ed. New York: McGraw-Hill, 2024.
- [24] BRASIL. *Indicadores de Qualidade da Educação Superior*. Brasília: INEP/MEC, 2019. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/indicadores-educacionais/indicadores-de-qualidade-da-educacao-superior>. Acesso em: 23 jun. 2024.

- [25] QUACQUARELLI SYMONDS. QS World University Rankings: QS world university rankings by subject 2024: electrical and electronic engineering. 2024. Disponível em: <https://www.topuniversities.com/university-subject-rankings/electrical-electronic-engineering>. Acesso em: 23 jun. 2024.
- [26] FOLHA DE SÃO PAULO. Ranking de cursos de graduação. 2023. Disponível em: <https://ruf.folha.uol.com.br/2023/ranking-de-cursos/engenharia-eletrica/>. Acesso em: 23 jun. 2024.
- [27] OPPENHEIM, Alan V.; WILLSKY, Alan S.; NAWAB, S. Hamid. *Sinais e Sistemas*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.
- [28] HAYKIN, Simon; VAN VEEN, Barry. *Signals and Systems*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2002.
- [29] GIROD, Bernd; RABENSTEIN, Rudolf; STENGER, Alexander. *Signals and Systems*. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
- [30] HSU, Hwei P. *Signals and Systems*. 4. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2020 (Schaum's Outline).
- [31] HAYKIN, Simon; MOHER, Michael. *Communication Systems*. 5. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- [32] HAYES, Monson H. *Theory and Problems of Digital Signal Processing*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1999. (Schaum's Outline).
- [33] LATHI, B. P.; GREEN, R. A. *Linear Systems and Signals*. 3. ed. Nova Iorque: Oxford University Press, 2018.
- [34] OLIVIER, J. C. *Linear Systems and Signals: a primer*. Norwood: Artech House, 2019.
- [35] CÂMARA DE EDUCAÇÃO SUPERIOR (CNE/CES). Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019.
- [36] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*: vol. 4. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- [37] STEWART, James. *Cálculo*: volume 1. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- [38] STEWART, James. *Cálculo*: volume 2. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

- [39] HASS, Joel; HEIL, Christopher; WEIR, Maurice D. *Thomas' Calculus: based on the original work by George B. Thomas*. 14. ed. Boston: Pearson, 2018.
- [40] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Marian Buss. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2007.
- [41] GONÇALVES, Marian Buss; FLEMMING, Diva Marília. *Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície*. 2. ed. São Paulo: Person, 2007.
- [42] SPIVAK, Michael. *Calculus*. 3. ed. Houston: Publish Or Perish, 1994.
- [43] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; MEADE, Douglas B. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 11. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2020.
- [44] KASANA, H. S. *Complex Variables: theory and applications*. 2. ed. New Delhi: Prentice-Hall Of India, 2005.
- [45] PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. *Python*. Versão 3.12.5. [Wilmington], 2024. Disponível em: <https://www.audacityteam.org/>. Acesso em: 18 ago. 2024.
- [46] AUDACITY TEAM. *Audacity*. Versão 3.6.1. [S.l], 2024. Disponível em: <https://www.python.org/>. Acesso em: 18 ago. 2024.
- [47] COOLEY, James W.; TUKEY, John W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics Of Computation*. Providence, p. 297-301. abr. 1965.
- [48] SOUZA, Anderson Ribeiro de. *Experimentos em Ondas Mecânicas*. 2011. 136 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- [49] SOUSA, Servio Tulio Lunguinho de. *Uma mecânica discreta para o ensino*. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- [50] QUIRINO, Mara Desidério. *O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude*



- inicial*. 2020. 44 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.
- [51] BELÉNDEZ, Augusto et al. Approximate expressions for the period of a simple pendulum using a Taylor series expansion. *European Journal Of Physics*. [S.l.], p. 1303-1310. jul. 2011.
- [52] RAO, Singiresu S. *Mechanical Vibrations*. 6. ed. [S.l.]: Pearson, 2018.
- [53] LATHI, B. P.; DING, Zhi. *Modern digital and analog communication systems*. 5. ed. New York: Oxford University Press, 2019.
- [54] DISCRETE Fourier Transform (numpy.fft). 2024. Disponível em: <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html>. Acesso em: 18 set. 2024.

# Apêndice A

## Material Instrucional – Apostila

Este material instrucional é constituído de uma Apostila empregada como material de suporte e referência para o curso de “Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier” proposto nesta dissertação e desenvolvido para os últimos anos do Ensino Médio. Ele é composto de revisão teórica, exercícios de Matemática, Física e Programação e pelo suporte oferecido por alguns exercícios, além da demonstração das teorias de amostragem e espectro de Fourier de sinais amostrados limitados.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier**

Gabriel Torreão Dias da Silva

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Gabriel Torreão Dias da Silva, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Orientador: Helio Salim de Amorim

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2024

# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>113</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>115</b>
1.1 Abrangência das aplicações . . . . .	116
1.1.1 Processamento de Sinais . . . . .	116
1.1.2 Telecomunicações . . . . .	117
1.1.3 Vibrações mecânicas . . . . .	117
1.1.4 Biofísica, biomedicina e engenharia biomédica . . . . .	118
<b>2 Bases matemáticas e físicas</b>	<b>119</b>
2.1 Somatórios . . . . .	119
2.1.1 Propriedades de somatórios . . . . .	121
2.2 Movimento circular uniforme . . . . .	126
2.3 Funções trigonométricas . . . . .	130
2.3.1 Círculo trigonométrico . . . . .	132
2.3.2 Funções senoidais . . . . .	134
2.3.3 Características das senoides . . . . .	136
2.3.4 Funções trigonométricas inversas . . . . .	139
2.3.5 Soma e produto de funções senoidais . . . . .	141
2.4 Matrizes . . . . .	143
2.4.1 Regularidade nos elementos de uma matriz . . . . .	144
2.4.2 Produto de matrizes . . . . .	144
<b>3 Python, iterações, somatórios e gráficos</b>	<b>149</b>
3.1 Uso do IDLE, execução de comandos e scripts . . . . .	149
3.2 Aspectos básicos da sintaxe do Python . . . . .	150
3.2.1 Atribuição – o sinal de igual . . . . .	150
3.2.2 Comentários . . . . .	151
3.2.3 Execução de comandos no Shell do IDLE . . . . .	151
3.2.4 Exibição básica – a função <code>print</code> . . . . .	152
3.2.5 Execução de um script em Python . . . . .	152
3.2.6 Strings . . . . .	152
3.2.7 Entrada de dados básica – a função <code>input</code> . . . . .	153
3.2.8 Operações matemáticas básicas, comparações e operações lógicas . . . . .	153
3.2.9 Controle de fluxo condicional – uso do <code>if</code> . . . . .	154
3.2.10 Controle de fluxo por iterações – uso do <code>while</code> e <code>for</code> . . . . .	155
3.2.11 Importando módulos . . . . .	157

3.3	Uso do Python para auxílio na matemática . . . . .	157
3.3.1	Realização de somatórios com iterações . . . . .	157
3.3.2	Módulo NumPy, funções trigonométricas e matrizes . . . .	159
3.3.3	Módulo Matplotlib e gráficos . . . . .	169
<b>4</b>	<b>Amostragem</b>	<b>177</b>
4.1	Ideia de sinais . . . . .	177
4.2	Exemplos de sistemas amostrados e de “tempo” contínuo . . . .	179
4.3	Noções de espectro de frequências . . . . .	183
4.4	Representação matemática e convenção de amostragem . . . . .	184
4.5	Efeito da amostragem em uma senoide pura . . . . .	185
4.6	Critério de Nyquist . . . . .	189
4.7	Frequência angular normalizada . . . . .	190
4.8	Incompatibilidade da banda do sinal e da frequência de amostragem	191
<b>5</b>	<b>Série de Fourier de tempo discreto</b>	<b>193</b>
5.1	Sinais periódicos e sinais limitados . . . . .	194
5.2	Funções senoidais de interesse num sinal limitado . . . . .	195
5.3	Determinação dos coeficientes $a_k$ e $b_k$ . . . . .	199
5.3.1	Demonstração das fórmulas de análise da série de Fourier de tempo discreto . . . . .	199
5.4	Forma matricial das equações de análise . . . . .	204
5.5	Série de Fourier de tempo discreto compacta . . . . .	205
5.6	Espectro de frequências de um sinal limitado . . . . .	206
<b>A</b>	<b>Respostas, sugestões e soluções</b>	<b>207</b>

# Apresentação

Caros professores,

Esta obra é parte da dissertação “Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier – um curso para o Ensino Médio”, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física do Instituto de Física da UFRJ, formulada com o objetivo de orientar a condução do trabalho das instituições de Ensino Médio em disciplina de aprofundamento para a parte diversificada de itinerário formativo de matemática e suas tecnologias ou de ciências da natureza e suas tecnologias empregando, para tal, um tópico especialmente relevante para a Matemática, a Física e amplamente utilizados com finalidades tecnológicas – a análise de Fourier. Trata-se, portanto, de um curso interdisciplinar que utilizará amplamente programação e recursos computacionais, tendo sido escolhido o Python para basear os exemplos do texto.

O curso foi projetado visando prover aprofundamento para os alunos do Colégio Naval que cursarão o Bacharelado em Ciências Navais na Escola Naval e que tenham interesse em compor os corpos da armada ou de fuzileiros navais. Este tema também é de grande interesse para alunos vocacionados a continuar seus estudos em cursos das engenharias elétrica, da computação, de telecomunicações, de automação e controle, biomédica etc. pois o curso trata de tema fundamental na análise de sistemas e no processamento de sinais como suporte às tecnologias cujos projetos dependem da análise no domínio da frequência.

Na elaboração do curso, selecionamos as aplicações de medida (instrumentação) de frequência, filtragem e análise no domínio da frequência. Consideramos os contextos de fenômenos cotidianos, experimentos físicos, música, modelagem de sistemas, processamento e síntese de sinais, e aplicações de codificação e comunicação eletrônica. Grande ênfase é dada em sinais de áudio que são facilmente manipuláveis nos computadores comerciais.

Ao fim da apostila, disponibilizamos três materiais que também podem ser empregados no desenvolvimento do curso:

- O link e a lista das videoaulas elaboradas com o conteúdo do curso;
- Os enunciados para “Projetos para Análise de Espectro”, contendo uma série de pequenos projetos para aplicação da análise de espectro; e
- As suas respectivas soluções nas “Sugestões para Solução dos Projetos para Análise de Espectro”.

Todos os materiais adicionais acompanham o documento digital da apostila, principal referência para o curso.

Tratando-se de um tema considerado avançado, recomendamos o curso para alunos com bom desempenho em Matemática, Física e Programação e com

interesses nas áreas supramencionadas sejam orientados a realizar este curso, oferecido no formato eletivo.

Maiores detalhes sobre o espectro de Fourier e o desenvolvimento deste curso podem ser encontrados na dissertação, disponibilizada no formato [digital](#) na seção de dissertações dentre as produções acadêmicas do [site](#) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da UFRJ.

# Capítulo 1

## Introdução

Quando se escuta música em um dispositivo com tela, é comum a exibição de alguma forma de imagem que acompanhe a música. Um dos efeitos visuais mais comuns acompanha a intensidade da música nas diferentes frequências que compõem o som. Em sua forma mais simples, este efeito tem a forma de um gráfico de barras do *espectro* do áudio. A figura 1.1 mostra o gráfico de barras do espectro da execução de um áudio no tocador VLC [1] para ilustrar do que estamos falando.

Nestes aplicativos tocadores de áudio estes gráficos costumam apenas distrair o ouvinte que está realmente interessado apenas em ouvir a música. Por esta razão, não há grande preocupação com relação a fidelidade entre os *componentes de frequência* da música em execução e uma medida quantitativa clara de sua intensidade, tanto é que estes gráficos quase nunca exibem as escalas de seus eixos vertical e horizontal. Se prestar bem atenção ao comportamento do gráfico ao longo das batidas e a dinâmica com a qual a execução de notas graves e agudas modifica o gráfico, o ouvinte poderá inferir que o eixo vertical é a intensidade do som e o eixo horizontal é a frequência.

Profissionais produtores musicais, que, dentre outras atividades, realizam a mixagem e masterização de gravações de áudio, utilizam o termo *cheias* como um dos qualificantes de boa mixagem. Este termo explica de forma figurada o completamento com som das várias faixas de frequências no espectro de frequências do áudio. Neste caso, é importante identificar estas frequências com alguma precisão e, caso o som ainda não esteja cheio, utilizar algum artifício como a

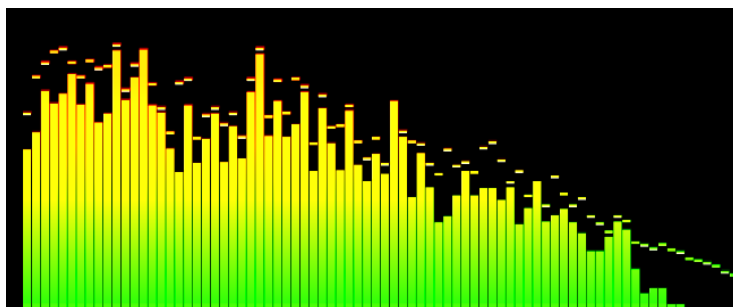


Figura 1.1: Espectro disponível em visualização do VLC [1].



gravação de sons adicionais ou a mudança da *equalização* de modo a preencher as frequências faltantes.

Este texto trata de uma ferramenta matemática – a série de Fourier de tempo discreto – que possibilita a análise detalhada e precisamente quantificada das diferentes frequências que compõem um *signal* e de algumas de suas aplicações, que, diga-se de passagem, parecem intermináveis. Quanto mais se estuda diferentes campos da ciência, mas se observa a prevalência de vibrações e fenômenos periódicos e com isso se ampliam as possibilidades da aplicação desta série. O exemplo da música e do som que utilizamos como motivação inicial para ilustrar do que vamos tratar é apenas um caso popular e simples da aplicação de análise de frequências.

## 1.1 Abrangência das aplicações

As aplicações da análise por meio de frequências se tornou de tal forma popular que ganhou um nome especial – a *análise no domínio da frequência* – e complementa a prática mais comum e básica que passa a ser chamada *análise no domínio do tempo* para diferenciá-la.

Em alguns casos, a análise no domínio da frequência é capaz de simplificar a aplicação de algumas ferramentas matemáticas. Ela pode, também, quebrar o paradigma de como os dados são registrados e interpretados pois os sinais podem deixar de ser representados como funções do tempo para serem representados como funções da frequência. Mesmo que um sinal não seja periódico, a série de Fourier de tempo discreto é capaz de reinterpretá-lo como oscilações superpostas. Em outros casos, ela consegue evidenciar e caracterizar oscilações e periodicidade típicas de uma física subjacente a fenômenos que podem até não parecer periódicos em uma visualização preliminar dos dados. Vamos trazer mais alguns exemplos da importância da análise do espectro de frequências.

### 1.1.1 Processamento de Sinais

O nome do campo amplo que estuda o as informações contidas nos sinais, que vamos trabalhar em mais detalhes no capítulo 4, é chamado de Processamento de Sinais. Quando os dados são amostrados, estamos no que chamamos ainda mais especificamente do processamento *digital* de sinais. Ele abrange cálculos e métodos que se prestam a qualquer campo em que a observação e tratamento de grandezas é fundamental para que se obtenha ou se interprete as informações que podem ser obtidas no sinal.

As fronteiras das técnicas de processamento de sinais abrangem muito mais do que as análises no domínio da frequência. Identificação de voz, síntese de voz, reconhecimento facial e *deep fake* são algumas das técnicas do estado da arte do processamento digital de sinais.

Embora a série de Fourier, em si, auxilie a identificar as diferentes frequências de um sinal, seu uso é muito mais abrangente. Vai além da mera possibilidade de se observar o espectro de um sinal amostrado qualquer.

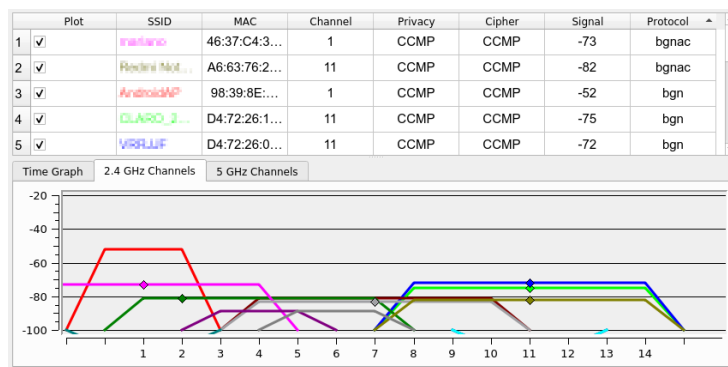


Figura 1.2: Gráfico dos servidores de wi-fi com potência e ocupação de *canais* gerado no LinSSID [2].

### 1.1.2 Telecomunicações

Um exemplo quase onipresente em nosso planeta diz respeito às telecomunicações e transmissão de informações por meio de ondas eletromagnéticas. Na televisão, por exemplo, diferentes informações são transmitidas em diferentes *canais*. A verdade é que praticamente qualquer transmissão sem fio utiliza o conceito de canais – redes de wi-fi têm canais, redes celulares e de Internet móvel também.

A figura 1.2 mostra o gráfico de canais da rede de wi-fi observados por meio do software LinSSID. Neste gráfico, o eixo horizontal está enumerando os canais, mas poderia, sem grandes alterações, ser um eixo de frequências. Isto é verdade pois um canal nada mais é do que um conjunto de frequências (ou uma banda de frequências, em que o termo banda é usado significando pedaço como em banda de maçã) reservado para organizar comunicações simultâneas, o que visa impedir as interferências na comunicação. No nosso gráfico, vemos várias redes empregando os mesmos canais. Isto significa que neste local a transmissão na rede wi-fi não será ideal pois haverá interferência de uma rede sobre a outra.

As análises no domínio da frequência são essenciais para a transmissão de dados e é um tópico predominante nas engenharias elétrica, eletrônica e de telecomunicações.

### 1.1.3 Vibrações mecânicas

As ondas produzidas por instrumentos musicais são vibrações mecânicas. Além da importância na produção de músicas e sons agradáveis, matéria prima para artistas, as vibrações mecânicas costumam ser tópico importante nas estruturas de construções, em máquinas, no estudo da geologia, dentre vários outros fenômenos vibratórios de natureza mecânica.

Nas máquinas as vibrações podem tanto ser empregadas como forma de transmissão de energia e movimento como surgem como consequência do emprego de máquinas rotativas como motores. É comum que se empregue as vibrações do maquinário como um parâmetro para identificar seu funcionamento normal. Uma das primeiras alterações percebidas pelo condutor de um veículo que indica problemas é a ocorrência de sons anormais resultantes do mal

funcionamento.

A observação de vibrações em estruturas é fundamental e está associada a sua ressonância. Dois casos interessantes podem ser vistos hoje em plataformas de compartilhamento de vídeo, pois estes exemplos modernos possuem registros impressionantes de ressonância – as pontes de Tacoma Narrows e Millenium Brigde. A primeira colapsou devido às vibrações descontroladas. A segunda não chegou a colapsar mas precisou de correções estruturais para frear as altas amplitudes de suas oscilações laterais.

#### 1.1.4 Biofísica, biomedicina e engenharia biomédica

Algumas atividades biológicas como os batimentos cardíacos e a respiração são essencialmente cíclicas. Como consequência, a análise da periodicidade destas atividades funcionam como indicativos da situação de um paciente. Eletrocardiografia e eletroencefalografia são dois exemplos de exames cujo objetivo é observar as ondas associadas às variações das grandezas elétricas resultantes das atividades do sistema nervoso. Na eletroencefalografia, por exemplo, as observações costumam ser classificadas como *ondas* teta, delta, alfa e beta, o que também evidencia o aparecimento de oscilações das grandezas elétricas fruto da atividade cerebral.

## Capítulo 2

# Bases matemáticas e físicas para análise de espectro

Nosso estudo do espectro de frequências é feito pela soma de várias *funções trigonométricas* diferentes (mas todas do mesmo tipo, que chamamos genericamente de funções senoidais). Assim, cada função é uma parcela em uma grande quantidade de adições, o que chamamos de *somatório*.

Por esta razão, para cumprirmos nosso objetivo, vamos revisar as noções de somatório na seção 2.1 e as funções senoidais na seção 2.3.

O produto de matrizes é dado por um somatório para cada elemento da matriz produto. Como faremos mais de um somatório, podemos representá-los todos de uma vez como um produto de matrizes que revisaremos na seção 2.4.

O produto de matrizes facilitará significativamente o cálculo da nossa série se quisermos realizá-la em um computador (o que é indispensável quando estivermos trabalhando com uma grande quantidade de números). Exploraremos o uso do computador para realizar cálculos com grande quantidade de números no capítulo 3.

### 2.1 Somatórios

Considere as somas  $S_1$  e  $S_2$  dadas por

$$S_1 = 23 + 30 + 35 + 36 + 39 + 49 + 59 + 72 + 74 + 77, \text{ e,}$$

$$S_2 = 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 + 39 + 43 + 47.$$

Ambas são relativamente longas, contendo dez parcelas cada uma. Na primeira soma, a  $S_1$ , é difícil encontrar um padrão que relacione as parcelas. De fato, se você encontrou um padrão, considere um bom indício de paranoia (ou de genialidade), pois eu gerei as parcelas em um gerador de números aleatórios verdadeiros (existem sequências chamadas pseudo-aleatórias que, de fato, têm uma regra de formação).

Já na segunda, há uma certa regularidade nas parcelas. Vemos que qualquer parcela em  $S_2$  tem o formato  $7 + 4i$ , com  $i$  inteiro variando de 1 a 10.

Esta regularidade nos permite adotar uma simbologia sintética para não precisarmos expressar  $S_2$  pelo detalhamento de cada parcela numericamente.

Ela consiste em empregar uma letra sigma ( $\sum$ ) indicando que será expresso um somatório (a letra sigma equivale, no alfabeto grego, ao s do alfabeto latino). Na parte inferior do sigma indicamos o valor inicial da variável inteira capaz de expressar as parcelas e acima o valor final. Com esta regra, o somatório  $S_2$  poderia ser expresso como

$$S_2 = \sum_{k=1}^{10} (7 + 4k).$$

De forma geral, o símbolo de somatório pode ser utilizado se tivermos uma regularidade nas parcelas possível de expressar pela função  $f(i)$ , com  $i$  inteiro variando de um valor  $a$  até  $b$ . O significado de seu uso será

$$\sum_{k=a}^b f(k) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(b-1) + f(b).$$

### Exercícios de revisão

**Questão 2.1.** Expanda os somatórios abaixo possibilitando a visualização de todas as parcelas.

(a) *Soma dos oito primeiros números pares.*  $\sum_{k=0}^7 (2k).$

(b) *Soma dos oito primeiros números ímpares.*  $\sum_{k=0}^7 (2k+1).$

(c)  $\sum_{k=0}^6 (k+1)^2.$

(d)  $\sum_{k=0}^5 a_k \cos\left(\frac{2\pi}{11}kn\right).$

**Questão 2.2.** As parcelas abaixo tem uma lei de formação. Descubra a lei e reescreva a expressão na forma de somatório.

(a)  $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}.$

(b)  $12 + 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256}.$

(c)  $1 + \cos(\omega t) + \cos(2\omega t) + \cos(3\omega t) + \cos(4\omega t).$

(d)  $b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{10}n\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{10}n\right) + b_3 \sin\left(\frac{6\pi}{10}n\right) + b_4 \sin\left(\frac{8\pi}{10}n\right) + b_5 \sin(\pi n).$

**Questão 2.3.** Expanda os somatórios abaixo possibilitando a visualização de cinco de suas parcelas, sendo as três primeiras e as duas últimas.

(a)  $\sum_{k=0}^{1000} (2k+3)^2.$

(b)  $\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{2^{4k-1}}.$

(c)  $\sum_{k=1}^{100} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{200}kn\right).$

(d)  $\sum_{k=0}^{512} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{1024}kn\right).$

**Questão 2.4.** *Somatórios infinitos.* As expressões abaixo empregam somatório com infinitos termos e possibilitam o cálculo de alguns valores conhecidos. Faça o cálculo truncado (com uma quantidade finita de termos) com os dez primeiros termos empregando uma calculadora. Verifique o erro percentual cometido com o truncamento.

$$(a) \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

$$(b) \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

$$(c) \frac{3}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

### 2.1.1 Propriedades de somatórios

#### Somatório de uma constante

Pela definição de multiplicação – uma soma de parcelas iguais – o somatório

$$\sum_{k=a}^b C = C(b-a+1). \quad (2.1)$$

O valor  $(b-a+1)$  é a quantidade de parcelas da soma da constante  $C$ .

**Exemplo 2.1.** Calcule o valor exato do somatório

$$\sum_{k=1}^{20} 12.$$

**Solução.** Como temos termos constantes a medida que  $k$  varia,

$$\sum_{k=1}^{20} 12 = \underset{k=1}{12} + \underset{2}{12} + \underset{3}{12} + \cdots + \underset{19}{12} + \underset{20}{12} = 12 \cdot 20 = 240,$$

onde vemos que a fórmula proposta acima é válida neste caso, já que

$$\sum_{k=1}^{20} 12 = 12 \cdot (20 - 1 + 1) = 12 \cdot 20 = 240.$$

**Exemplo 2.2.** Considerando que  $k$  é uma constante, simplifique o somatório de modo a evitar o uso da notação do sigma,

$$\sum_{n=5}^{15} k.$$

**Solução.** Podemos utilizar imediatamente a propriedade da equação 2.1 para obter

$$\sum_{n=5}^{15} k = (15 - 5 + 1)k = 11k.$$

**Somatório de uma soma**

Pela associatividade e comutatividade da soma, o somatório de uma adição pode ser a adição dos somatórios, ou seja,

$$\sum_{k=a}^b [f(k) + g(k)] = \sum_{k=a}^b f(k) + \sum_{k=a}^b g(k). \quad (2.2)$$

Ou seja, pode-se somar primeiro todas as parcelas de  $f(k)$  e em seguida as parcelas de  $g(k)$  já que pela associatividade e comutatividade a ordem em que se realizam as adições não importa.

**Somatório de uma função multiplicada por constante**

Se realizarmos o somatório

$$\sum_{k=a}^b C f(k) = C \sum_{k=a}^b f(k) \quad (2.3)$$

devido à propriedade distributiva. A simbologia pode não facilitar, mas do membro esquerdo para o direito “pusemos o  $C$  em evidência”.

**Exemplo 2.3.** Sabendo que

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}, \text{ e,}$$

$$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

Calcule o valor exato do somatório

$$\sum_{k=1}^{20} [k(k+3)].$$

**Solução.** Podemos reescrever o somatório como

$$\sum_{k=1}^{20} [k(k+3)] = \sum_{k=1}^{20} [k^2 + 3k],$$

que usando a propriedade da equação 2.2, resulta em

$$\sum_{k=1}^{20} [k(k+3)] = \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} 3k,$$

e utilizando a propriedade da equação 2.3

$$\sum_{k=1}^{20} [k(k+3)] = \sum_{k=1}^{20} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{20} k.$$

Agora podemos utilizar as fórmulas dadas para obter

$$\sum_{k=1}^{20} [k(k+3)] = \frac{20(20+1)(2 \cdot 20+1)}{6} + 3 \cdot \frac{20(20+1)}{2} = 3500.$$

**Comutação de somatório duplo**

Devido às propriedades comutativa e associativa, não importa a ordem em que uma soma é feita, de modo que

$$\sum_{i=a}^b \sum_{j=c}^d a_{i,j} = \sum_{j=c}^d \sum_{i=a}^b a_{i,j}. \quad (2.4)$$

**Exemplo 2.4.** Expanda os somatórios, reorganize os termos e mostre que a igualdade é válida para

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=0}^2 (2i + j) = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^4 (2i + j).$$

**Solução.** Expandindo os somatórios, teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=0}^2 (2i + j) &= \sum_{i=1}^4 [(2i + 0) + (2i + 1) + (2i + 2)] \\ &= [(2 \cdot 1 + 0) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 1 + 2)] + \\ &\quad + [(2 \cdot 2 + 0) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 2 + 2)] + \\ &\quad + [(2 \cdot 3 + 0) + (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 3 + 2)] + \\ &\quad + [(2 \cdot 4 + 0) + (2 \cdot 4 + 1) + (2 \cdot 4 + 2)] \\ &= [(2 \cdot 1 + 0) + (2 \cdot 2 + 0) + (2 \cdot 3 + 0) + (2 \cdot 4 + 0)] + \\ &\quad + [(2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 4 + 1)] + \\ &\quad + [(2 \cdot 1 + 2) + (2 \cdot 2 + 2) + (2 \cdot 3 + 2) + (2 \cdot 4 + 2)] \\ &= \sum_{j=0}^2 [(2 \cdot 1 + j) + (2 \cdot 2 + j) + (2 \cdot 3 + j) + (2 \cdot 4 + j)] \\ &= \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^4 (2i + j). \end{aligned}$$

É visível que todas as parcelas do primeiro somatório se encontram no segundo somatório se observarmos que as parcelas que estão organizadas em linhas na segunda igualdade, encontram-se nas colunas da terceira, esclarecendo que se trata apenas de um reordenamento das parcelas, que é livre devido à comutação e associação da operação de adição.

**Exemplo 2.5.** Sabendo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k &= \frac{N(N+1)}{2}, \\ \sum_{k=1}^N k^2 &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, e, \\ \sum_{k=1}^{15} a_k &= 120, \end{aligned}$$



calcule o valor exato do somatório

$$\sum_{k=1}^{15} \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{30} 5ij^2 a_k.$$

**Solução.** Vamos pôr o termo constante em evidência e reordenar os somatórios, obtendo

$$\sum_{k=1}^{15} \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{30} 5ij^2 a_k = 5 \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{30} \sum_{k=1}^{15} ij^2 a_k.$$

Neste último somatório, o termo  $ij^2$  é constante com relação a  $k$ , de modo que podemos colocá-lo em evidência, resultando em

$$5 \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{30} \sum_{k=1}^{15} ij^2 a_k = 5 \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{30} ij^2 \sum_{k=1}^{15} a_k,$$

já  $i$ , é constante com relação a  $j$ , e podemos colocá-lo em evidência novamente, resultando em

$$5 \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{30} ij^2 \sum_{k=1}^{15} a_k = 5 \sum_{i=1}^{20} i \sum_{j=1}^{30} j^2 \sum_{k=1}^{15} a_k.$$

Podemos agora resolver as somas para seus valores numéricos sucessivamente, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{30} 5ij^2 a_k &= 5 \sum_{i=1}^{20} i \sum_{j=1}^{30} j^2 \sum_{k=1}^{15} a_k \\ &= 5 \sum_{i=1}^{20} i \sum_{j=1}^{30} j^2 120 \\ &= 5 \cdot 120 \sum_{i=1}^{20} i \sum_{j=1}^{30} j^2 \\ &= 5 \cdot 120 \sum_{i=1}^{20} i \frac{30(30+1)(2 \cdot 30 + 1)}{6} \\ &= 5 \cdot 120 \cdot 9455 \frac{20(20+1)}{2} \\ &= 5 \cdot 120 \cdot 9455 \cdot 210 \\ \sum_{k=1}^{15} \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{30} 5ij^2 a_k &= 1\,191\,330\,000. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.6.** Sabendo que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = 0,$$

para  $k$  inteiro e  $1 \leq k \leq N - 1$ , calcule o somatório

$$\sum_{n=0}^8 \sum_{k=1}^4 a_k \cos\left(\frac{2\pi}{9}kn\right)$$

**Solução.** Vamos começar invertendo a ordem dos somatórios

$$\sum_{n=0}^8 \sum_{k=1}^4 a_k \cos\left(\frac{2\pi}{9}kn\right) = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^8 a_k \cos\left(\frac{2\pi}{9}kn\right).$$

Agora,  $a_k$  é constante com relação a  $n$  (pois, como o índice indica, ele varia apenas com  $k$ ) e podemos colocá-lo em evidência obtendo

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^8 a_k \cos\left(\frac{2\pi}{9}kn\right) = \sum_{k=1}^4 a_k \sum_{n=0}^8 \cos\left(\frac{2\pi}{9}kn\right),$$

de modo que evidenciamos o somatório que sabemos ser nulo, pois os valores de  $k$  estão entre 1 e 4, e portanto também estão entre 1 e 8, respeitando a necessidade de  $1 \leq k \leq N - 1$ , pois por inspeção vemos que no nosso caso específico podemos considerar  $N = 9$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^8 \sum_{k=1}^4 a_k \cos\left(\frac{2\pi}{9}kn\right) &= \sum_{k=1}^4 a_k \sum_{n=0}^8 \cos\left(\frac{2\pi}{9}kn\right) \\ &= \sum_{k=1}^4 a_k \cdot 0 \\ \sum_{n=0}^8 \sum_{k=1}^4 a_k \cos\left(\frac{2\pi}{9}kn\right) &= 0. \end{aligned}$$

### Exercícios de revisão

**Questão 2.5.** Realize os somatórios abaixo:

(a)  $\sum_{k=1}^{15} 8.$

(b)  $\sum_{k=13}^{82} 10.$

(c)  $\sum_{n=a}^{2a-1} 5.$

(d)  $\sum_{n=0}^{N-1} a_0$ , considerando  $a_0$  constante.

(e)  $\sum_{k=0}^{10} 5a_k$ , sabendo que  $\sum_{k=0}^{10} a_k = 50$ .

(f)  $\sum_{j=0}^{10} [a_j + b_j]$ , sabendo que  $\sum_{j=0}^{10} a_j = 95$  e  $\sum_{j=0}^{10} b_j = 110$ .

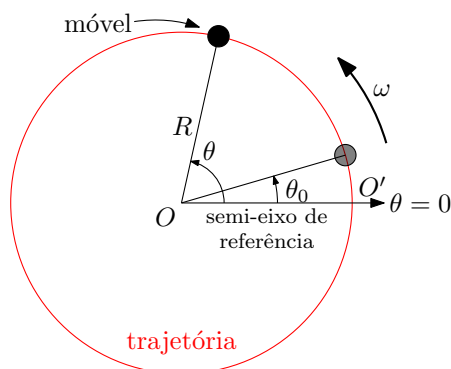


Figura 2.1: Esquema para descrição da cinemática do movimento circular.

$$\begin{aligned}
 & \text{(g)} \sum_{j=0}^{10} \sum_{i=0}^8 a_i b_j, \text{ sabendo que } \sum_{i=0}^8 a_i = 75 \text{ e } \sum_{j=0}^{10} b_j = 110. \\
 & \text{(h)} \sum_{n=0}^8 \sum_{k=1}^4 b_k \sin\left(\frac{2\pi}{8} kn\right), \text{ sabendo que } \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) = 0.
 \end{aligned}$$

## 2.2 Movimento circular uniforme

Revisaremos mais adiante nas seções 2.3.1 e 2.3.3, a relação entre oscilações harmônicas e a cinemática do movimento circular uniforme. Conhecer as características básicas deste tipo de movimento auxilia sobremaneira a compreensão das grandezas e da álgebra envolvida nas funções trigonométricas.

Tratamos como movimento circular aquele que pode ser descrito por um único número, designado posição angular, e em que o móvel esteja restrito à girar sobre uma trajetória circular conhecida. Para localizar o objeto, basta saber sua posição angular  $\theta$  definida a partir de um semi-eixo partindo do centro da circunferência onde convencionamos adotar a posição angular como sendo nula, como ilustrado na figura 2.1. Nesse esquema, o semi-eixo  $\overrightarrow{OO'}$  define a posição angular em que  $\theta = 0$ .

Duas outras convenções são empregadas. Na primeira, há dois sentidos de giro – horário e anti-horário. É comum que uma medida de posição feita a partir do eixo de referência no sentido anti-horário seja considerada uma medida de posição angular positiva ( $\theta > 0$ ). Nesta convenção a medida feita no sentido horário seria negativa. É possível, mas não muito comum, adotar a convenção inversa.

Além da questão relacionada ao sinal, a medida que gira, um móvel pode passar por um mesmo ponto diversas vezes ao das mais de uma volta. Isto admite medidas, por exemplo, de  $\theta_1 = \pi/4$  e  $\theta_2 = 9\pi/4 = \pi/4 + 2\pi$ , que a rigor registrariam uma mesma posição (posições congruentes), mas que na cinemática do giro significa que de  $\theta_1$  para  $\theta_2$  o móvel deu uma volta completa no sentido anti-horário (considerando a convenção mais comum para o sinal do giro).

Há total analogia entre esta forma de movimento e o movimento retilíneo, com a única diferença de que, aqui, as posições são angulares e medidas pelo comprimento do arco dado em radianos (ou pelo ângulo central medido em

graus). Já no movimento retilíneo, a posição é medida pelo comprimento, que no SI é dado em metros.

Como consequência, as velocidades também são análogas e medem o quão rápido muda a posição do móvel. Porém, enquanto no movimento retilíneo esta medida é de comprimento por unidade de tempo (metro por segundo no SI), no movimento circular ela é dada em comprimento de arco por unidade de tempo (que no SI é dada em radianos por segundo).

Para nossas aplicações, nos interessa o movimento circular uniforme, em que a velocidade angular (análoga à velocidade instantânea) é constante e, portanto, igual a velocidade angular média (análoga à velocidade média). Se  $\omega$  é a velocidade angular instantânea,  $\omega_m$  é a velocidade angular média, o móvel passa pelo  $\theta_0$  quando  $t = 0$ , e  $\theta$  é uma posição angular qualquer por onde o móvel passa num instante  $t$  genérico, então

$$\omega = \omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0},$$

que resulta em

$$\theta = \omega t + \theta_0. \quad (2.5)$$

Como esperado, esta equação é análoga a equação horária do espaço para o movimento uniforme (dada por expressões como  $s = s_0 + vt$  ou  $x = x_0 + vt$ ), com os papéis da posição angular ocupando o da posição e o da velocidade angular o da velocidade.

Se empregarmos  $T$  para representar o tempo necessário para completar uma volta, e chamado *período*, então  $\omega T$  deve resultar em  $2\pi$  rad (pois  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$ ), que corresponde a uma volta completa, de modo que a relação entre o período e a frequência angular é dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.6)$$

É comum em aplicações de engenharia utilizar como parâmetro de velocidade das oscilações a frequência medida em ciclos por unidade de tempo. Se a unidade de tempo é o segundo, teremos ciclos/s ou  $s^{-1} = \text{Hz}$  (hertz), pois o ciclo é considerado uma quantidade adimensional. Se o período informa o tempo decorrido por ciclo, a *frequência* será seu recíproco,

$$f = \frac{1}{T}, \quad (2.7)$$

e mede a quantidade de ciclos por unidade de tempo. Se o tempo estiver em segundos (unidade do SI), a frequência será dada em hertz. Daqui, também, pode-se chegar por substituição à relação entre frequência (em hertz) e a frequência angular (em radianos por segundo) dada por

$$\omega = 2\pi f. \quad (2.8)$$

### Observação de amostras do giro – ambiguidade de posição

Imagine que é feito um instantâneo de um móvel que se desloca em uma trajetória circular e se obtém o resultado do canto superior esquerdo da figura 2.2 em que já definimos um eixo de referência e traçamos alguns segmentos de suporte para observar a simetria.

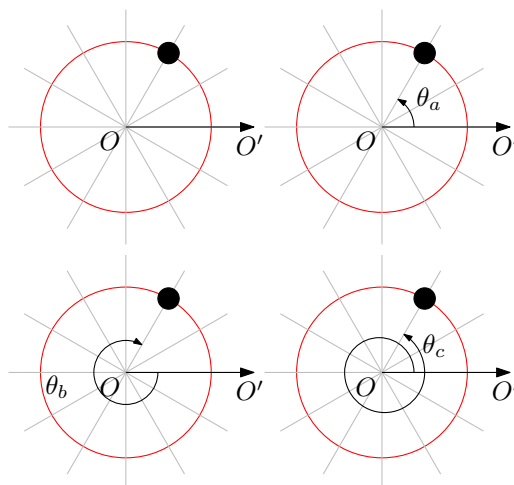


Figura 2.2: Medidas da posição angular para um instantâneo do móvel.

Como determinar a posição angular  $\theta$  do móvel a partir do instantâneo? Pela simetria observada, podemos inferir que  $\theta = \pi/3 = \theta_a$ . Esta é a medida que adotamos naturalmente apenas devido a nosso viés de empregar o menor ângulo de giro anti-horário. Nada diz que a medida efetiva não deveria ser a do menor ângulo do giro horário  $\theta = -5\pi/3 = \theta_b$  ou ainda que é devido a uma medida de giro anti-horário com uma volta completa em que  $\theta = 7\pi/3 = \theta_c$ . De forma geral, se se observa o instantâneo de uma posição angular e uma possível medida desta posição é  $\theta = \theta_a$ ,

$$\theta_k = \theta_a + 2\pi k, \text{ para qualquer } k \text{ inteiro,}$$

também são medidas possíveis. Isto significa que observando um instantâneo do movimento circular, há uma ambiguidade com relação a sua medida de posição. Podemos afirmar também que se  $\theta_a$  e  $\theta_b$  são medidas de posição válidas (geometricamente congruentes), elas devem diferir entre si de um múltiplo de  $2\pi$ .

Ora, ao longo de uma circunferência só há posições reais ao longo de uma amplitude de uma volta. Por exemplo, qualquer posição angular será unicamente identificada se utilizarmos como convenção  $0 \leq \theta < 2\pi$  ou  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Qualquer outra medida é virtual. Elas podem ser justificadas pelo uso da expressão

$$\theta = \omega t + \theta_0.$$

As medidas fora de uma margem de  $2\pi$  podem significar que o móvel deu mais de uma volta. O problema é que a verificação da ocorrência de mais de uma volta só é possível se se acompanha o movimento continuamente pois, como vimos, em um instantâneo há sempre ambiguidade na medida da posição angular.

**Exemplo 2.7.** Um móvel gira sobre um circunferência com velocidade constante. No instante  $t_1$  ele é observado em uma posição coincidente com a marca de  $\pi/6$  com relação a um eixo de referência e no instante posterior  $t_2$  na posição coincidente com a marca de  $\pi/2$ . Pelas observações,

responda: (a) é possível determinar a variação da posição angular? Qual seria a sua medida? (b) É possível determinar a velocidade angular do móvel se  $t_1 = 1$  s e  $t_2 = 5$  s?

**Solução.** (a) Podemos dizer que duas possíveis posições angulares para os instantes  $t_1$  e  $t_2$  são  $\theta_1 = \pi/6$  e  $\theta_2 = \pi/2$ , respectivamente. Isto significa, efetivamente, que quaisquer posições nas formas

$$\begin{aligned}\theta_{1i} &= \pi/6 + 2\pi i, \text{ para qualquer } i \text{ inteiro, e,} \\ \theta_{2j} &= \pi/2 + 2\pi j, \text{ para qualquer } j \text{ inteiro,}\end{aligned}$$

são possíveis para o móvel em  $t_1$  e em  $t_2$ . Assim, variação da posição angular  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$  será

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \pi/2 + 2\pi j - (\pi/6 + 2\pi i) \\ &= \pi/2 - \pi/6 + 2\pi j - 2\pi i \\ &= \pi/3 + 2\pi(j - i) \\ \Delta\theta &= \pi/3 + 2\pi k = \Delta\theta_k,\end{aligned}$$

em que  $k = j - i$ , a diferença entre dois inteiros, também é um inteiro. Isto significa que a variação de posição angular não está determinada pois não há certeza de seu valor por uma parcela dada por um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Seu valor tem a forma  $\Delta\theta = \pi/3 + 2\pi k$  e significa que não se sabe quantas voltas inteiras se dá quando se sai de  $\theta_1$  para  $\theta_2$ .

(b) Para obter a velocidade de um móvel que se move com velocidade angular constante, precisamos determinar o valor da razão

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Neste caso, a variação de tempo  $\Delta t$  está determinada e vale  $\Delta t = t_2 - t_1 = 4$  s. A variação de posição, porém, não pode ser conhecida, mas seus possíveis valores podem ser expressos em termos de um inteiro  $k$  como  $\Delta\theta_k = \pi/3 + 2\pi k$ , o que significa que há, também, possíveis valores para  $\omega$  expressos em termos de  $k$  como

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{\Delta\theta_k}{\Delta t} \\ &= \frac{\pi/3 + 2\pi k}{4} \\ \omega_k &= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \text{ [rad/s].}\end{aligned}$$

### Exercícios de revisão

**Questão 2.6.** Qual é a equação da posição angular de um móvel que gira com velocidade angular de  $\frac{\pi}{6}$  rad/s e parte da posição  $\frac{\pi}{2}$  rad quando  $t = 0$ ?

**Questão 2.7.** A figura 2.3 mostra a sobreposição de duas posições de um móvel em movimento circular uniforme, quando  $t = t_1 = 0$  e quando  $t = t_2 = 0,1$  s. (a) Quais são as possíveis velocidades angulares do móvel? (b) Em valor absoluto, qual é a menor destas velocidades?

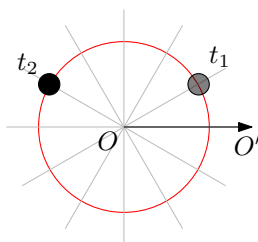


Figura 2.3: Localização do móvel para a questão 2.7.

**Questão 2.8.** Um móvel em movimento circular com equação horária dada por

$$\theta = 50\pi t + \pi/6$$

é iluminado por uma luz estroboscópica que pisca a cada 10 ms, sendo o primeiro flash em  $t = 0$ . (a) A medida que gira, em que posições se encontra o móvel no momento do flash? Tente achar uma regra geral para as posições em termos da ordem do flash. (b) O que ocorre quando se reduz estas posições angulares a uma medida de posição com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ?

**Questão 2.9.** Um móvel realiza um movimento circular uniforme iluminado por uma luz estroboscópica que emite 11 flashes em rajada, sendo  $T_s$  o tempo entre cada flash. Deseja-se que no 11º flash o móvel se encontre coincidente com a posição em que ele estava no 1º flash. (a) Qual é a velocidade angular mínima, diferente de zero, que o móvel deve estar para cumprir esta restrição? (b) Qual é a regra geral para a expressão da velocidade angular que garante o cumprimento desta restrição? (c) Esboce as posições do móvel em cada flash para cada velocidade, considerando que o móvel está inicialmente coincidente com o eixo de referência.

**Questão 2.10.** Repita a questão 2.9 para  $N + 1$  flashes.

**Questão 2.11.** Suponha que duas amostras são observadas do giro de um móvel em movimento circular uniforme. A primeira amostra é feita em  $t_1 = 0$  quando a posição do móvel coincide com o eixo de referência. A segunda em  $t_2 = T_s$ . Se desejamos ter certeza da velocidade angular do móvel a partir destas duas amostras (a velocidade  $\omega$  deve ser unicamente determinada), é necessário limitar  $|\omega|$  a um valor máximo. (a) Qual é esta velocidade máxima? (b) Qual é a localização limítrofe da amostra feita em  $t_2 = T_s$  que fornecerá esta velocidade máxima? (c) É permitido que entre  $t_1$  e  $t_2$  o móvel dê mais de uma volta e ainda assim consigamos determinar  $\omega$  unicamente? (dica: pense nas três perguntas das letras (a), (b) e (c) de forma integrada pois não há ordem entre elas e, em geral, elaborar um raciocínio que auxilie a responde uma, também auxilia a responder outra)

## 2.3 Funções trigonométricas

O uso do seno e do cosseno em nosso trabalho será abundante, e, com uma frequência um pouco menor, a tangente. Estas entidades podem ser consideradas operadores (operador seno, operador cosseno e operador tangente), uma medida (medida de uma razão) ou uma função (como veremos na seção 2.3.2). Importa saber que surgem historicamente como números associados a razões de comprimentos em triângulos retângulos. Como todos os triângulos retângulos que possuem um ângulo  $\theta$  são semelhantes, as razões entre seus lados são sempre as mesmas (pois os seus lados são proporcionais). Assim, podemos dizer

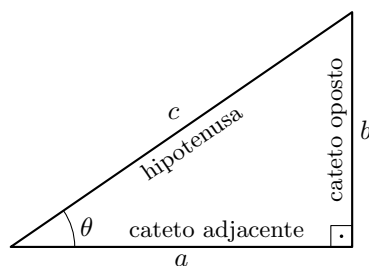


Figura 2.4: Exemplo de um triângulo com um ângulo  $\theta$  e a designação típica de seus lados.

que os valores do seno, cosseno e tangente dependem apenas de  $\theta$ . Elas são representadas, respectivamente por  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  e  $\operatorname{tg} \theta$ .

No triângulo retângulo, elas podem ser calculadas como

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \\ \cos \theta &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}, \text{ e,} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{adjacente}},\end{aligned}\tag{2.9}$$

em que hipotenusa é o maior lado no triângulo retângulo, que está oposto ao ângulo reto, e os catetos, os dois outros lados menores, são distinguidos ao qualificá-los como ou oposto ou adjacente (próximo) considerando sua localização em relação ao ângulo  $\theta$ .

Assim, no triângulo retângulo da figura 2.4, o cateto adjacente é o lado de comprimento  $a$ , o oposto o de comprimento  $b$  e a hipotenusa o de comprimento  $c$ . Nele, temos

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{b}{c}, \\ \cos \theta &= \frac{a}{c}, \text{ e,} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{b}{a}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

É fácil ver que podemos calcular a tangente como

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.\tag{2.11}$$

### Exercícios de revisão

**Questão 2.12.** Calcule o seno, cosseno e a tangente do triângulo pitagórico com relação ao ângulo  $\alpha$  que tem cateto adjacente de comprimento 4 e oposto de comprimento 3.

**Questão 2.13.** Empregue um dos triângulos formados pelo corte de um triângulo equilátero por sua altura para determinar  $\cos 30^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 30^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\sin 60^\circ$  e  $\operatorname{tg} 60^\circ$ . Use as relações de simetria dos triângulos formados e o teorema de Pitágoras.



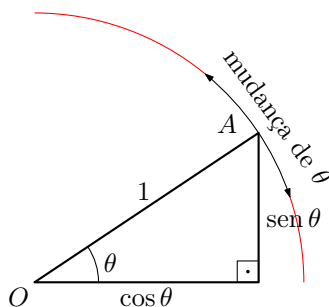


Figura 2.5: Triângulo retângulo padrão de hipotenusa unitária.

**Questão 2.14.** Empregue um dos triângulos formados pelo corte um quadrado por sua diagonal para determinar  $\cos 45^\circ$ ,  $\sin 45^\circ$  e  $\tan 45^\circ$ . Use as relações de simetria dos polígonos da figura e o teorema de Pitágoras.

### 2.3.1 Círculo trigonométrico

As definições para as funções trigonométricas dadas nas equações 2.9 estão vinculadas a existência de um triângulo retângulo com ângulo  $\theta$ , o que limita a explorarmos apenas ângulos  $\theta$  entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  (ou entre 0 e  $\pi/2$  rad).

A definição para valores de seno, cosseno e tangente pode ser expandida para um ângulo qualquer se em uma primeira proposta adotarmos um triângulo padrão de hipotenusa unitária como o apresentado na figura 2.5. Neste caso, os próprios comprimentos dos catetos oposto e adjacente coincidem com o  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , como pode ser verificado fazendo  $c = 1$  nas equações 2.10.

Neste paradigma intermediário para definir o seno e cosseno, a variação de  $\theta$  acaba traçando um arco de circunferência de raio unitário em torno do ponto  $O$  em que se localiza o ângulo  $\theta$ . Os valores de  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  se apresentam como as medidas dos comprimentos horizontal e vertical da posição do ponto  $A$ .

Já em um paradigma final apresentado na figura 2.6, podemos fazer de  $O$  a origem de um sistema cartesiano, de  $\theta$  o ângulo que o segmento  $\overline{OA}$ , de comprimento unitário, faz com a horizontal, e  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  são, respectivamente, a abscissa e ordenada do ponto  $A$ . Neste esquema, mudar o valor de  $\theta$  faz o ponto  $A$  descrever a circunferência de raio unitário centrada em  $O$  e chamada de *círculo trigonométrico*.

Agora, podemos determinar  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  para qualquer valor de  $\theta \in \mathbb{R}$ . Para contemplar os valores negativos, costuma-se convencionar  $\theta > 0$  a medida do ângulo no sentido dextrogiro (anti-horário) conforme indica a seta que desenhamos para o ângulo  $\theta$  na figura 2.6 e  $\theta < 0$  no caso contrário. Uma comparação entre os dois casos está ilustrada na figura 2.7.

Definidos o seno e o cosseno, pode-se obter a tangente pela razão da equação 2.11, de modo que a definição que demos até agora do círculo trigonométrico possibilita a cálculo dos valores para as três medidas. É comum, porém, aferir a tangente pela coordenada do ponto  $A'$  na reta  $t$ , tangente ao círculo trigonométrico no ponto  $O'$ . O ponto  $A'$  é obtido pela da interseção do prolongamento de  $\overline{OA}$  com a própria reta  $t$ . Ela é orientada para cima e tem  $O'$  como origem. A figura 2.8 apresenta esta estratégia para obter a  $\tan \theta$ . Mostramos também um exemplo da  $\tan \phi$  em que o prolongamento toca a reta  $t$  no semi-eixo negativo da

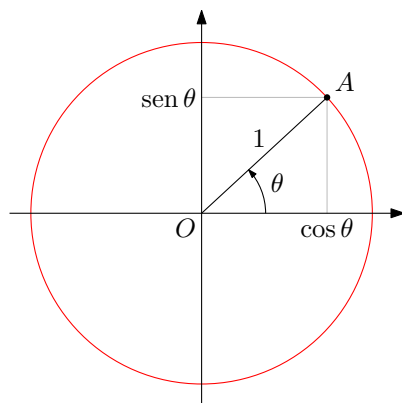


Figura 2.6: Círculo trigonométrico e definição de  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  válida para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$ .

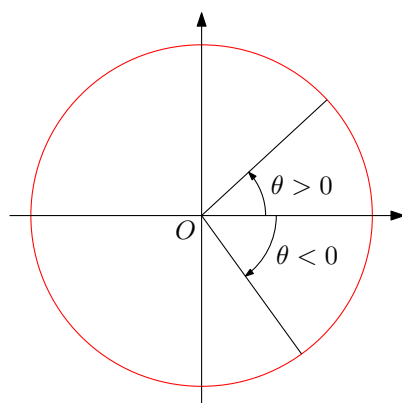


Figura 2.7: Convenção para determinar o sinal do arco  $\theta$ .

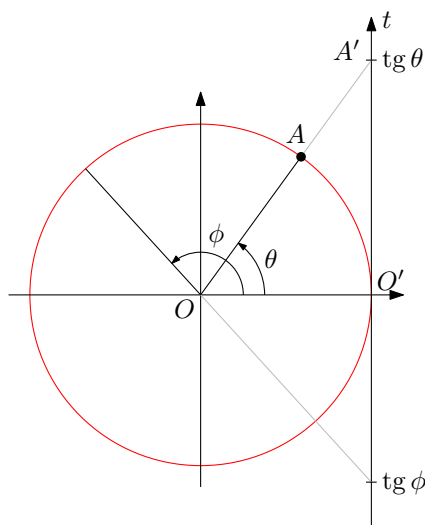


Figura 2.8: Convenção geométrica para determinar a tangente.

reta orientada  $t$ , implicando um caso de  $\operatorname{tg} \phi < 0$ .

### Exercícios de revisão

**Questão 2.15.** Use os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  e o círculo trigonométrico para elaborar uma tabela com os seno, cosseno e tangente de  $-120^\circ$ ,  $-90^\circ$ ,  $-60^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $315^\circ$ ,  $330^\circ$ ,  $360^\circ$ ,  $405^\circ$ ,  $450^\circ$ ,  $495^\circ$ ,  $540^\circ$ ,  $585^\circ$ ,  $630^\circ$ ,  $675^\circ$  e  $720^\circ$ . Inclua uma coluna com a medida do arco em radianos.

**Questão 2.16.** Quais são as regularidade que se observam nos valores de seno, cosseno e tangente observando os dados da tabela realizada na questão 2.15? Quais são os valores de máximo e mínimo para o seno e cosseno? Quando eles são nulos?

### 2.3.2 Funções senoidais

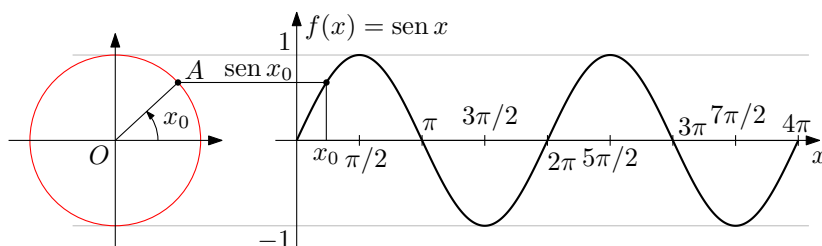
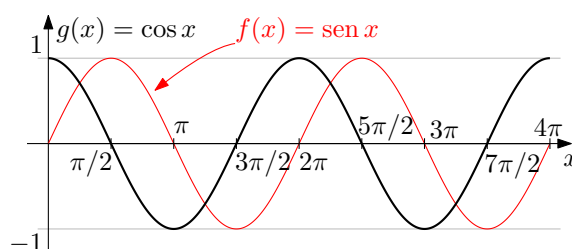
Agora, se considerarmos a função dada apenas pela operação do seno sobre uma variável independente, digamos,  $x$ , teríamos

$$f(x) = \operatorname{sen} x. \quad (2.12)$$

É mais comum tratar esta função considerando  $x$  a medida do arco, o valor adimensional convencionado como radianos.

Ilustramos na figura 2.9 a construção do gráfico da função seno. Se partirmos de  $x = 0$ , por exemplo, vemos que o valor inicial para  $f(0)$  é  $f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$ , pois a ordenada do ponto  $A$  quando o arco é  $x = 0 \text{ rad}$  é nula, pois  $A$  se encontra sobre o eixo horizontal.

A medida que aumentamos o valor do arco  $x$ , o ponto  $A$  começa a girar no sentido anti-horário sobre o círculo trigonométrico, de modo que o valor de sua ordenada começa a aumentar. Este comportamento se encerra quando  $x = \pi/2$  e a ordenada chega ao maior valor que pode atingir (o ponto verticalmente mais

Figura 2.9: Construção do gráfico de  $f(x) = \text{sen } x$ .Figura 2.10: Construção do gráfico de  $g(x) = \cos x$ .

acima que  $A$  atinge quando gira no círculo trigonométrico). Neste ponto, temos  $f(\pi/2) = \text{sen}(\pi/2) = 1$ . A partir daí, seu valor passa a diminuir novamente até atingir  $f(\pi) = \text{sen } \pi = 0$ .

Quando os valores  $\pi < x < 2\pi$ , o ponto  $A$  se encontra abaixo do eixo horizontal e  $f(x)$  é negativo, seguindo um comportamento simétrico ao de  $0 < x < \pi$ . Por fim, quando  $x = 2\pi$ , o ponto  $A$  termina uma volta completa e retorna ao mesmo ponto, com mesma ordenada, de quando  $x = 0$ . O comportamento cíclico da função seno mostra que ela é periódica e, pelo círculo trigonométrico, vemos que o período é  $2\pi$ , ou seja,

$$\text{sen } x = \text{sen}(x + 2\pi k), \quad (2.13)$$

para qualquer  $k$  inteiro.

Vamos agora tratar a função  $g(x) = \cos x$ . Ora, o cosseno é também obtido por uma coordenada do ponto  $A$ . Se girarmos os eixos cartesianos do círculo trigonométrico em  $90^\circ$  no sentido anti-horário, vemos a abscissa, onde medimos o cosseno, tomar a posição vertical de onde vínhamos observando a ordenada que media o seno. Como diferença, vemos que quando  $x = 0 \Rightarrow g(0) = 1$ , o que só acontece no seno quando  $x = \pi/2$ . Dizemos que o cosseno tem o mesmo comportamento do seno, mas ele é adiantado com relação ao seno em  $\pi/2$  rad.

O efeito sobre o gráfico é um deslocamento horizontal (ao longo da direção de  $x$ ) como ilustra a figura 2.10. Estar “adiantado” com relação ao gráfico do seno, significa que ocorre no gráfico do cosseno o comportamento do seno em valores menores de  $x$ . Isto se apresenta como uma translação para a esquerda. Algebricamente, podemos escrever

$$\text{sen}(x + \pi/2) = \cos x. \quad (2.14)$$

**Exercícios de revisão**

**Questão 2.17.** Utilize os valores da tabela obtida na questão 2.15 para esboçar os gráficos de  $f(x) = \sin(x)$  e  $g(x) = \cos(x)$  para  $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 4\pi$ .

**2.3.3 Características das senoides**

As funções  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$  são as funções mais simples que empregam as operações trigonométricas. Vimos que ambas são capazes de descrever um comportamento oscilatório com a diferença de um deslocamento no eixo  $x$ . Por esta semelhança, vamos apresentar as características com base na função seno, mas todas as características são válidas para ambas as funções (pois, conforme veremos, elas diferem apenas com relação à característica chamada *fase*).

É mais didático ao trabalhar com funções senoidais imaginar que a variável dependente é uma grandeza (pressão, por exemplo) que está sofrendo um oscilação ao longo do tempo. Por isto, vamos adotar como variável independente a letra  $t$  de tempo. Esta escolha é meramente didática e a variável dependente pode ser de qualquer natureza. As características que estudaremos valerão para qualquer uma delas.

Para estudar as características das funções senoidais vamos considerar uma função seno com algumas constantes e dada por

$$f(t) = F_m \sin(\omega t + \theta_0). \quad (2.15)$$

Elas é que descrevem características distintas das oscilações. O termo entre parênteses coincide com a descrição cinemática de um movimento circular uniforme. Como o seno é a ordenada do ponto  $A$  no círculo trigonométrico, então podemos interpretar  $\sin(\omega t + \theta_0)$  como a coordenada vertical do ponto  $A$  a medida que ele gira no círculo trigonométrico com velocidade angular  $\omega$  e partindo de  $\theta_0$  (quando  $t = 0$ ).

**Amplitude**

Vimos que as funções seno e cosseno puras são tais que

$$-1 \leq \sin t \leq 1, \text{ e } -1 \leq \cos t \leq 1. \quad (2.16)$$

Ou seja, entre o eixo de simetria da onda e a crista e o vale (o máximo e o mínimo da oscilação) há uma *amplitude* unitária.

Ao multiplicar a função senoidal por uma constante, que chamamos de  $F_m$  na equação 2.15, teremos

$$-F_m \leq F_m \sin t \leq F_m, \text{ e, } -F_m \leq F_m \cos t \leq F_m, \quad (2.17)$$

fazendo a amplitude da oscilação valer  $F_m$  conforme ilustrado na figura 2.11, que mostra também a distinção entre as amplitudes para  $F_m = 1$  e  $F_m = 3$ . Por esta razão, a primeira característica que apresentamos para a senoide é chamada amplitude e é representada pela constante  $F_m$ .

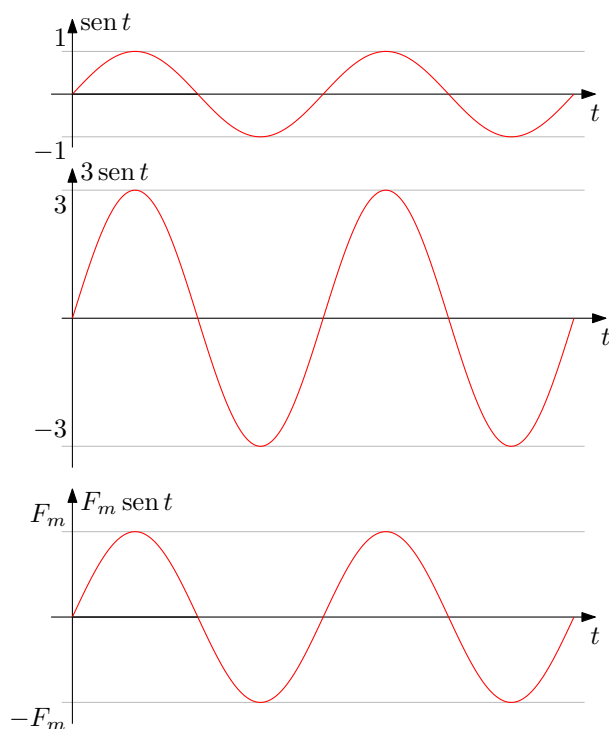


Figura 2.11: Três senoides com amplitudes 1, 3 e  $F_m$ .

### Frequência angular, frequência e período

Costuma-se convencionar que o argumento das funções senoidais é um arco medido em radianos. Então, se se faz  $\text{sen}(u)$ , supõe-se que a “unidade” de  $u$  é dada em radianos. Propusemos a função genérica  $f(t) = F_m \text{sen}(\omega t + \theta_0)$ . Já estudamos a constante  $F_m$ , que chamamos de amplitude. Vamos isolar o efeito da constante  $\omega$ .

Se observarmos isoladamente  $\text{sen}(\omega t)$ ,  $\omega t$  deverá ter unidade de radianos. Se  $t$  for de fato a variável de tempo, sua unidade pode ser segundos. Pela análise dimensional, a constante  $\omega$  deverá ter unidade de rad/s. Ela tem significado físico análogo ao da velocidade angular estudada no movimento circular uniforme que revisamos na seção 2.2, e pode ser interpretada como a velocidade com que o ponto  $A$  circula ao longo do círculo trigonométrico. Assim, quanto maior for  $\omega$ , menor é o tempo necessário para completar um ciclo da oscilação.

Para as oscilações do argumento de senoides, emprega-se os mesmos termos de período  $T$  e frequência  $f$  que vimos na seção 2.2.

A figura 2.12 ilustra o efeito da variação da frequência angular. Percebe-se que as oscilações ficam mais rápidas ao comparar os períodos que cada função leva para completar um ciclo. A função de maior frequência angular tem período mais curto, ou seja, completa um ciclo mais rapidamente.

Utilizando a relação entre as frequência  $\omega$  e  $f$  dada por  $\omega = 2\pi f$ , a expressão geral de uma senoide poderá vir no formato

$$f(t) = F_m \text{sen}(\omega t + \theta_0) = F_m \text{sen}(2\pi f t + \theta_0). \quad (2.18)$$

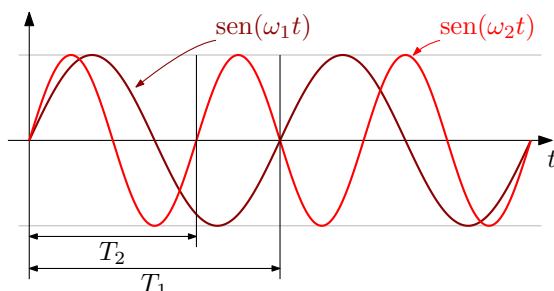


Figura 2.12: Duas senóides com frequências angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$  com  $\omega_2 > \omega_1$  e, portanto,  $T_2 < T_1$ .

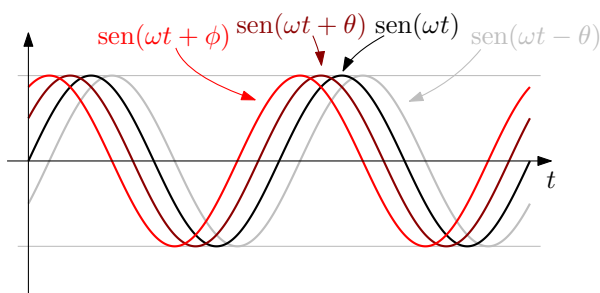


Figura 2.13: Três senóides com fase nula,  $\theta$  e  $\phi$  com  $\phi > \theta > 0$  e uma quarta com fase  $-\theta$ .

### Fase ou defasagem

O último elemento de uma senóide genérica de que ainda não tratamos é o  $\theta_0$ . Como vimos na seção 2.2, o termo  $\theta_0$  está associado a posição angular quando  $t = 0$ . Na expressão

$$f(t) = F_m \text{sen}(\omega t + \theta_0),$$

costuma-se trabalhar com duas convenções terminológicas. Uma designa toda expressão entre parêntese (todo argumento da função trigonométrica) de *fase*. Neste caso,  $\theta_0$  pode ser chamado de *fase inicial* ou *defasagem*. Esta convenção é mais popular entre físicos e matemáticos. A segunda convenção, mais empregada na engenharia, chama apenas o  $\theta_0$  de fase.

A figura 2.13 ilustra o efeito da mudança de fase. Dentre os sinais,  $\text{sen}(\omega t) = \text{sen}(\omega t + 0)$  é uma espécie de referência, pois sua fase é zero. Há duas senóides adiantadas. Esta característica pode ser observada se escolhermos uma referência (o ponto em que a onda corta o eixo  $t$ , ou o ponto em que atinge uma crista ou um vale, por exemplo). Observa-se que os valores de  $t$  em que a onda definida por  $\text{sen}(\omega t + \theta)$  atinge pontos de referência são sempre menores que na curva de  $\text{sen}(\omega t)$ , o que significa que ela atinge determinados valores mais “precocemente”, mais “adiantada” do que o  $\text{sen}(\omega t)$ . A função  $\text{sen}(\omega t + \phi)$  atinge um mesmo ponto de referência ainda mais cedo. Ela é ainda mais adiantada do que  $\text{sen}(\omega t)$  e  $\text{sen}(\omega t + \theta)$ , já que  $\phi > \theta$ .

Por outro lado, o gráfico de  $\text{sen}(\omega t - \theta)$  é sempre mais atrasado do que o de  $\text{sen}(\omega t)$ . Podemos resumir o comportamento da fase da seguinte forma:

senóides adiantadas tem fases positivas e aparecem no gráfico transladadas para a esquerda com relação a uma referência; já as senóides atrasadas tem fases negativas e aparecem transladadas para a direita com relação a uma referência.

### Exercícios de revisão

**Questão 2.18.** Esboce os gráficos das senóides abaixo.

- (a)  $\frac{1}{2} \sin(t)$  e  $3 \sin(t)$ .
- (b)  $4,3 \cos(2\pi t)$  e  $2,5 \cos(2\pi t)$ .
- (c)  $\cos(2\pi t)$  e  $\cos(8\pi t)$ .
- (d)  $\cos(3t)$  e  $\cos(4t)$ .
- (e)  $\sin(2\pi t + \pi/3)$  e  $\sin(2\pi t + \pi/6)$ .
- (f)  $2 \sin(t)$  e  $3 \cos(t - \pi/4)$ .
- (g)  $\cos(2\pi t + \pi/6)$  e  $2 \cos(3\pi t)$ .

### 2.3.4 Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas recebem como argumento um ângulo ou arco e indicam uma razão entre comprimentos. As funções trigonométricas inversas fazem o caminho contrário. Recebem uma razão e informam o ângulo ou arco para o qual essa razão ocorre.

Cada função trigonométrica tem sua inversa.  $\arcsen$  ou  $\sin^{-1}$  indica o inverso da função seno. Temos, por exemplo,

$$\sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad},$$

já que

$$\sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Da mesma forma como definimos a inversa do seno,  $\arccos$  e  $\cos^{-1}$  são as inversas do cosseno e  $\arctg$  e  $tg^{-1}$  são as inversas da tangente.

O problema de obter os valores de um arco dado o seu seno, que possibilita o cálculo das funções trigonométricas, é um problema típico de equação trigonométrica. Isto porque a forma de obter o valor do arco para o qual o seno vale  $\sqrt{3}/2$  pode ser expresso para equação

$$\sin \theta = \sqrt{3}/2.$$

A solução obtida para  $\theta$ , representa um valor válido para a inversa, de onde teríamos,

$$\sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \theta.$$

A rigor, neste nosso último exemplo, dizer que  $\sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$  é incompleto por dois motivos, que podemos resumir no fato de que  $\theta = \pi/3$  não é a única solução de  $\sin \theta = \sqrt{3}/2$ . O primeiro é devido a existência da ambiguidade da posição angular com relação à quantidade de voltas completas como vimos na seção vimos na seção 2.2. Como nosso problema é achar um arco  $\theta$  tal que  $\sin(\theta) = \sqrt{3}/2$ , sabemos que ele deve estar associado a posição angular



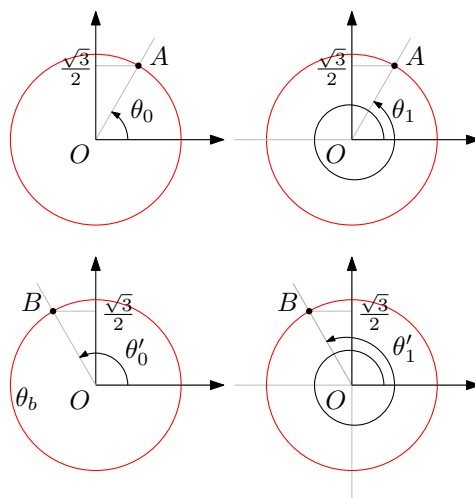


Figura 2.14: Ambiguidades na determinação do arco  $\theta$ , tal que  $\sin \theta = \sqrt{3}/2$ .

de um ponto sobre o círculo unitário que tenha ordenada  $\sqrt{3}/2$ . Por inspeção da figura 2.14, podemos ver no caso superior esquerdo que o ponto  $A$  tem esta propriedade. Ora, mas o ponto  $A$  tem posição angular ambígua. Ela pode ser dada por  $\theta_0$ , mostrado no canto superior esquerdo da figura, pode ser, também, dada por  $\theta_1$  ou qualquer outro arco em que a diferença com relação a  $\theta_0$  e  $\theta_1$  seja um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Estes arcos tem a forma  $\pi/3 + 2\pi k$ , com  $k$  inteiro.

O segundo motivo é devido a simetria em torno do eixo vertical de pontos que tem mesma ordenada e estão no círculo unitário. O ponto  $B$  é o simétrico ao ponto  $A$  com relação ao eixo vertical e também tem ordenada dada por  $\sqrt{3}/2$ . Uma posição angular associada ao ponto  $B$  é  $\theta'_0 = 4\pi/6$ . Assim,  $\theta'_0$  também seria solução de  $\sin \theta = \sqrt{3}/2$ . Além de  $\theta'_0$ , há também  $\theta'_1$  e uma infinidade de outros arcos que diferem deles em um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .

Assim, o conjunto de soluções para

$$\sin \theta = \sqrt{3}/2, \text{ é}$$

$$\{\theta \mid \theta = \pi/3 + 2\pi k, \text{ ou, } \theta = 4\pi/6 + 2\pi k, k \text{ inteiro}\}$$

Por esta razão, as funções trigonométricas inversas, como precisam retornar um único valor, serão limitadas a um conjunto reduzido de valores de arco. Isto impacta, também, no uso de calculadoras para o cálculo das funções trigonométricas inversas, pois devemos lembrar que a calculadora (ou função de uma linguagem de programação) terá uma predefinição dos arcos que ela retorna como resultado da aplicação de uma função trigonométrica inversa.

### Exercícios de revisão

**Questão 2.19.** (a) Determine todas as possibilidades para  $\sin^{-1}(-\sqrt{2}/2)$ . (b) Determine os valores do arco  $\sin^{-1}(-\sqrt{2}/2)$  limitando-o a valores entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ .

**Questão 2.20.** (a) Determine todas as possibilidades para  $\cos^{-1}(1/2)$ . (b) Determine os valores do arco  $\cos^{-1}(1/2)$  limitando-o a valores entre  $0$  e  $\pi$ .

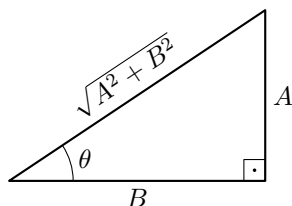


Figura 2.15: Triângulo empregado para determinar a soma de senoides.

**Questão 2.21.** (a) Determine todas as possibilidades para  $\text{tg}^{-1}(-\sqrt{3}/3)$ . (b) Determine os valores do arco  $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/3)$  limitando-o a valores entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ .

### 2.3.5 Soma e produto de funções senoidais

É possível encontrar em livros de matemática do ensino médio as fórmulas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta, \quad (2.19)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta, \quad (2.20)$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos \alpha \text{sen } \beta + \text{sen } \alpha \cos \beta, \text{ e}, \quad (2.21)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos \alpha \text{sen } \beta - \text{sen } \alpha \cos \beta \quad (2.22)$$

que são as fórmulas para os cossenos e senos das somas e diferenças de arco.

Somando as equações 2.19 e 2.20, subtraindo-as ou somando as equações 2.21 e 2.22, obtemos, respectivamente, as equações

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad (2.23)$$

$$\text{sen } \alpha \text{sen } \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \text{ e}, \quad (2.24)$$

$$\cos \alpha \text{sen } \beta = \frac{1}{2} [\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)], \quad (2.25)$$

que são as fórmulas para produtos entre senos e cossenos.

Agora considere a soma

$$A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t),$$

que representa a soma das duas funções trigonométricas com amplitudes distintas e fases nulas (porém com diferença de fase de  $\pi/2$  entre as funções, pois como vimos  $\cos(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$ ).

Agora considere um triângulo retângulo com lados de catetos coincidentes com as amplitudes  $A$  e  $B$ , com a amplitude do cosseno como cateto oposto ao ângulo de interesse  $\theta$ . Este triângulo é mostrado na figura 2.15, em que a hipotenusa pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras. Ele tem

$$\text{sen } \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (2.26)$$

$$\cos \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ e}, \quad (2.27)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A}{B} \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{A}{B} \right). \quad (2.28)$$

Se multiplicarmos a soma de seno por cosseno por  $1 = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}$ , teremos

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) &= \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \\ &= \sqrt{A^2+B^2} \left[ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \sin(\omega t) \right] \\ &= \sqrt{A^2+B^2} [\sin \theta \cos(\omega t) + \cos \theta \sin(\omega t)] \\ &= \sqrt{A^2+B^2} \sin(\omega t + \theta) \\ &= \sqrt{A^2+B^2} \sin \left[ \omega t + \operatorname{arctg} \left( \frac{A}{B} \right) \right], \end{aligned}$$

que é a expressão que queríamos para a soma de senoides

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2+B^2} \sin \left[ \omega t + \operatorname{arctg} \left( \frac{A}{B} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Se trocarmos os papéis entre cateto oposto e adjacente realizados por  $A$  e  $B$  no triângulo da figura 2.15, chegaremos à

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2+B^2} \cos \left[ \omega t - \operatorname{arctg} \left( \frac{B}{A} \right) \right]. \quad (2.30)$$

As expressões 2.29 e 2.30 nos dizem que quando somamos duas senoides de mesmas frequência, obtemos uma senoide, também na mesma frequência, porém, defasada com relação às originais. A amplitude e a fase da senoide resultante são funções das amplitudes das senoides iniciais.

**Exemplo 2.8.** Reescreva a função

$$f(t) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t - 3\pi/4) + (5 + 5\sqrt{3}) \cos(\omega t)$$

empregando uma única função trigonométrica.

**Solução.** Reescrevamos inicialmente o primeiro cosseno em termos da soma de cosseno com seno, utilizando o caminho inverso mostrado na equação 2.29, expressando

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} \cos(\omega t - 3\pi/4) &= 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 3\pi/4 + \pi/2) \\ &= 5\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/4) \\ &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \end{aligned}$$

em que

$$\begin{cases} \sqrt{A^2+B^2} = 5\sqrt{2} \\ \cos(-\pi/4) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin(-\pi/4) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \frac{A}{B} = \operatorname{tg}(-\pi/4). \end{cases}$$

Por estas relações entre  $A$  e  $B$ , podemos determinar

$$A = -B = -5,$$

que implicará

$$5\sqrt{2}\cos(\omega t - 3\pi/4) = -5\cos(\omega t) + 5\sin(\omega t)$$

Retomando a expressão para  $f(t)$ , teremos

$$\begin{aligned} f(t) &= 5\sqrt{2}\cos(\omega t - 3\pi/4) + (5 + 5\sqrt{3})\cos(\omega t) \\ &= -5\cos(\omega t) + 5\sin(\omega t) + (5 + 5\sqrt{3})\cos(\omega t) \\ &= 5\sqrt{3}\cos(\omega t) + 5\sin(\omega t), \end{aligned}$$

que, empregando 2.29 novamente, resulta em

$$f(t) = 10\sin\left[\omega t + \arctg(\sqrt{3})\right] = 10\sin(\omega t + \pi/3).$$

### Exercícios de revisão

**Questão 2.22.** Reduza as funções abaixo a uma única senoide.

(a)  $f(t) = 4\cos(120\pi t) + 4\sqrt{3}\sin(120\pi t)$

(b)  $g(t) = 3\sin(\omega t + 3\pi/4) + 1,5\sqrt{2}\sin(\omega t)$

(c)  $h(t) = 10\sqrt{2}\cos(880\pi t - 2\pi/3t) + \frac{20\sqrt{6}}{3}\sin(880\pi t + \pi)$

## 2.4 Matrizes

Matrizes são entidades matemáticas que organizam números em um arranjo de linhas e colunas. Chamamos estes números de elementos da matriz. As matrizes podem vir com uma grande quantidade de linhas e colunas. O arranjo

$$\text{n}^\circ \text{ de linhas} \times \text{n}^\circ \text{ de colunas},$$

nesta ordem, é o que designamos *ordem da matriz* ou *dimensão da matriz*. A matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 23 & 30 \\ 35 & 36 \\ 39 & 49 \end{bmatrix}$$

tem ordem  $3 \times 2$ , pois possui três linhas e duas colunas. Se for importante, podemos explicitar a ordem de uma matriz apondo a ordem ao nome da variável que representa a matriz como em  $\mathbf{A}_{3 \times 2}$ .

É comum indicar os termos de uma matriz identificando seus elementos por uma letra minúscula seguida de dois índices (dois números em subscrito) para indicar a linha e a coluna, nesta ordem. Na matriz  $\mathbf{A}$  que apresentamos, por exemplo, o elemento  $a_{21} = 35$ , pois o elemento da segunda linha na primeira coluna vale 35 em  $\mathbf{A}$ . Se os elementos  $a_{ij}$  são os componentes da matriz  $\mathbf{A}$ , escrevemos  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ .

### Igualdade de matrizes

Duas matrizes só são iguais se elas tem cada um de seus termos iguais e elas tem mesma dimensão, ou seja,

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{B}_{p \times q} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = b_{ij} \\ m = p \\ n = q \end{cases}. \quad (2.31)$$

#### 2.4.1 Regularidade nos elementos de uma matriz

Nos interessa a construção de uma matriz seguindo uma regra de formação para seus elementos. Podemos definir uma matriz  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{B}_{3 \times 3} = [b_{ij}]$ , tais que  $b_{ij} = i + j$ . Neste caso, pela substituição dos valores de  $i$  e  $j$  correspondentes às linhas e colunas expressos na regra geral, podemos obter a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Como a diferença entre um elemento e outro dentro da matriz está em sua localização no arranjo de linhas e colunas, se houver uma regularidade, estamos falando em uma regra que associa a posição do elemento ao seu valor, e portanto, o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna está em função de  $i$  e  $j$ . Isto está explícito nos índices que escrevemos em  $b_{ij}$ . De forma redundante, poderíamos escrever  $b_{ij} = b_{ij}(i, j)$  para explicitar a relação funcional.

#### 2.4.2 Produto de matrizes

Podemos multiplicar duas matrizes  $\mathbf{A}_{m \times n}$  e  $\mathbf{B}_{p \times q}$  desde que a quantidade de colunas de  $\mathbf{A}$  coincida com a quantidade de linhas de  $\mathbf{B}$ , ou seja, desde que  $n = p$ . Isto ocorre pois se o resultado do produto é  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ , então o termo  $c_{ij}$  é dado pela multiplicação dos elementos da linha  $i$  de  $\mathbf{A}$  pela coluna  $j$  de  $\mathbf{B}$  um a um e depois somados. Como exemplo, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 10 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Talvez seja mais fácil visualizar uma multiplicação  $\mathbf{A}_{3 \times 2} \mathbf{B}_{2 \times 2} = \mathbf{C}_{3 \times 2}$  pelos termos genéricos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix},$$

ficando claro a multiplicação termo a termo de uma linhas de  $\mathbf{A}$  por uma coluna de  $\mathbf{B}$ .

É por conta da multiplicação termo a termo que a quantidade de elementos da linha de  $\mathbf{A}$  (dado pela quantidade de colunas) deve ser igual a quantidade de elementos da coluna de  $\mathbf{B}$  (dado pela quantidade de linhas de  $\mathbf{B}$ ), e por isso  $n = p$  é necessário.

Vale perceber, também, que se  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ , e  $\mathbf{A}_{m \times n}$  e  $\mathbf{B}_{n \times p}$ , então  $\mathbf{C}$  terá ordem  $m \times p$ .

Em notação de somatório, podemos expressar os elementos da matriz produto  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$  como

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad (2.33)$$

em que o incremento no valor da variável  $k$  faz o somatório percorrer os  $n$  elementos  $i$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{A}$  e os  $n$  elementos da  $j$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{B}$ .

Veremos mais adiante que a possibilidade de organização de matrizes criadas por meio de uma regra e o uso de produto de matrizes para realizar somatórios será fundamental para organizar os cálculos para obter a série de Fourier.

### Produto de matrizes como representação de sistema de equações

Uma das utilidades do produto de matrizes é seu emprego para representar um sistema de equações, ou, de forma geral, um conjunto de equações. Vamos tomar como exemplo um sistema linear de equações com três equações e três incógnitas. O sistema

$$\begin{cases} 2x & +y & -z & = 8 \\ -3x & +2y & +z & = -8 \\ x & +3y & +4z & = 2 \end{cases}$$

pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz dos coeficientes*, a matriz

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz das variáveis*, e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz dos termos livres*. Assim, o sistema de equações pode ser expresso pelo produto

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}.$$

O produto das matrizes é igual ao sistema pois se resolvermos o produto, obtemos

$$\begin{bmatrix} 2x + y - z \\ -3x + 2y + z \\ x + 3y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix},$$

e como a igualdade de matrizes implica que os termos correspondentes têm que ser iguais, temos

$$\begin{bmatrix} 2x + y - z \\ -3x + 2y + z \\ x + 3y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & +y & -z & = 8 \\ -3x & +2y & +z & = -8 \\ x & +3y & +4z & = 2 \end{cases}.$$

Logo, o produto de matrizes expressa exatamente o mesmo que o sistema de equações.

### Exercícios de revisão

**Questão 2.23.** Dadas as regras de formação, apresente a matriz resultante.

- (a)  $\mathbf{A}_{3 \times 3}$  com os elementos  $a_{ij} = (i-1)^2 + j$ .
- (b)  $\mathbf{B}_{4 \times 4}$  com os elementos  $b_{ij} = 2(i-1) + 3(j-1)$ .
- (c)  $\mathbf{C}_{4 \times 7}$  com os elementos

$$\begin{cases} C_{ij} = \frac{1}{7}, & i = 1 \\ C_{ij} = \frac{2}{7} \cos \left[ \frac{2\pi}{N}(i-1)(j-1) \right], & \text{nos outros casos} \end{cases}.$$

**Questão 2.24.** Expresse os sistemas de equações a seguir na forma matricial.

- (a)  $\begin{cases} x & 3y & = 5 \\ -4x & -y & = 2 \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} x & +y & -z & = 2 \\ 2x & +y & +2z & = 3 \\ 3x & -2y & -z & = -11 \end{cases}$
- (c)  $\begin{cases} 2a_0 & +a_1 & +a_2 & +a_3 & = 5 \\ -2a_0 & +a_1 & -a_2 & -a_3 & = 1 \\ -4a_0 & +2a_1 & -2a_2 & +a_3 & = 4 \\ 2a_0 & +a_1 & -3a_2 & +2a_3 & = 11 \end{cases}$

**Questão 2.25.** Considere as matrizes

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) & \frac{1}{4} \cos\left(\frac{8\pi}{4}\right) & \frac{1}{4} \cos\left(\frac{12\pi}{4}\right) \end{bmatrix}, \text{ e,}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) & \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{4}\right) & \frac{1}{2} \sin\left(\frac{6\pi}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine o conjunto das equações para  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  e  $b_2$  sabendo que

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \text{ e, } \mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{x}.$$

**Questão 2.26.** Realize o produto matricial entre as matrizes **A** e **B** abaixo expressando cada elemento da matriz produto **C** na forma de somatório, organizando os cálculos dos valores destes elementos antes de expressar a matriz produto resultante.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$





## Capítulo 3

# Python, iterações, somatórios e gráficos

Há várias formas de instalar o Python e rodar seus códigos. Um dos mais simples é pela instalação do Python disponível em <https://www.python.org/> e pelo uso do Python IDLE (*Integrated Development and Learning Environment*), um software que integra a possibilidade de elaborar a programação, editar o código e executá-lo em um mesmo ambiente. Na instalação para Windows, o IDLE é padrão. É importante, também, ter a capacidade de instalar e empregar os módulos do Python. A forma mais empregada para realizar estas instalações é por meio do `pip`.

Sugerimos, para seguir com o que apresentamos neste material, que o aluno siga um tutorial que o capacite a:

- Instalar o Python (costuma vir instalado nas distribuições Linux);
  - Ter o Python e a ferramenta de instalação de módulos (sugerimos `pip`) disponíveis na variável `PATH` do sistema operacional;
- Instalar o Python IDLE (padrão na instalação do Python para Windows);
- Instalar, pelo menos, os módulos NumPy e Matplotlib; e
- Executar scripts de teste no Python IDLE (ou com o workflow com que você melhor se adaptou).

### 3.1 Uso do IDLE, execução de comandos e scripts

Uma das formas de utilizar a linguagem Python é por seu Shell, em que comandos na linguagem Python podem ser inseridos e executados um a um ao pressionar a tecla Enter, como em um terminal do Linux ou do DOS (também conhecido no Windows como prompt de comandos ou `cmd`). O IDLE, assim que aberto, é inicializado em um Shell. A indicação de que um comando pode ser inserido é feita pelo indicador `>>>` como mostra a figura 3.1.

No Shell os comandos podem ser digitados e executados um por vez. Isto é útil na realização de testes, em algum procedimento curto ou quando se tem

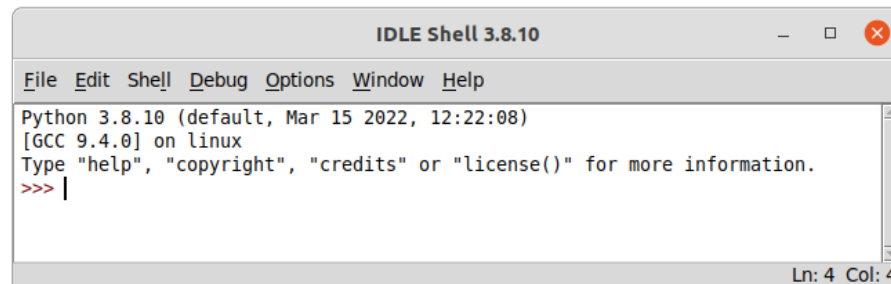


Figura 3.1: Python Shell do IDLE.

certeza que não há interesse em executar esta sequência de comandos repetidas vezes.

Se se deseja executar um código mais extenso ou que poderá ser executado várias vezes, é mais comum recorrer à criação de um script. Empregando o IDLE, pode-se criar o arquivo do script pelo caminho File → New File em seu menu superior. O IDLE abrirá uma nova janela similar a de um editor de texto para elaboração da sequência de comandos que formará o programa em linguagem Python. Ao salvar este script, convencionou-se empregar a extensão `.py`. Ele poderá ser aberto no futuro para nova execução.

A execução de um script pode ser realizada a partir do menu superior da janela do código pelo caminho Run → Run Module, ou pelo uso da tecla de atalho F5. O resultado da execução do script será exibido no IDLE Shell.

## 3.2 Aspectos básicos da sintaxe do Python

De forma geral, vamos seguir as seguintes diretrizes para construir um programa em Python:

- Não é necessário declarar variáveis ou inicializá-las;
- Cada comando é posto em uma linha (vários comandos podem ser escritos em uma mesma linha desde que separados por ponto-e-vírgula);
- Não é necessário identificar o fim do comando; e
- Os blocos de comando (os comandos que serão executados dentro de uma iteração ou condicional, por exemplo) têm seu início e fim identificados pela indentação.

### 3.2.1 Atribuição – o sinal de igual

A atribuição de um valor a uma variável em Python é realizada por meio do operador de atribuição `=` (sinal de igual), seguindo a regra:

```
[variável] = [valor a ser atribuído]
```

O código 3.1 mostra a atribuição de números às variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

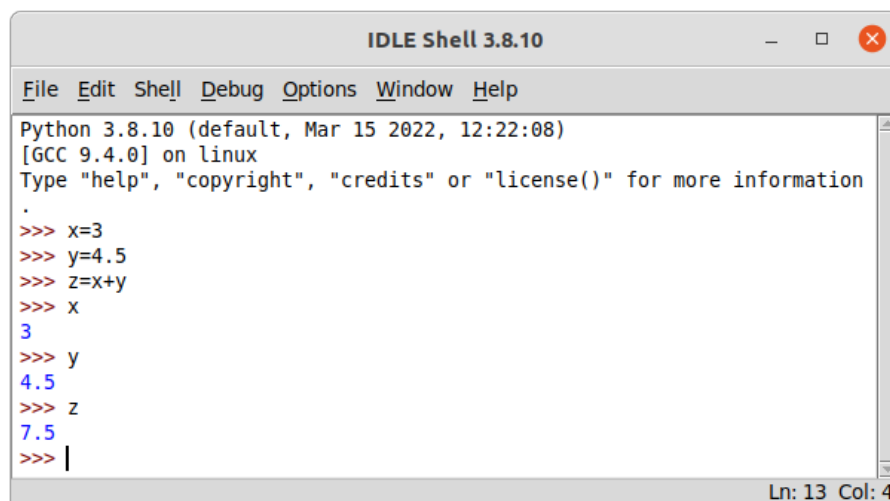


Figura 3.2: Execução do código 3.1 no Shell.

```
1 x = 3 # atribui o valor 3 à variável x
2 y = 4.5 # atribui o valor 4.5 à variável y
3 z = x + y # atribui o valor 7.5 = 3 + 4.5 à variável z
```

Código 3.1: Exemplo de atribuição e comentários em Python.

### 3.2.2 Comentários

A principal forma de comentar código em Python é por meio do comentário na linha feito pelo identificador `#`. A partir deste identificador, qualquer texto adicionado na linha será ignorado na interpretação e execução do programa. Assim, no código 3.1, os textos “atribui o valor 3 à variável  $x$ ”, “atribui o valor 4.5 à variável  $y$ ” e “atribui o valor  $7.5 = 3 + 4.5$  à variável  $z$ ” são comentários que são ignorados pelo Python, pois são todos precedidos na mesma linha por `#`.

### 3.2.3 Execução de comandos no Shell do IDLE

Teste rodar cada linha do código 3.1 escrevendo-as no Shell após o indicador de linha `>>>` e pressionando Enter ao fim de cada comando (não é necessário copiar os comentários). No Shell, digitar uma variável e pressionar Enter retornará na tela o valor atual da variável. Ao digitar o nome das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  seguidas da tecla Enter após executar o código 3.1, o Shell mostrará os valores 3, 4.5 e 7.5, relativos aos valores armazenados nas respectivas variáveis. Os resultados da realização deste procedimento ilustrado na figura 3.2.

### Exercícios de revisão

**Questão 3.1.** Repita as operações no Shell realizadas na figura 3.2.

### 3.2.4 Exibição básica – a função `print`

O artifício de digitar o nome da variável e pressionar Enter para visualizar seu valor só funciona no Shell. Se desejarmos o mesmo em um script, a forma mais simples é pelo uso da função `print`. Sua sintaxe é

```
print([variáveis ou objetos separados por vírgula], sep=' ',
      end='\n', file=None, flush=False)
```

Os argumentos precedidos por palavras chave (`sep`, `end`, `file` e `flush`) são opcionais. Indicar um caractere em `sep` define o que separa a impressão das variáveis ou objetos e `end` o que é posto ao fim da impressão e podem ser úteis na definição da aparência da exibição dos dados.

### 3.2.5 Execução de um script em Python

Podemos, agora, reproduzir os comandos que realizamos no shell utilizando um script. Basta criar um novo arquivo no IDLE pelo caminho File → New File (ctrl + N). Na janela de edição que é aberta, podemos digitar o código 3.2, salvar o arquivo do código e executá-lo no Shell pela caminho Run → Run Module (F5) disponível no menu do editor.

```
1 x = 3
2 y = 4.5
3 z = x + y
4 print(x, y, z, sep=';')
```

Código 3.2: Exemplo de código para um script simples.

Com isto, o script será executado e seu resultado será exibido no Shell, que mostrará `3;4.5;7.5`, o resultado da impressão dos valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  separados por ponto e vírgula. Lembre que, por convenção, os scripts de Python são arquivos com a extensão `.py`.

### Exercícios de revisão

**Questão 3.2.** Crie um arquivo `.py` com o código 3.2 e execute o script, verificando o resultado da execução no Shell.

### 3.2.6 Strings

Strings são conjuntos de caracteres que podem ser atribuídos à variáveis. Para declará-los, basta digitar os caracteres entre aspas duplas ou simples. O código 3.3 mostra a declaração dos strings  $x$  e  $y$  e a impressão dos mesmos com a função `print`. Como não foi declarado o tipo de separação desta função, ela usa o separador padrão que consiste em um espaço.

Tabela 3.1: Operações matemáticas, de comparação e lógicas definidas no Python.

operação		comparador		operador lógico	
adição	+	igual	==	negação	<b>not</b>
subtração	-	diferente	!=	e-lógico	<b>and</b>
multiplicação	*	maior que	>	ou-lógico	<b>or</b>
divisão	/	menor que	<		
divisão inteira	//	maior ou igual	>=		
resto da divisão	%	menor ou igual	<=		
potenciação	**				
multiplicação de matriz	@				

```

1 x = "imprimindo "
2 y = 'dois strings '
3 print(x,y)

```

Código 3.3: Uso de strings.

### 3.2.7 Entrada de dados básica – a função input

O script pode solicitar ao usuário que digite um valor que poderá ser passado para uma variável como um string utilizando a função `input` cuja sintaxe é

```

1 input([mensagem])

```

O código 3.4 solicita ao usuário para digitar seu nome e idade. A entrada é realizada quando o usuário pressiona Enter. Em seguida as variáveis `nome` e `idade`, já preenchidas com os strings contendo a informação são empregadas na função `print`.

```

1 nome = input("Informe seu nome: ")
2 idade = input("Informe sua idade: ")
3 print("Você é ", nome, " e tem ", idade, " anos.")

```

Código 3.4: Uso da função input.

### Exercícios de revisão

**Questão 3.3.** Ponha o código 3.4 em um arquivo e o execute como script.

### 3.2.8 Operações matemáticas básicas, comparações e operações lógicas

O Python tem definido como padrão as operações básicas listadas na tabela 3.1. A execução do código 3.5 tem como resultado a listagem dos valores

5.5; -25.5; 24.64; 6.428571428571429; 6; 3; 7776.0, correspondentes ao resultado respectivo das operações realizadas no código.

```

1 a = 3 + 2.5
2 b = 4.5 - 30
3 c = 3.2 * 7.7
4 d = 45 / 7
5 e = 45 // 7
6 f = 45 % 7
7 g = 36 ** 2.5
8 print(a,b,c,d,e,f,g, sep='; ')
```

Código 3.5: Código para exemplificar emprego de operadores matemáticos.

As operações de comparação da tabela 3.1 retornam verdadeiro ou falso. É importante observar que, tal como na linguagem C, o sinal de igual é empregado para a operação de atribuição. Por esta razão, a comparação utiliza um par de sinais de igualdade. O código 3.6 apresenta exemplos de comparações e operações lógicas sob o formato da impressão dos valores true ou false de acordo com o resultado dos testes colocados como parâmetro da função `print`.

```

1 x = 3
2 print("x é igual a 3? R: ",x==3)
3 print("x é igual a 4? R: ",x==4)
4 print("x é diferente de 4? R: ",x!=4)
5 print("x é maior do que 4? R: ",x>4)
6 print("x é menor do que 3? R: ",x<3)
7 print("x é maior ou igual a 4? R: ",x>=4)
8 print("x é menor ou igual a 3? R: ",x<=3)
9 print("x é menor do que 6 e maior do que 4? R: ", x<6 and x>4)
10 print("x é menor do que 6 ou maior do que 4? R: ", x<6 or x>4)
11 print("x não é igual a 5? R: ", not x==5)
```

Código 3.6: Exemplo do uso de comparações e de operadores lógicos.

Vamos retomar a multiplicação de matriz que emprega o operador `@` na seção 3.3.2 quando conseguiremos definir as matrizes utilizando o módulo NumPy.

### Exercícios de revisão

**Questão 3.4.** Repita as operações dos códigos 3.5 e 3.6 no Shell, verificando o emprego dos operadores aritméticos e lógicos. Mude o valor da variável `x` na primeira linha para 2, 4, 5, 6 e 7, execute o script em cada caso e veja o resultado dos novos testes.

### 3.2.9 Controle de fluxo condicional – uso do `if`

Os scripts que vimos até aqui realizam os comandos listados na ordem em que são escritos. É possível alterar esse fluxo de execução invocando uma condição por meio da construção conhecida como `if`, que deve seguir a sintaxe

```

if [teste condicional]:
    [primeiro comando que será realizados se o teste é
     verdadeiro]
    [segundo comando, etc.] #os comandos devem estar indentados
     para estarem no bloco do if

```

Pode-se realizar testes sucessivos após uma falha (um resultado falso no teste condicional) empregando uma construção idêntica ao do **if** (se) chamada **elif** (de *else, if* – senão, se), que também demandará um novo teste condicional. Este novo teste pode ser repetido várias vezes. Um condicional final pode ser feito opcionalmente com o uso do **else**, (senão), e que não demanda um teste. Simplesmente será executado se todos os outros testes condicionais falharem. Um exemplo desta construção é mostrada no código 3.7

```

1  x = 4 # mude o valor de x para 5, 5.5, 6 ou 7 para verificar o
   funcionamento do if
2  if x<5:
3      print("x é menor do que 5")
4  elif x==5:
5      print("x é igual a 5")
6      print("está mensagem só vai ser exibida quando x for igual
   a 5")
7  elif x==6:
8      print("x é igual a 6")
9  elif x>6:
10     print("x é maior do que 6")
11 else:
12     print("x está entre 5 e 6")

```

Código 3.7: Uso de controle de fluxo condicional.

### 3.2.10 Controle de fluxo por iterações – uso do **while** e **for**

Uma segunda forma de realizar mudança no fluxo dos comandos é pela repetição de um trecho de código de forma repetitiva. Chamamos cada repetição de iteração. A construção mais simples que realiza iterações é a **while** (enquanto), cuja sintaxe é

```

while [teste condicional]:
    [primeiro comando da iteração]
    [segundo comando, etc] #os comandos devem estar indentados
     para estarem no bloco do while

```

Enquanto o teste condicional for verdadeiro, os comandos indentados abaixo do **while** serão repetidos.

O código 3.8 é um exemplo do uso das iterações do **while**. A variável **texto** é alimentada com um string inicial que é substituído dentro do **while** pelo string dado pelo usuário. Enquanto o usuário não digitar **encerrar**, o loop continuará a solicitar que dê uma entrada de texto e a exibir o que foi digitado.



```

1 texto = "inicial"
2 while texto != "encerrar":
3     texto = input('Digite "encerrar" para terminar o script: ')
4     print("Você digitou:", texto)
5 print("As iterações foram encerradas")

```

Código 3.8: Realização de iterações com **while**.

A segunda construção que veremos para realizar iterações é o **for**, cuja sintaxe é

```

for [variável] in [objeto iterável]:
    [primeiro comando da iteração]
    [segundo comando, etc] #os comandos devem estar indentados
                        para estarem no bloco do for

```

O Python possui alguns objetos classificados como *iteráveis*, capazes de prover uma iteração por estarem organizados em uma sequência ou ordem. Na construção **for**, vamos utilizar com frequência os objetos iteráveis gerados pela função **range**. Ela tem três possíveis sintaxes

```

range([valor de parada])
range([valor inicial], [valor de parada])
range([valor inicial], [valor de parada], [passo])

```

Se é fornecido apenas uma variável, como **range(6)**, por exemplo, o valor inicial é tomado como 0 e o passo é unitário. Este comando gerará a sequência 0, 1, 2, 3, 4 e 5, pois o valor de parada nunca é incluído. Se forem fornecidos dois, valores, como **range(3,6)**, teremos a sequência 3, 4 e 5. Temos um novo valor inicial mas ainda com passo unitário. Por fim, com os três valores, como em **range(1, 6, 2)**, geraremos 1, 3 e 5, uma vez que começaremos do valor 1 e teremos um passo de tamanho 2.

Como exemplo do uso do **for** e **range**, veja o código 3.9 que gera o texto mostrado no comentário.

```

1 print("Os números pares menores do que 20 são:",end=" ")
2 for i in range(20):
3     if i%2==0:
4         print(i, end=" ", )
5 print("e só.") #termina o texto "Os números pares menores do
                        que 20 são: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, e só."

```

Código 3.9: Realização de iterações com **for** empregando iterável gerado por **range**.

### Exercícios de revisão

**Questão 3.5.** Faça um script para pedir repetidamente números inteiros ao usuário. O programa informa se o número é divisível por 3, 5 e/ou 7. Caso o usuário escreva “encerrar”, o script é concluído. Se a função **input** for empregada, ela retorna uma variável do tipo string, de sorte que para realizar contas com esta

variável, poderá ser necessário empregar a função `int(x)`, que converte o string para inteiro interpretando o valor escrito como número.

### 3.2.11 Importando módulos

As funcionalidades nativas do Python são muitas e eficazes, mas não são suficientes para cobrir alguns cálculos mais complexos. Em especial, ele não tem suporte para cálculos com funções trigonométricas ou com matrizes, que, como já dissemos, serão fundamentais em nosso estudo. A comunidade de programadores do Python é forte e capaz de acrescentar novas funcionalidades ao Python pelo uso de módulos, muitos dos quais gratuitos e capazes de acrescentar as mais diversas funcionalidades a esta linguagem de programação.

A várias formas de incluir as funcionalidades de um módulo em um programa. Uma das formas mais comuns é pelo uso do comando `import` utilizando a sintaxe

```
import [nome do módulo] as [apelido para o módulo]
```

tornando disponível todas as funcionalidades do módulo importado utilizando o apelido dado.

Pode-se ainda utilizar a sintaxe

```
from [nome do módulo] import [pacotes ou partes do módulo  
separados por vírgula]
```

Neste caso, como foi feita uma seleção de partes do módulo, não é necessário repetir o nome do módulo (ou seu apelido) para invocar suas partes. Em um caso extremo, pode-se importar todo um módulo com esta sintaxe ao pôr um asterisco (\*) nos pacotes ou partes do módulo. Esta prática não é recomendada pois poderá sobrepor uma grande quantidade de nomes empregados pelo módulo e causar conflitos.

Vamos ilustrar exatamente a diferença entre estas sintaxes com o pacote NumPy na seção 3.3.2.

## 3.3 Uso do Python para auxílio na matemática

Agora vamos utilizar o Python para explorar algumas das questões matemáticas que já apresentamos e que nos auxiliarão a estudar as séries de Fourier de tempo discreto.

### 3.3.1 Realização de somatórios com iterações

Um emprego matemático importante das iterações é a automatização do cálculo de somatórios. Isto só é verdade se pudermos calcular os termos do somatório a cada iteração. Uma forma de fazer isto é criando uma variável, que em nossos exemplos chamaremos de `soma`, e inicializá-la com o valor 0 (zero), elemento neutro da soma. Dentro da iteração, calculamos o próximo termo da soma, que chamaremos de `parcela` e calculamos

```
soma = soma + parcela
```

Para compreender este comando, lembre que o sinal de igual realiza a atribuição. No computador, primeiro é feito o cálculo indicado no lado direito, para só então

a atribuição modificar o valor da variável do lado esquerdo. Isto significa que o computador soma o antigo valor registrado na variável `soma` com o valor de `parcela` e só após a realização da conta, é que ele atribui este resultado à variável `soma` novamente, atualizando seu valor. Com uma iteração contendo este comando, o valor do somatório vai sendo calculado sucessivamente pela adição de cada parcela à variável `soma` até que seu valor final seja atingido ao fim de todas as iterações. Este processo em que uma variável recebe o seu valor anterior somado com uma nova parcela é conhecido como *acumulação*.

Uma anedota conta que um professor solicitou a turma de Gauss que calculassem a soma de todos os números inteiros até 100 ao que em pouco tempo, e para a surpresa do professor, Gauss respondeu 5050 por ter usando a fórmula

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{(100+1)100}{2} = 5050$$

que ele teria descoberto ali mesmo. Nós podemos utilizar o computador para realizar a soma mítica de Gauss na força bruta fazendo uma variável `k` percorrer os valores de 1 a 100, utilizando a função `range(1,101)`, e realizando as 100 iterações com um `for` como descrito no código 3.10 fazendo `parcela = k` a cada iteração.

```

1 soma = 0
2 for k in range(1,101): #lembre que o 101 não é incluído
3     parcela = k
4     soma = soma + parcela
5 print("O somatório 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 =",soma)
```

Código 3.10: Realização do somatório da progressão de Gauss por iterações.

Como um último exemplo, vamos calcular o somatório da letra b questão 2.2 utilizando uma iteração do tipo `while`. Vemos que a regra geral para as parcelas  $p_k$  é

$$p_k = 12 \left( \frac{1}{4} \right)^k,$$

para  $0 \leq k \leq 5$ . Como o `while` não tem uma regra para atualizar uma variável a cada iteração, devemos inicializar o valor de `k` e atualizá-lo dentro da região indentada referente ao `while`. Com isso, o seu valor atual pode, além de calcular o nome valor da `parcela`, auxiliar no teste condicional que encerrará as iterações. Empregamos estas ideias e elaboramos o código 3.11 cuja execução responde 0 somatório é 15.99609375, coincidente com  $4095/256$ , o valor do somatório.

```

1 soma = 0
2 k = 0
3 while k <= 5:
4     parcela = 12 * (1/4)**k
5     soma = soma + parcela
6     k = k + 1 #atualização do valor de k
7 print("O somatório é", soma)

```

Código 3.11: Realização do somatório da letra b questão 2.2.

### Exercícios de revisão

**Questão 3.6.** Faça dois scripts para verificar o resultado do somatório do exemplo 2.3 pelo cálculo do somatório parcela a parcela (sem uso de fórmulas). Em um script utilize o **while** e no outro o **for**.

**Questão 3.7.** Faça um script para realizar o somatório

$$S = \sum_{k=0}^{50} \sum_{n=1}^{25} 3kn^2$$

parcela a parcela.

**Questão 3.8.** Use o Python para recalcular os somatórios da questão 2.4 com um script. Desta vez, empregue 1000 termos. Calcule o erro do truncamento nestes casos.

**Questão 3.9.** Faça um script que pede ao usuário um valor de erro e indica quantas parcelas são necessárias para obter  $\pi$  com este erro através do somatório alternado para  $\pi/4$ . (Sugestão: use um **while** para calcular o somatório parcial a cada parcela enquanto o erro não é atingido).

### 3.3.2 Módulo NumPy, funções trigonométricas e matrizes

O NumPy é um módulo do Python desenvolvido como um projeto de código aberto para prover esta linguagem com capacidades de computação numérica. Nossos cálculos de funções trigonométricas e matrizes serão realizados com as funcionalidades obtidas com o NumPy. Uma delas é a definição da constante  $\pi \approx 3,14$ . O código 3.12 importa o módulo NumPy sem dar-lhe nenhum apelido e imprime o valor de  $\pi$  deste módulo.

```

1 import numpy
2 print("O valor de pi no módulo NumPy é:", numpy.pi) #Obtemos na
saída o texto "O valor de pi no módulo NumPy é:
3.141592653589793".

```

Código 3.12: Importando NumPy e utilizando sua definição para  $\pi$ .

Veja que para ser capaz de invocar o valor de  $\pi$  cujo nome, no módulo, é **pi**, é necessário usar a sintaxe **numpy.pi** ao longo do código, pois apenas importamos o módulo NumPy, o que permite o acesso a suas partes pela sintaxe **numpy.[nome da parte]**.

O código 3.13 simplifica essa invocação dos componentes do módulo NumPy pelo uso do apelido `np`. Fizemos referência a  $\pi$  e a constante natural  $e$  definida neste módulo utilizando `np.pi` e `np.e`.

```

1 import numpy as np
2 print("O valor de pi no módulo NumPy é:",np.pi)
3 print("O valor da constante natural é:",np.e)

```

Código 3.13: Importando NumPy com o apelido `np`.

Já o código 3.14 importa apenas a variável `pi` do NumPy. Durante a execução, a linha 2 faz referência a esta constante apenas como `pi` pela forma como ela foi importada na linha 1. Já a linha 3 resulta em erro durante a execução, pois o programa desconhece qualquer definição de `e`, já que o mesmo não foi importado nem definido.

```

1 from numpy import pi
2 print("O valor de pi no módulo NumPy é:",pi)
3 print("O valor da constante natural é:",e)

```

Código 3.14: Importando NumPy com o apelido `np`.

Por fim, o código 3.15 funciona perfeitamente pois todas as partes do módulo NumPy foram importados, podendo ser referenciados pelo nome.

```

1 from numpy import *
2 print("O valor de pi no módulo NumPy é:",pi)
3 print("O valor da constante natural é:",e)

```

Código 3.15: Importando NumPy com o apelido `np`.

Como desvantagem deste último código, todos os nomes definidos no NumPy agora estão em uso, resultando no uso de um grande número de variáveis e função com os quais deve-se ter especial cuidado para que não sejam sobrescritos.

### Funções trigonométricas

O módulo NumPy nos disponibilizará todas as funções trigonométricas que precisamos. Os nomes empregados no módulo são idênticos ao padrão para estas funções em inglês e são mostrados na tabela 3.2.

As funções trigonométricas do NumPy aceitam como argumento apenas ângulos pela medida do arco em radianos. O código 3.16 apresenta um script que calcula os seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis de  $30^\circ = \pi/6$  rad,  $45^\circ = \pi/4$  rad e  $60^\circ = \pi/3$  rad, bem como as tangentes inversas que resultam nestes ângulos.

Tabela 3.2: Definições de funções trigonométricas no NumPy.

função	nome implementado
sen	<b>sin</b>
cos	<b>cos</b>
tg	<b>tan</b>
arcsen ou $\text{sen}^{-1}$	<b>arcsin</b>
arccos ou $\text{cos}^{-1}$	<b>arccos</b>
arctg ou $\text{tg}^{-1}$	<b>arctan</b>

```

1 from numpy import *
2 print("O seno de 30° é", sin(pi/6))
3 print("O seno de 45° é", sin(pi/4))
4 print("O seno de 60° é", sin(pi/3))
5 print("O cosseno de 30° é", cos(pi/6))
6 print("O cosseno de 45° é", cos(pi/4))
7 print("O cosseno de 60° é", cos(pi/3))
8 print("A tangente de 30° é", tan(pi/6))
9 print("A tangente de 45° é", tan(pi/4))
10 print("A tangente de 60° é", tan(pi/3))
11 print("O arco cuja tangente vale (3^0.5)/3 é", arctan
    (3**0.5/3))
12 print("O arco cuja tangente vale 1 é", arctan(1))
13 print("O arco cuja tangente vale 3^0.5 é", arctan(3**0.5))

```

Código 3.16: Utilizando NumPy para calcular seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis e a inversa da tangente para estes mesmos ângulos.

### Matrizes

No NumPy, as matrizes são chamadas pelo termo *array*, que em inglês significa matriz (embora também haja a tradução *matrix*) ou arranjo. O termo *array* é mais abrangente, e pode representar espécies de matrizes multidimensionais ou arranjos multidimensionais, já que as matrizes convencionais são entidades de duas dimensões (com componentes horizontal e vertical ou de linha e coluna). Podemos criar uma matriz utilizando a função **array**, que recebe como parâmetro os elementos da matriz. Uma matriz linha recebe esta única linha entre colchetes com os elementos separados por vírgula como a matriz **A** definida no código

```

from numpy import *
A = array([3,4,-1])

```

que representará a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para criar uma matriz com várias linhas, cada linha deve estar entre colchetes com os elementos separados por vírgula, e o conjunto das linhas também deve estar entre colchetes e cada linha separada da outra por vírgulas como em

```
B = array([ [3,4,-1] , [1,-2,6] , [5,-1,2] ])
```

que representará a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na tabela 3.1 já havíamos listado o operador `@` (arroba) como o reservado para multiplicação de matriz. O código 3.17 é a realização no Python da multiplicação que fizemos como exemplo na seção 2.4.2.

```

1 from numpy import *
2 A = array([[ 1, 0],[2, -2],[ 1, 3]])
3 B = array([[ 4,-1], [-1,1] ])
4 C = A@B
5 print(C)

```

Código 3.17: Multiplicação de matrizes.

### Matrizes unidimensionais

Matematicamente, toda matriz é um ente bidimensional, possuindo linhas e colunas, e isto faz diferença na matemática. Os arrays do NumPy tendem a interpretar matrizes linha e matrizes coluna como idênticos e unidimensionais. A matriz **A** que criamos como `A = array([3,4,-1])` será, no NumPy, unidimensional. Podemos verificar isto executando `A.shape` e observando ter como resultado o único valor `(3,)`, o que significa que para o NumPy, o array **A** só tem uma dimensão de tamanho 3 (contendo 3 elementos).

Já se definirmos `C = array([ [3,4,-1] ])` e executarmos `C.shape`, teremos como retorno o par `(1,3)`, indicando a existência de duas dimensões, sendo a primeira com um único elemento (uma linha) e a segunda com três (três colunas), que é como queríamos que uma matriz de fato fosse. Isto ocorre pois cada aninhamento de colchetes aumenta em um a dimensão de um array. O ideal na definição de qualquer matriz bidimensional seria que ela fosse realizada com aninhamentos de exatamente dois nível de colchetes.

As diferenças entre os dois casos também se tornam evidentes quando se tenta obter as matrizes transpostas (em que os elementos tem suas posições de linha e coluna trocados) de **A** e **C** por meio da função `transpose`. As matrizes `D = transpose(A)` e `E = transpose(C)` terão dimensões `(3,)` e `3,1`, respectivamente. Veja que para o NumPy, transpor **A**, um array unidimensional, resulta em uma entidade também unidimensional e com mesma quantidade de elementos. Já na transposição de **C**, um array bidimensional, vemos que a quantidade de linhas fica invertida com relação a de colunas já que este é o efeito esperado da transposição.

Apesar deste detalhe e deste preciosismo com as matrizes de uma dimensão, os cálculos que realizaremos com matrizes linha ou coluna só terão uma única forma de interpretação para a sua geometria, de sorte que realizar o produto matricial resultará na matriz produto desejado, mas o programador deve estar atento a este detalhe na implementação das matrizes no NumPy.

### Acessando e modificando elementos de uma matriz

Se tivermos criado um array  $A$  com o módulo NumPy representando uma matriz  $A$ , seus elementos  $a_{ij}$  podem ser acessados como  $A[i, j]$ , ou seja, ponto o número da linha e coluna separadas por vírgula entre colchetes. *Há uma diferença muito importante* entre  $i$  e  $j$  comumente empregado na matemática e o  $i$  e  $j$  utilizados na localização de linha e coluna de um elemento de matriz. Em  $A_{m \times n}$  o primeiro elemento é  $a_{11}$  e o último é o elemento  $a_{mn}$ . Já no Python, matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  tem como primeiro elemento  $A[0,0]$  e como último  $A[(m-1), (n-1)]$ . Ou seja, no Python, o número que convencionamos a ordem de uma linha ou coluna inicial é 0, e não o 1. Cuidado deve ser tomado, portanto, quando se estiver tomando como base um texto matemático pois na sua implementação em Python deverá haver uma compensação de uma unidade com relação a estes valores seguindo

$$\underbrace{i}_{\substack{\text{ordem} \\ \text{no Python}}} = \underbrace{i}_{\substack{\text{ordem} \\ \text{convencional} \\ \text{na matemática}}} - 1.$$

O código 3.18 acessa os elementos de  $A[2,1]$  e  $A[0,1]$  e os imprime. Em seguida, modifica os valores de  $A[0,0]$  e  $A[1,1]$ .

```

1 from numpy import *
2 A = array([[ 1, 0],[2, -2],[ 1, 3]])
3 print(A[2,1], A[0,1]) #resulta em 3 0, os elementos da terceira
   linha, segunda colunas e primeira linha, segunda coluna.
4 A[0,0]=4
5 A[1,1]=5
6 print(A) #exibe a matriz A modificada e dada por [[4 0],[2
   5],[1 3]]

```

Código 3.18: Acessando e modificando os elementos de uma matriz.

### Preenchimento de matrizes com iterações

Podemos empregar as iterações provenientes das construções **for** ou **while** e preencher uma matriz que possua uma regra de formação. Na seção 2.4.1 utilizamos a matriz  $B_{3 \times 3} = [b_{ij}]$ , tais que  $b_{ij} = i + j$  como exemplo de matriz com regularidade de onde obtivemos a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Podemos fazer o mesmo com um script, tomando dois cuidados:

- Criar ou inicializar a matriz usando as funções **zeros**, **ones** ou **empty**, por exemplo. Todas recebem como parâmetro um par de números, designado **tuples**. Eles devem estar dentro de parêntese e separadas por vírgula, e determinarão a ordem da matriz criada. A chamada **empty((4,3))**, por exemplo, cria uma matriz  $4 \times 3$  “vazia” (o que na prática significa que não se tem controle sob seu conteúdo inicial). Já as funções **zeros** e **ones**



cria matrizes com todos os elementos iguais a zero e um, respectivamente. A função `empty` é computacionalmente a mais eficiente para criar uma matriz “vazia”.

- Lembrar que a primeira linha e primeira coluna são identificadas pelo índice 0, o que pode acarretar alguma modificação na regra de formação dos elementos da matriz definido no formato matemático, que convencionou o 1 como índice da primeira linha ou primeira coluna.

Tomados os cuidados acima, a regra geral para gerar uma matriz `B` a partir da mesma regra acima será  $B[i,j] = (i+1) + (j+1)$ . O código 3.19 cria esta matriz a partir de uma matriz vazia usando a função `empty` e a preenche utilizando duas iterações *for aninhadas* (uma *for* dentro da outra) de modo a percorrer todos os valores de `i` e `j` entre 0 e 2. Por fim exibe o valor da matriz obtida, que será idêntica a obtida na equação 3.1.

```

1 from numpy import *
2 B = empty((3,3))
3 for i in range(3):
4     for j in range(3):
5         B[i,j] = (i+1) + (j+1)
6 print(B)
```

Código 3.19: Determinação dos elementos da matriz por iterações.

### Atribuição com matrizes

As matrizes do NumPy são objetos e o efeito da operação de atribuição funciona de uma forma particular. Se criarmos uma matriz `A` como no código 3.20 e em seguida fizermos a operação de atribuição `B = A`, o efeito é de fazer com que ambas as variáveis, `A` e `B`, estejam vinculadas ao mesmo conteúdo da matriz que originalmente foi criada sob o nome de `A`. Assim, as operações que alteram valores dos elementos `A[0,0] = 5` e `B[1,1] = 10` nas linhas 7 e 8 deste código, estão modificando a mesma matriz. Este efeito é observado quando imprimimos as matrizes pela variável `A` ou `B` nas linhas 11 e 12, observamos que ambas as modificações alteraram a matriz chamada originalmente de `A`, que é a mesma matriz que chamamos também de `B`.

Desta forma, se quisermos que duas matrizes tenham mesmo conteúdo mas que após a atribuição não haja vínculo entre as matrizes, podemos recorrer às funções `copy` ou `copyto` do NumPy, como fizemos para as variáveis `C` e `D`, respectivamente, também no código 3.20. A execução do código revela que, após a cópia do conteúdo da matriz `A` e sua atribuição às variáveis `C` e `D`, modificações que empregam as variáveis `C` e `D` como as das linhas 9 e 10 afetam apenas as respectivas matrizes, que agora tem conteúdo separado da matriz `A`.

```

1 from numpy import *
2 A = array([[1,-2,3],[2,0,-3]])
3 B = A #a matriz A agora também pode ser acessada pela variável
   B
4 C = A.copy() #cria uma cópia de A e atribui a C
5 D = empty((2,3)) #para usar a função copyto, a matriz de
   destino deve existir
6 copyto(D,A) #na função copyto, a primeira matriz é a matriz de
   destino e a segunda a de origem
7 A[0,0] = 5
8 B[1,1] = 10
9 C[1,1] = 15
10 D[1,1] = 20
11 print("A =", A)
12 print("B =", B)
13 print("C =", C)
14 print("D =", D)

```

Código 3.20: Atribuição de matrizes e a relação das variáveis que ela representa.

### Exercícios de Revisão

**Questão 3.10.** Faça um script que cria as matrizes  $\mathbf{A}_{3 \times 3}$  e  $\mathbf{B}_{3 \times 2}$  cujos elementos são dados pelas regras

$$a_{ij} = i - 2j, \quad b_{ij} = 3(j + 2)^2 - 4i,$$

realize a multiplicação  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  e exiba as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ . A multiplicação  $\mathbf{BA}$  poderia ser realizada?

**Questão 3.11.** Faça um script para resolver aproximadamente o sistema de equações

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 0,76 \\ -2x & +y & -z & = -1,83 \\ -x & -y & +3z & = -6,18 \end{cases}$$

por tentativa e erro pelo método matricial, escrevendo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ . Considere que  $-2 \leq x, y, z \leq 2$  e a solução aproximada com uma resolução de 0,05. Faça cada tentativa gerando um conjunto solução proposto

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

calculando  $\mathbf{B}' = \mathbf{Ax}'$  e comparando  $\mathbf{B}'$  com  $\mathbf{B}$ . Varie  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  por meio de iterações e adote como solução aproximada o valor de  $\mathbf{x}'$  que determina o  $\mathbf{B}'$  mais próximo (geometricamente) de  $\mathbf{B}$ . Verifique se a solução aproximada é boa comparando com a solução exata  $\mathbf{x}$  que pode ser obtida por

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{Ix} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{A}^{-1}$  é a inversa da matriz  $\mathbf{A}$  e pode ser calculada com o `numpy.linalg.inv(A)` (a função `inv` do submódulo `linalg` do `numpy`).

**Corte de matrizes – o operador : (dois pontos)**

O operador `:` pode ser empregado para cortar um extrato de uma matriz utilizando uma das sintaxes

```
A[linha_inicial:linha_parada,coluna_inicial:coluna_parada] # o
    início e o fim do corte são indicados
A[:linha_parada,coluna_inicial:coluna_parada] # o início do
    corte é a primeira linha
A[linha_inicial:,coluna_inicial:coluna_parada] # o fim do
    corte é a última linha
A[:,coluna_inicial:coluna_parada] # emprega todas as linhas no
    corte
```

em que variamos a sintaxe apenas nos cortes das linhas. Os valores empregados correspondem aos índices das linhas e colunas da matriz. O valor de parada não é incluído. Por exemplo, `A[1:3,2:]` corresponde às linhas de índice 1 e 2 (a de índice 3, empregada como valor para parada, está excluída do corte) e todas as colunas a partir da de índice 2. O código 3.21 mostra vários exemplos de cortes sobre uma matriz  $4 \times 4$ . Ele realiza os cortes e mostra o array resultante e a dimensão do array de acordo com o informado no **shape** do array. Note que nas matrizes **G** e **H** não fizemos um corte em uma das dimensões, mantendo fixo o índice da coluna no primeiro caso e da linha no segundo. Com isto, os arrays **F** e **G** deveriam ser idênticos, mas perceba que ao estabelecer um corte nas linhas e colunas (mesmo que o corte só contemple uma coluna), o resultado em **F** é um array bidimensional com **shape** de `(4,1)`, tal como uma matriz coluna, enquanto **G** e **H** viraram arrays unidimensionais de mesma dimensão e **shape** de `(4,)`.

```
1 from numpy import *
2 A = array([[ 1, 0, 2, 4],[2, -2, 5, 2],[ 1, -3, 0, -1],[1, -6, 3, 2]])
3 print(A, A.shape)
4 B = A[1:3,1:3]
5 print(B, B.shape)
6 C = A[:3,1:3]
7 print(C, C.shape)
8 D = A[1:,1:]
9 print(D, D.shape)
10 E = A[:,1:]
11 print(E, E.shape)
12 F = A[:,0:1]
13 print(F, F.shape)
14 G = A[:,0]
15 print(G, G.shape)
16 H = A[0,:]
17 print(H, H.shape)
```

Código 3.21: Emprego de corte sobre um array  $4 \times 4$  com o operador `:`.

Esta sintaxe também pode ser empregada para atribuição como mostra o código 3.22. Nele, os valores iniciais de `A[2,1]`, `A[2,2]`, `A[3,1]` e `A[3,2]` são substituídos pela matriz **B** de ordem  $2 \times 2$ .

```

1 from numpy import *
2 A = array([[1,0,2,4],[2,-2,5,2],[1,-3,0,-1],[1,-6,3,2]])
3 print(A)
4 B = array([[7,-7],[-7,7]])
5 print(B)
6 A[2:,1:3] = B
7 print(A)

```

Código 3.22: Modificação de valores de um corte de um array empregando o operador `:`.

### Operações aritméticas elemento a elemento

Muitos dos símbolos aritméticos que vimos na tabela 3.1 também podem ser empregados para realizar operações elemento-a-elemento sobre matrizes. Isto significa, por exemplo, que se tivermos matrizes  $A$  e  $B$  de mesma ordem e calcularmos  $C = A*B$ , então  $C[i,j] = A[i,j] * B[i,j]$  – ou seja, cada elemento de  $C$  é a multiplicação de um elemento de  $A$  pelo elemento correspondente em  $B$  – e  $C$  terá também a mesma ordem de  $A$  e  $B$ . Veja que a existência da multiplicação elemento-a-elemento justifica o emprego de um símbolo especial para a multiplicação de matrizes. Não se deve, portanto, confundir  $A*B$  com  $A@B$ , que em geral resultarão em matrizes totalmente diferentes.

Esta é uma excelente forma de realizar uma grande quantidade de operações sem precisar recorrer a iterações. O código 3.23 mostra a realização de operações elemento a elemento na matriz  $A$  ou entre  $A$  e  $B$ .

```

1 from numpy import *
2 A = array([[1,2,3],[4,5,6]])
3 print(A)
4 B = array([[1,1.5,2],[1,1.5,2]])
5 print(B)
6 C = A+5 # cada elemento de A adicionado em 5
7 print(C)
8 D = 3*A # cada elemento de A multiplicado por 3
9 print(D)
10 E = A*B # cada elemento de A multiplicado pelo correspondente
    de B
11 print(E)
12 F = A/B # cada elemento de A dividido pelo correspondente de B
13 print(F)
14 G = A**2 # cada elemento de A elevado ao quadrado
15 print(G)

```

Código 3.23: Operações realizadas elemento a elemento nas matrizes  $A$  e  $B$ .

O cálculo elemento-a-elemento é muito útil para aplicar uma função à uma sequência, formando uma matriz linha ou uma matriz coluna com os valores sequenciais. Por exemplo, podemos criar uma matriz linha em que cada um de

seus elementos é um dos termos do somatório que já fizemos na questão 3.8

$$\sum_0^{999} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_0^{999} (2k+1)^{-2}, \quad (3.2)$$

partindo de uma matriz com os valores de  $k$ , que são todos os inteiros de 0 a 999. A função **arange** é similar a função **range**, com a diferença de que **arange** cria um array linha (a rigor um array unidimensional) NumPy e **range** cria um list, que é um tipo nativo do Python. Tanto o array quanto o lista são iteráveis e podem ser empregados em um controle de fluxo do tipo **for**.

O código 3.24 cria esta matriz linha. Como seus elementos são do tipo inteiro, eles não são passíveis ao cálculo de potências negativas. A função **double** converte os valores para o tipo ponto flutuante de dupla precisão. Na linha 4, por três operações elemento a elemento (multiplicação por 2, soma de 1 e potenciação com  $-2$ ) é obtida a **matrizParcelas** contendo as parcelas do somatório que calculamos. Por fim, a função **sum** do NumPy calcula a soma de todos os elementos da matriz de parcelas.

```

1 from numpy import *
2 k = arange(1000)
3 k = double(k)
4 matrizParcelas = (2*k+1)**(-2) #Matriz com elementos iguais às
   parcelas do somatório.
5 soma = sum(matrizParcelas)
6 print(soma)

```

Código 3.24: Obtenção de um dos somatórios da questão 3.8 por meio de matriz linha e operações elemento-a-elemento.

### Exercícios de Revisão

**Questão 3.12.** Faça um script que:

- (a) Construa a matriz  $\mathbf{C}_{6 \times 10}$  em que

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{10}, & i = 1 \\ \frac{1}{10} \cos \left[ \frac{2\pi}{10} (i-1)(j-1) \right], & i = 6 \\ \frac{2}{10} \cos \left[ \frac{2\pi}{10} (i-1)(j-1) \right], & \text{nos outros casos} \end{cases}.$$

Como sugestão, vemos que dentre as seis linhas, quatro respeitam uma regra geral, e a primeira e a última respeitam uma regra particular. Trate a primeira e última linha separadamente empregando corte de matriz e observando que estas linhas diferem do caso geral apenas devido a um fator de  $1/2$ .

- (b) Construa a matriz  $\mathbf{x}_{10 \times 1}$  dada por

$$x_{i1} = 0,3 \cos \left[ \frac{2\pi}{10} 3(i-1) \right] + 1,5 \cos \left[ \frac{2\pi}{10} 4(i-1) \right].$$

- (c) Obtenha a matriz  $\mathbf{a} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ . Analise os termos da matriz  $\mathbf{a}$ , sua localização na matriz e os coeficientes dos cossenos e suas frequências angulares. Há alguma regularidade?

Tabela 3.3: Pontos para esboçar a parábola  $y = x^2 - 6x + 5$ .

		$x$	$y$
$P_1$	adicional	0	5
$P_2$	raiz	1	0
$P_3$	adicional	2	-3
$P_4$	vértice	3	-4
$P_5$	adicional	4	-3
$P_6$	raiz	5	0
$P_7$	adicional	6	5

(d) Considere um caso mais geral em que a matriz  $\mathbf{x}$  é definida pelos termos

$$x_{i1} = c_1 \cos \left[ \frac{2\pi}{10} k_1 (i-1) \right] + c_2 \cos \left[ \frac{2\pi}{10} k_2 (i-1) \right].$$

Escolha valores reais quaisquer para  $c_1$  e  $c_2$  e valores *inteiros* entre 0 e 5 para  $k_1$  e  $k_2$  e observe se a regularidade observada na letra (c) se manteve para as modificações realizadas.

**Questão 3.13.** Utilizando operações elemento-a-elemento, construa as matrizes unidimensionais com a quantidade de elementos e seguindo as regras descritas.

- (a) Com 10 elementos em que  $x_i = 2,5i - 3$ , iniciando com  $i = 0$ .
- (b) Com 20 elementos em que  $x_i = -2 \left(\frac{i}{5}\right)^2 + 3 \left(\frac{i}{5}\right) - 2$ , iniciando com  $i = -5$ .
- (c) Com 16 elementos em que  $x_i = \sin \left(\frac{i}{4}\right)$ , iniciando com  $i = -8$ .
- (d) Com 100 elementos em que  $x_i = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{100} i\right)$ , iniciando com  $i = 0$ .

### 3.3.3 Módulo Matplotlib e gráficos

O que vimos até agora em termos de programação é suficiente para calcular tudo necessário para as séries de Fourier. Porém, estaremos tratando com grande quantidade de dados e a visualização gráfica é fundamental para potencializar a compreensão e a análise. Um importante instrumento que empregaremos, o espectro de frequências, é visual.

Para isto, vamos ver como obter três tipos de gráficos com base em amostras e como realizá-los utilizando o módulo Matplotlib.

O principal processo empregado por computadores para traçar gráficos é similar ao que nós utilizamos quando esboçamos um gráfico a mão livre. Suponha que você tenha que visualizar o gráfico da parábola

$$y = x^2 - 6x + 5.$$

Conhecendo uma parábola, sabemos que há pelo menos um ponto importante – o vértice da parábola. Se ela corta o eixo  $x$  teremos uma raiz (que coincidiria com o vértice) ou duas raízes distintas. Assim, a parábola pode ter até três do que chamamos de *pontos notáveis*.

Nesta parábola, em particular, temos como raízes  $x = 1$  e  $x = 5$  e como vértice  $x = 3$ . Para complementar o traçado do esboço, escolhemos quatro pontos adicionais simétricos com relação ao vértice, sendo dois entre o vértice e as raízes e dois para além das raízes. Para cada um deles encontramos os valores

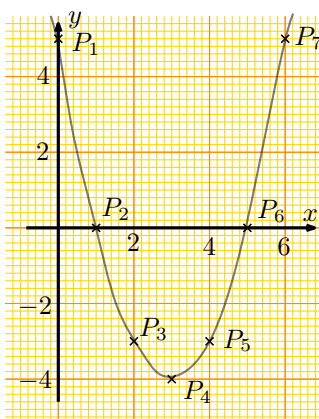


Figura 3.3: Esboço traçado a mão da parábola  $y = x^2 - 6x + 5$ .

do  $y$  correspondente de modo a obter 7 pontos, do  $P_1$  ao  $P_7$  que organizamos na tabela 3.3.

Para finalizar o esboço, lançamos os pontos de  $P_1$  a  $P_7$  em um papel quadriculado e ligamos a mão livre estes pontos no mais sincero esforço para desenhar uma parábola. O resultado final deverá ter um aspecto como o da figura 3.3.

Pois bem, os pontos  $P_1$  a  $P_7$  são *amostras* da parábola a partir das quais tentamos esboçar a sua geometria, composta, em teoria, por uma infinidade de pontos. Em geral escolhemos uma quantidade reduzida de pontos pois é muito custoso em termos de tempo construir uma tabela como a 3.3. Acontece que agora temos a excelente ferramenta das iterações e matrizes que utilizam o potencial de cálculo dos computadores modernos e podem calcular uma tabela com centenas e até milhares de amostras em menos de um segundo.

Assim, um computador pode fazer um gráfico de uma parábola em que as imperfeições são imperceptíveis pois a quantidade de amostras pode ser muito superior ao que costumamos fazer nos desenhos a mão livre. Deste modo, é possível adotar um critério de erro aceitável entre o gráfico real e o gráfico exibido pelo computador e escolher uma quantidade *finita*, porém grande de amostras, que sejam suficientes para a aplicação ou finalidade do gráfico.

Tomemos um critério. Se a função da construção do gráfico é exibi-lo na tela para fins ilustrativos, então a quantidade de pixels e a grossura da linha com a qual o gráfico é traçado, podem ser parâmetros na determinação da quantidade de amostras. Um gráfico com as dimensões que fizemos, ocupando menos de 5 cm, poderia ser traçado com 100 pontos sem que sobrasse sequer espaço para traçar uma linha entre os pontos, o que tenderá a possibilitar o traçado da parábola com precisão.

Para isso, precisamos definir 100 valores para  $x$  e calcular os 100 valores correspondentes de  $y$ . Se tomarmos como extremos do gráfico os mesmos pontos que utilizamos no gráfico traçado a mão, pondo  $x$  entre 0 e 6, o espaçamento entre os valores de  $x$  para que utilizemos 100 pontos deve ser de  $(6 - 0)/100$ . Vamos definir os valores de  $x$  utilizando a função `arange` como fizemos na seção 3.3.2 quando tratamos das operações aritméticas elemento a elemento. Podemos iniciar com o valor de  $x = 0$ , tomar como critério de parada  $x = 6$  e utilizar  $(6 - 0)/100$  como passo, e definir um array com os 100 valores de  $x$  utilizando

o código

```
x = arange(0,6,(6-0)/100)
```

Ele gerará um array para  $x$  com os valores 0, 0,06, 0,12, 0,18 ... 5,988 e 5,994. O valor 6, definido como parada, é excluído.

Dados os valores de  $x$  organizados em um array, fica fácil calcular os valores de  $y$  utilizando operações com array elemento a elemento como vimos na seção 3.3.2, e calcular todos os valores de  $y$  de uma só vez fazendo  $y = x**2 - 6*x + 5$ .

Com estes dois comandos, teremos a “tabela” com 100 valores de  $x$  e os 100 valores de  $y$  correspondentes. Basta, agora, utilizar a função `plot` disponível no módulo `matplotlib.pyplot` para que ela desenhe o gráfico. Esta função utiliza a sintaxe

```
plot( [array dos valores de x], [array dos valores de y], [
      formato] )
```

Vamos explorar algumas opções aos poucos, mas basta dizer que se pusermos como formato um string com a letra **x**, ele desenhará o gráfico marcando cada amostra com um **xis**. Com isso, podemos realizar o desenho do gráfico com o comando `plot(x,y,"x")`. A função `plot` desenha o gráfico “internamente”. Para exibi-lo, usamos a função `show`, que não tem argumentos.

O código 3.25 mostra o script final com os comandos que sugerimos postos em sequência. Note que nele, importamos todas as funções do NumPy para utilizarmos arrays e importamos o `matplotlib.pyplot` com o apelido `plt`, que deve preceder todas as chamadas das funções deste módulo.

```
1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 x = arange(0,6,(6-0)/100)
4 y = x**2 - 6*x + 5
5 plt.plot(x,y,"x")
6 plt.show()
```

Código 3.25: Determinação dos elementos da matriz por iterações.

O resultado da execução do código 3.25 é mostrado na figura 3.4. Conforme nossa estimativa, o uso de 100 pontos deixa bem delineado o perfil da parábola. Próximo ao vértice, onde as variações verticais são pequenas, os marcadores em **xis** empregados para localizar as amostras quase se sobrepõem. Mesmo quando nos afastamos do vértice, há pouco espaço entre os pontos, não sobrando espaço para que ela exiba curvatura acentuada. Ligar estes pontos com um pequeno segmento de reta não seria muito perceptível em sua exibição em uma tela. Para isso, podemos alterar o formato de **x** para **-** para deixar de marcar as amostras com um **xis** e passar a desenhar um segmento de reta entre cada amostra. O desenho da parábola resultante é suave, (não é possível perceber se tratar de um desenho feito pela ligação de segmentos de reta) devido a grande quantidade de amostras, mas, na realidade, é um gráfico aproximado por 99 segmentos de reta (e não uma parábola exatamente). O resultado desta alteração é ilustrado no gráfico da figura 3.5.

Os gráficos que fizemos até agora com o `matplotlib` tem um estilo “científico”, diferente do que costumamos encontrar em textos de matemática. Como



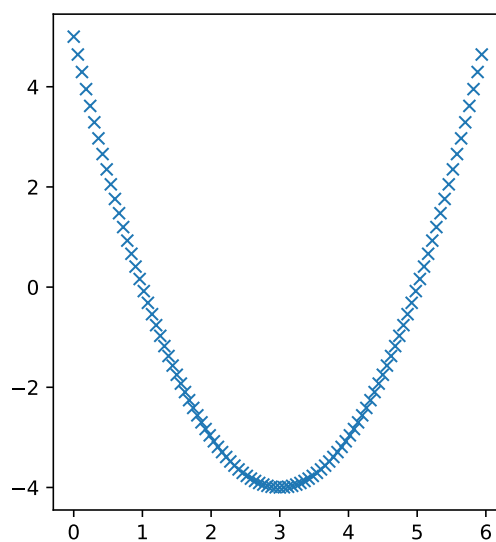


Figura 3.4: Marcação de 100 amostras da função  $y = x^2 - 6x + 5$ .

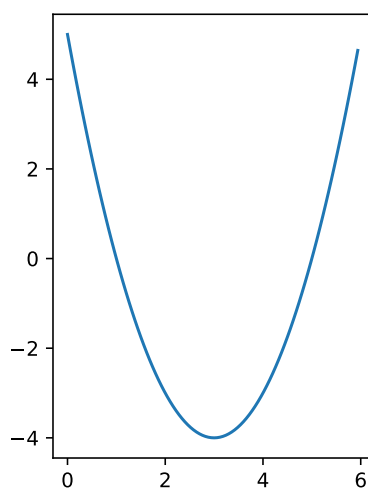


Figura 3.5: Traçado de 99 segmentos entre as 100 amostras da função  $y = x^2 - 6x + 5$ .

último exemplo, vamos utilizar várias opções deste módulo para ajustar a aparência do gráfico para que fique similar ao que costumamos fazer à mão como mostramos na figura 3.3. Estes ajustes são mostrados na figura 3.6 e obtidos com o código 3.26.

```

1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 plt.rcParams.update({"text.usetex": True, "font.family": "serif"
4                       }) #Usa TeX para texto
5 x = arange(0,6,(6-0)/100)
6 y = x**2 - 6*x + 5
7 fig, ax = plt.subplots() #Cria os objetos de figura e eixos
8 ax.plot(x,y, "-")
9 ax.spines['left'].set_position('zero') #Põe o eixo vertical
10 esquerdo na origem
11 ax.spines['right'].set_visible(False) #Retira o eixo vertical
12 direito
13 ax.spines['bottom'].set_position('zero') #Põe o eixo
14 horizontal inferior na origem
15 ax.spines['top'].set_visible(False) #Retira o eixo horizontal
16 superior
17 ax.set_xlabel("x", loc="right") #Escreve x no lado direito do
18 eixo horizontal
19 ax.set_ylabel("y", loc="top") #Escreve y na parte superior do
20 eixo vertical
21 ax.xaxis.get_major_ticks()[1].label1.set_visible(False) #
22 Remove a etiqueta do 0 na escala horizontal
23 ax.yaxis.get_major_ticks()[3].label1.set_visible(False) #
24 Remove a etiqueta do 0 na escala horizontal
25 plt.show()

```

Código 3.26: Determinação dos elementos da matriz por iterações.

### Gráfico de amostras ou gráfico de ramos

Vamos ver mais adiante que nosso principal interesse recairá sobre dados e funções que são amostrados, ou seja, os valores da variável independente não estão contidos em um contínuo, mas em uma quantidade finita e selecionada de valores chamadas amostras. Nossa intenção na construção do gráfico da figura 3.4 era traçar a linha da parábola, e, portanto, a natureza do que estávamos estudando era de um  $x$  contínuo. A amostragem foi uma simplificação para conseguirmos cumprir nosso objetivo de realizar um traçado contínuo. Neste caso, marcamos com uma cruz cada ponto da amostra.

É comum na literatura e na prática da representação gráfica de sistemas naturalmente amostrados adotar o gráfico de ramos, do inglês *stem*. A realização deste gráfico é feita no Python pela função `stem`, similar a `plot`, que vimos na seção anterior.

O código 3.27 faz o gráfico da função

$$y = \sin\left(\frac{6\pi}{25}x\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{25}x\right)$$

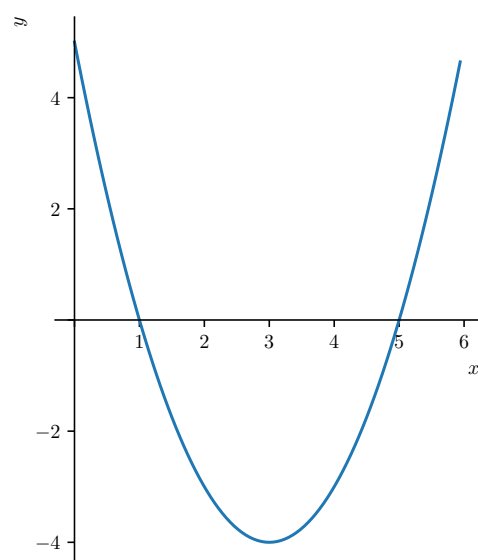


Figura 3.6: Gráfico de  $y = x^2 - 6x + 5$  com eixos detalhados similares ao dos gráficos desenhados a mão.

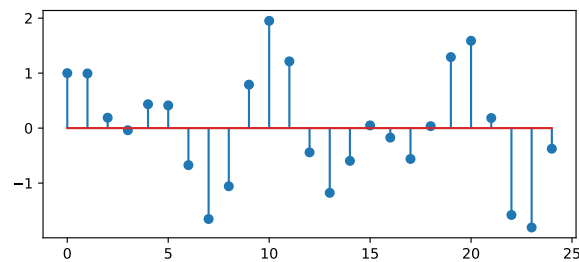


Figura 3.7: Gráfico de ramos (*stem*) gerado pelo código 3.27.

com valores inteiros de  $x$  entre 0 e 24 (25, usado como critério de parada, não entra no array de  $x$ ) no formato de gráfico de ramos. O resultado da aplicação do código é mostrado na figura 3.7.

```

1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 x = arange(0,25)
4 y = sin((3*2*pi/25)*x) + cos((5*2*pi/25)*x)
5 plt.stem(x,y)
6 plt.show()

```

Código 3.27: Determinação dos elementos da matriz por iterações.

### Exercícios de Revisão

**Questão 3.14.** Faça os gráficos das funções indicadas abaixo empregando a biblioteca Matplotlib.

- (a)  $2x^2 - 3x - 2$ , para valores de  $x$  entre  $-1$  e  $3$ .
- (b)  $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ , para valores de  $x$  entre  $0$  e  $5$ .
- (c)  $\sin\left(\frac{2\pi}{20}x\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{20}x\right)$  para valores de  $x$  entre  $-10$  e  $30$ .

**Questão 3.15.** Faça os gráficos de  $5\sqrt{2}\cos(\omega t - 3\pi/4) + (5+5\sqrt{3})\cos\omega t$  e  $10\sin(\omega t + \pi/3)$  e verifique graficamente que são iguais conforme prevíamos no exemplo 2.8. Considere  $\omega = 1$  rad/s e elabore o gráfico de dois períodos para ilustrar. Sugerimos ao usar os comando de `plot` empregar linha contínua em um gráfico e outro em tracejado com cores distintas, nesta ordem, antes de empregar a função `show`. Desta forma, será possível ver as duas cores, a da linha contínua por baixo e a da tracejada por cima e se as duas expressões forem realmente iguais, elas devem se sobrepor.



## Capítulo 4

# Amostragem

Terminamos o capítulo 3 trazendo uma evidência breve da importância da *amostragem*. Lá observamos o comportamento de uma função (ou de uma entidade qualquer) por meio de uma quantidade selecionada de valores específicos da variável independente. Nesse capítulo, concluímos apenas pela observação, sem recorrer a grande rigor matemático, que com uma quantidade razoável de amostras não é possível distinguir uma curva de um conjunto de segmentos de reta, de modo que amostrar a função resolveu o problema da visualização de uma função em um gráfico. Vamos entrar em maiores detalhes na natureza e nos efeitos da amostragem.

### 4.1 Ideia de sinais

O tema central desta obra, a série de Fourier de tempo discreto, é tópico tradicionalmente tratado na disciplina chamada Processamento de Sinais. Esta disciplina estuda como tratar *informações*, chamadas genericamente de *sinais*. Não há distinção rigorosa entre as ideias de sinais na engenharia e de funções na matemática, ou seja, um sinal é tratado matematicamente como uma função. Na prática de engenharia, os sinais costumam ser grandezas físicas reais que carregam informações relevantes para o funcionamento de um sistema e tratadas como variáveis dependentes. A grandeza pode ser uma corrente elétrica, uma intensidade luminosa, uma velocidade, uma posição angular, etc. Já o sistema é algum aparato tecnológico como um computador, um robô, um rádio, um eletrocardiógrafo, etc.

As tensões elétricas geradas pelo sistema nervoso para o estímulo do coração, por exemplo, são sinais de interesse para um eletrocardiógrafo. Poderíamos representar este sinal como  $v(t)$ , uma tensão elétrica em função do tempo.

Os sinais costumam ser grandezas que variam com o tempo, sua representação matemática toma a forma de uma variável dependente em função da variável independente de tempo. Outro tipo de variável independente comum é o espaço, que, por vezes, pode vir como várias variáveis correspondente às várias coordenadas do espaço. Neste texto vamos tender a interpretar a variável independente como tempo e vamos trabalhar com funções de apenas uma variável.

Para finalizar, Vamos dar dois exemplos de sinais: um sinal de áudio e uma imagem em preto e branco. O primeiro é fruto do som. O som pode

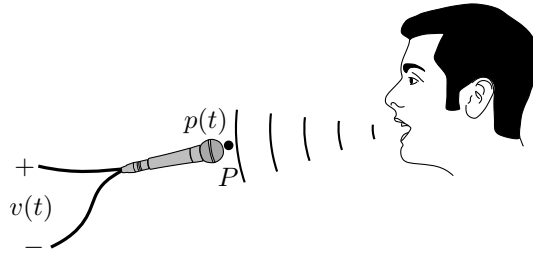


Figura 4.1: Exemplo de sinal de áudio.

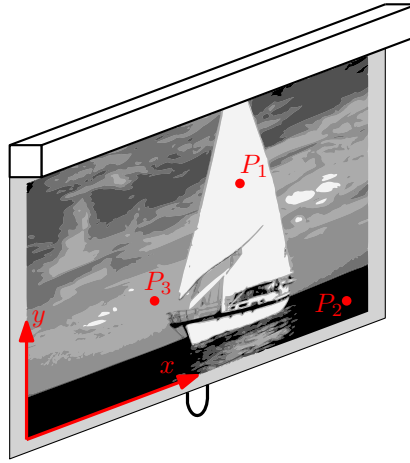


Figura 4.2: Exemplo da projeção de uma imagem.

ser considerado em si um sinal, pois sua natureza é a variação de pressão ao longo do tempo em um determinado ponto  $P$ , ou seja, pode ser um sinal  $p(t)$  de pressão mostrado na figura 4.1. Havendo um sensor elétrico capaz de captar estas variações de pressão, como o microfone, elas podem se tornar um sinal de tensão que varia ao longo do tempo  $v(t)$ . É utilizando este sinal elétrico que se torna mais fácil “gravar” o áudio, como vamos detalhar ainda mais na seção 4.2.

Podemos considerar uma fotografia como um caso do segundo exemplo, a imagem em preto e branco. A imagem, estática no tempo, é o exemplo de uma grandeza que varia no espaço. Isto é mais fácil de ilustrar se considerarmos a fotografia em uma tela de computador, ou projetada em uma parede branca de uma sala escura. A ausência de imagem, nestes casos, é o monitor apagado (escuro), ou a sala escura, quando o quadro de projeção também se encontra no escuro e visto como preto. A imagem clareia a medida que se acrescenta luz em alguns locais do monitor ou da parede, formando uma imagem pelo contraste de regiões claras e escuras. Podemos considerar, então, que a imagem em preto e branco é a intensidade da iluminação que varia com a posição,  $I(x,y)$ . Se em um local a intensidade assume um valor baixo, 0, por exemplo, então neste local temos uma região preta da imagem (ou escura de forma geral). A medida que o valor da intensidade aumenta, teremos a representação de tons de cinza cada vez mais claros. Quando a intensidade de iluminação atinge seu valor máximo,

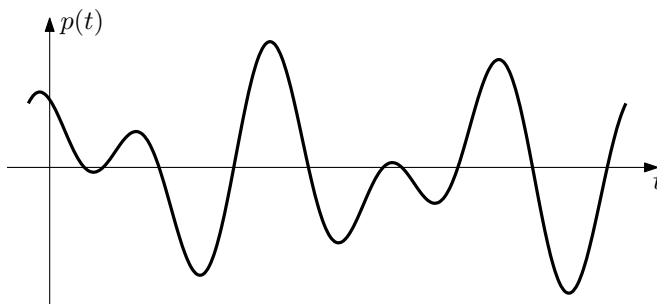


Figura 4.3: Forma do gráfico de  $p(t)$  obtido pela amplificação da vibração das ranhuras em um vinil.

teríamos uma região branca na imagem.

O sinal do tipo imagem em preto e branco (a rigor, em tons de cinza) está ilustrado na figura 4.2 para o caso de uma imagem projetada sob uma tela. Pusemos três pontos de exemplo,  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  e  $P_3 = (x_3, y_3)$ . Se supusermos que a intensidade máxima da iluminação, que torna a imagem branca, é  $I_{\text{máx}}$ , então,  $I(x_1, y_1) = I_{\text{máx}}$  é a intensidade no ponto  $P_1$ . Em  $P_2$  a imagem é preta, de modo que  $I(x_2, y_2) = 0$ . Por fim, em  $P_3$ , temos um valor intermediário como  $I(x_3, y_3) = 0,5I_{\text{máx}}$ .

## 4.2 Exemplos de sistemas amostrados e de “tempo” contínuo

Imagine agora que se deseja registrar o sinal do som como  $p(t)$  da figura 4.1. Uma solução do fim do século XIX consistiu em utilizar a variação de pressão sonora para mover um mecanismo amplificador capaz de controlar uma agulha “dura” e criar sulcos sobre um disco de resina (substituído pelo vinil por volta de 1940). Depois de criados os sulcos com material duro e abrasivo, uma agulha de material “mole” era utilizada para reproduzir o som gravado pelo processo inverso. Ao mover-se sobre o disco, seu movimento era amplificado para estimular uma variação de pressão pela vibração de uma membrana e gerar o som como uma reprodução do originalmente gravado.

O vídeo do canal Applied Sciences [6] mostra uma sucessão de imagens obtidas com microscópio eletrônico das ranhuras de um disco de vinil e seu efeito na agulha a medida que o disco gira. É possível ver como o movimento da agulha é suave, o que tem como consequência uma representação do sinal do som resultante  $p(t)$  contínuo como o esboçado na figura 4.3.

Vamos agora ver como um áudio está gravado em um computador. Utilizamos um *software* gratuito e popular de edição de som, o Audacity [7], e abrimos um arquivo de áudio contendo os 18 segundos iniciais da 5ª Sinfonia de Beethoven. O programa nos exhibe uma espécie de  $p(t)$ , que é a gravação do áudio armazenado no computador, em um gráfico que reproduzimos na figura 4.4. Ele é similar ao gráfico da figura 4.3 em que o eixo horizontal é o tempo e o vertical está ligado a intensidade do som, mas não é necessariamente a intensidade da pressão mas apenas uma representação da pressão em uma escala entre  $-1$  e  $1$ .



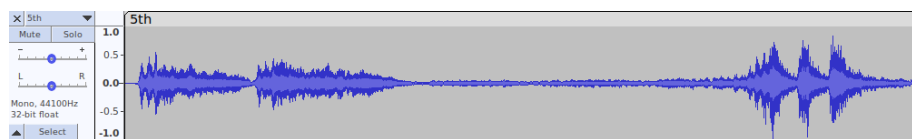


Figura 4.4: Gráfico de 18 segundos de áudio da 5ª sinfonia de Beethoven obtido no Audacity.

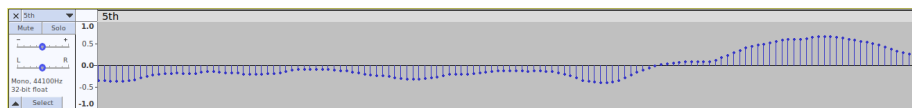


Figura 4.5: Gráfico de aproximadamente 1 milissegundo de áudio da 5ª sinfonia de Beethoven obtido no Audacity.

Ora, na figura 4.4 não conseguimos ver a linha suave de variação da intensidade, pois 18 segundos é um tempo muito grande durante o qual há muita variação do valor da grandeza de pressão no som. Para observar um traçado claro, utilizamos o próprio Audacity para ampliar a escala do eixo horizontal e “dar um zoom” no gráfico. O traço fica visível quando o gráfico cobre algo em torno de dezenas de milissegundos até que algo de muita importância para nós ocorre. Estamos observando uma escala de tempo tão curta que o Audacity mostra a real natureza de como o som é representado no computador – por meio de amostras. Neste momento, o software muda a exibição da onda do som para um formato similar ao da figura 4.5, que cobre apenas por volta de 1 milissegundo de um trecho do mesmo áudio. Nele, o Audacity explicita o caráter amostrado do som pelo emprego de um gráfico de ramos, tal como já vimos na seção 3.3.3.

Vulgarmente, as diferenças entre o áudio armazenado por um disco de vinil e por um arquivo de áudio no computador são explicitadas pelas qualificações de *analógico* e *digital*. Diz-se que o áudio do disco de vinil é armazenado em formato analógico enquanto que o do computador é armazenado em formato digital. Esta terminologia vulgar não está completamente incorreta, mas ela cobriria características adicionais e alguns complicantes que não vamos cobrir nesta obra. A rigor, a principal distinção que estamos salientando aqui é que a natureza do tempo no disco de vinil é de um *tempo contínuo*, enquanto que o tempo no áudio digital é amostrado, o que chamamos de *tempo discreto*.

O termo discreto aqui vem do mesmo radical de discriminar que significa perceber diferença, distinguir. Ou seja, cada momento de tempo é bem distinto pois eles são instantes separados e não aglutinados uns sobre os outros em um contínuo.

Outra característica importante é que, embora a convenção da terminologia seja dizer que os sinais são de tempo contínuo e de tempo discreto, nem sempre a variável independente é o tempo. Para o processamento de sinais, a princípio, o tipo da grandeza da variável independente não importa (isso não é verdade quando as ideias de passado e futuro, de causa e consequência e de estímulo e resposta podem ser importantes). Apenas para ilustrar, a mesma diferença entre o registro de áudio obtido no vinil e o armazenado no computador, aparece entre as imagens obtidas a partir de filmes fotográficos com relação às aquelas armazenadas no computador obtidas por câmeras digitais (ou escaneadas).



Figura 4.6: Imagem do veleiro da projeção da figura 4.2 reduzida a  $20 \times 15$  pixels.

Na fotografia analógica a luz causa uma reação no filme. Três produtos químicos – revelador, interruptor e fixador – interrompem as reações e garantem que as regiões sensibilizadas pela luz tenham seu grau de transparência alterado. As áreas mais expostas à luz ficam mais opacas gerando um filme chamado negativo. Neste caso, a variação da sensibilização é o que causa as diferenças na intensidade da luz na imagem, e esta variação é contínua com relação aos eixos espaciais  $x$  e  $y$  da imagem.

Em uma câmera digital, as regiões que são “sensibilizadas” são discretas<sup>1</sup> e chamadas de *células* do sensor. Como resultado, a imagem digital é formada por vários pontos designados pixels. Uma TV digital exibindo uma imagem no formato convencionado como 720p, por exemplo, está exibindo uma imagem com 921 600 pixels organizados em 720 linhas e 1 280 colunas.

Reduzimos a imagem do veleiro da figura 4.2 a uma figura digital de  $20 \times 15^2$  pixels (um total de 300 pixels, muito menos do que o 720p e, portanto, uma qualidade muito inferior) para obter a imagem da figura 4.6.

Nas imagens digitais em preto e branco, temos um conjunto discreto e finito de valores de  $x$  e  $y$  para variáveis independentes que determinam a posição e também uma quantidade finita e discreta de valores de intensidade  $I(x, y)$ . Nesta imagem,  $x$  está limitado a valores inteiro entre 0 e 19 e identifica da primeira à vigésima posição possível para abscissa da posição do pixel. De forma semelhante, o  $y$  cobre valores inteiros de 0 a 14 para identificar as suas ordenadas.

Isto significa que uma possível representação da intensidade é por meio de uma matriz. A imagem da figura 4.6 tem tão poucos pixels que podemos ser

<sup>1</sup>Uma discussão mais profunda de como funcionam os químicos na foto poderá nos levar a divagar sobre a natureza discreta dos elementos que se sensibilizam no filme. Esta discussão é infrutífera pois muitos fenômenos são, em última instância, resultados macroscópicos de uma grande quantidade de fenômenos discretos em nível microscópico e nossa distinção aqui sobre o que é contínuo ou discreto é mais frouxa, desleixada, e não merece este aprofundamento.

<sup>2</sup>É comum descrever as dimensões de uma imagem na ordem largura  $\times$  altura, o que acarreta na ordem contrária de matrizes que utiliza a ordem linha  $\times$  coluna.

ousados o suficiente para mostrar toda a matriz  $\mathbf{I}$  que a representa.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 53 & 64 & 73 & 80 & 76 & 81 & 116 & 255 & 216 & 129 & 129 & 123 & 112 & 115 & 133 & 129 & 129 & 121 & 105 & 63 \\ 70 & 70 & 68 & 82 & 95 & 114 & 189 & 255 & 240 & 130 & 124 & 110 & 115 & 131 & 145 & 129 & 119 & 108 & 82 & 68 \\ 151 & 140 & 121 & 109 & 97 & 91 & 222 & 255 & 255 & 121 & 98 & 94 & 92 & 91 & 109 & 80 & 128 & 108 & 75 & 64 \\ 162 & 160 & 161 & 167 & 172 & 170 & 251 & 255 & 255 & 178 & 91 & 86 & 86 & 99 & 88 & 87 & 143 & 120 & 86 & 94 \\ 152 & 156 & 158 & 154 & 162 & 178 & 255 & 255 & 255 & 216 & 127 & 124 & 121 & 128 & 117 & 113 & 150 & 160 & 106 & 97 \\ 175 & 178 & 177 & 169 & 167 & 220 & 255 & 255 & 255 & 240 & 148 & 131 & 131 & 139 & 141 & 145 & 172 & 187 & 157 & 122 \\ 181 & 188 & 222 & 217 & 210 & 229 & 255 & 255 & 255 & 251 & 182 & 162 & 158 & 143 & 129 & 147 & 143 & 127 & 124 & 119 \\ 149 & 158 & 184 & 176 & 166 & 244 & 251 & 255 & 255 & 255 & 198 & 145 & 152 & 146 & 143 & 150 & 151 & 161 & 141 & 130 \\ 161 & 168 & 165 & 167 & 170 & 255 & 255 & 229 & 237 & 255 & 232 & 196 & 192 & 177 & 161 & 155 & 157 & 152 & 147 & 149 \\ 147 & 149 & 153 & 154 & 173 & 255 & 255 & 246 & 203 & 193 & 229 & 183 & 181 & 175 & 181 & 194 & 180 & 163 & 164 & 164 \\ 145 & 148 & 151 & 153 & 204 & 254 & 255 & 251 & 219 & 192 & 184 & 163 & 170 & 168 & 164 & 164 & 161 & 161 & 161 & 158 \\ 131 & 135 & 139 & 143 & 165 & 162 & 157 & 163 & 175 & 140 & 153 & 137 & 160 & 161 & 162 & 160 & 156 & 155 & 153 & 149 \\ 55 & 57 & 70 & 84 & 120 & 216 & 206 & 217 & 228 & 254 & 188 & 103 & 114 & 115 & 118 & 117 & 114 & 111 & 108 & 105 \\ 10 & 13 & 12 & 10 & 64 & 90 & 133 & 123 & 64 & 98 & 54 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 13 & 60 & 126 & 147 & 135 & 112 & 82 & 41 & 15 & 8 & 3 & 7 & 5 & 9 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesta matriz, a intensidade máxima (branco) é, por convenção,  $I_{\text{máx}} = 255$  e a intensidade mínima (preto) é 0. Na região central da imagem (e da matriz) onde se encontra a vela branca, vemos várias amostras com valor 255. Já na parte do mar escuro e quase preto, temos amostras com valores próximos de 0. Esta imagem é o um exemplo de sinal de “tempo discreto” em que a variável independente não é o tempo, mas o comprimento, especificamente duas variáveis para os comprimentos vertical e horizontal que chamamos de  $x$  e  $y$ .

### Exercícios de Revisão

**Questão 4.1.** Abra um áudio qualquer no Audacity e confira a natureza discreta dos áudios. Se desejar, abra o mesmo áudio que empregamos de exemplo da 5ª Sinfonia de Beethoven.

**Questão 4.2.** *Simulando uma amostragem.* (a) Faça um gráfico com traço contínuo para a função

$$x(t) = 5 \cos(2\pi ft)$$

para  $f = 1$  kHz. Considere  $t$  como o tempo contínuo e, portanto, empregue grande quantidade de amostras para realizar o gráfico da linha suave, exibindo dois períodos a partir de  $t = 0$ .

(b) Sobre o gráfico da letra (a), plote o gráfico de ramos das amostras se fosse realizadas com período de amostragem de 0,05 ms.

**Questão 4.3.** *Abrindo áudio no Python.* Utilize o submódulo `wavfile` do submódulo `io`<sup>3</sup> do módulo SciPy para abrir um áudio em WAV. Podemos importá-lo empregando `from scipy.io import wavfile`. Para tal, empregue a função `wavfile.read()`. Esta função recebe como parâmetro um string contendo o caminho para o arquivo de áudio em formato WAV e retorna dois parâmetros, a taxa de amostragem e um array no formato NumPy contendo as amostras do áudio. Podemos usar a sintaxe

```
f_s, arrayAmostras = wavfile.read([string com caminho do
    áudio])
```

em que a variável `f_s` receberá a taxa de amostragem em amostras/s e a `arrayAmostras` receberá um array NumPy com as amostras. Caso o áudio tenha um único canal, o array será unidimensional de tamanho  $N$  em que  $N$  é a quantidade de amostras. Se o áudio tiver mais canais o Array será bidimensional de tamanho  $(N, N_c)$  em que  $N_c$  é a quantidade de canais. Ou seja, as amostras de áudio estão organizadas nas colunas. A cada coluna há  $N$  amostras do canal de áudio da referida coluna. Plote o gráfico da variação do sinal de áudio completo em um gráfico de linha e de um trecho curto com a função `stem`.

<sup>3</sup>O termo `io` diz respeito às iniciais de *input/output* e é o submódulo do SciPy que contém funções que podem empregar arquivos como entrada e saída (*file input/output*). Em particular, vamos empregar um arquivo de áudio como entrada.

### 4.3 Noções de espectro de frequências

Desde o fim da década de 80 que as mídias digitais têm se estabelecido como o estado da arte em termos de tecnologia, ou seja, aquilo que há de mais moderno e de melhor qualidade é digital. Para o estudante nascido depois do final da década de 90, é possível que ele sequer conheça as mídias analógicas (de tempo contínuo) – discos de vinil, fitas cassete, e até fotos obtidas com filmes – o que significa que *a maioria dos sinais que ele terá acesso são amostrados*. Este fato destaca a importância do estudo dos sistemas com sinais de tempo discreto pois eles são hoje **predominantes**, principalmente em aplicações de tecnologia. As máquinas que trabalham com amostragem se tornaram mais confiáveis e mais baratas, o que justifica sua abundância.

É evidente, porém, que cuidados devem ser tomados para que se possa realizar a amostragem e ainda assim o sinal amostrado poder *substituir* com segurança o sinal correspondente de tempo contínuo. Nossa intenção é conseguir quantificar estes cuidados, e, para isso, vamos explorar a ideia de espectro de frequências de um sinal.

Imagine um contra-baixo, um violoncelo e um violino. A nota mais grave que é possível reproduzir em um contra-baixo tem aproximadamente 30 Hz, e a mais aguda aproximadamente 300 Hz. No violoncelo estes limites estão aproximadamente entre 60 Hz e 600 Hz e no violino entre 200 Hz e 2 kHz.

Fisicamente, sabemos que uma corda costuma vibrar na frequência que define a nota e nos seus múltiplos inteiros, chamados harmônicos. O violino tocando o seu dó mais grave, por exemplo, vibra em 261,6 Hz e ao mesmo tempo em 523,2 Hz, 784,6 Hz, 1046,4 Hz, etc. pois elas são as frequências da nota, chamada *frequência fundamental* ou primeiro harmônico, do segundo harmônico, do terceiro e assim sucessivamente.

A tendência é que os harmônicos superiores tenham intensidades de vibração cada vez menor. Isso significa que a energia nas vibrações em um instrumento qualquer tende a estar concentrada nas frequências das notas que ele é capaz de reproduzir e a partir daí passam a decrescer.

É comum ilustrar de forma simplificada estas limitações de vibração por um esquema que chamamos de espectro de frequências. A figura 4.7 mostra os esboços de como seriam os espectros dos três instrumentos. No contra-baixo, por exemplo, a quantidade de energia nas vibrações se concentra entre 30 Hz e 300 Hz, havendo alguns harmônicos de ordem maior a partir destas frequências que tendem a decrescer. Vamos propor, como estimativa, que deve haver uma quantidade relevante de energia nas vibrações deste instrumento até o terceiro harmônico da nota de maior frequência (de frequência  $3 \cdot 300 \text{ Hz} = 900 \text{ Hz}$ ). A partir daí, consideramos que as energias em vibrações são irrelevantes (lembrando que trata-se de um esboço e de uma estimativa), de modo que podemos formar uma figura para o que estamos chamando de *espectro de frequências* do contra-baixo ocupando uma região do gráfico energia  $\times$  frequência entre 30 e 900 Hz como no gráfico mais à esquerda da figura 4.7.

O espectro de frequência é, portanto, um esquema gráfico que relaciona componentes vibração e sua respectiva frequência em um gráfico energia  $\times$  frequências, embora seja comum gráficos que mostram intensidade da amplitude das vibrações  $\times$  frequências. Empregando estimativas semelhantes a que empregamos no contra-baixo para o violoncelo e violino podemos estimar as extensões dominadas por sinais sonoros emitidos por estes instrumentos e esboça-las nos

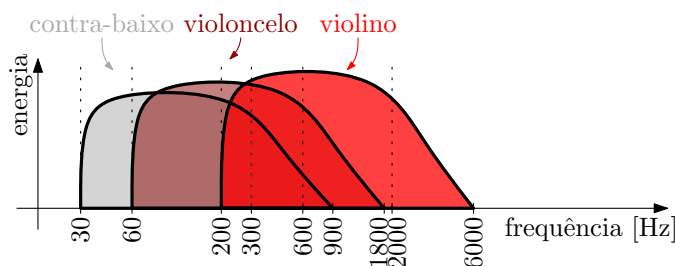


Figura 4.7: Esboço dos espectros de frequência para contra-baixo, violoncelo e violino.

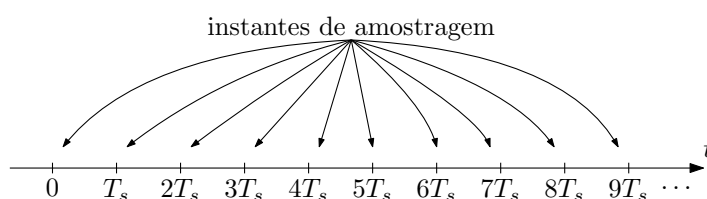


Figura 4.8: Eixo da variável independente  $t$  e os instantes de amostragem  $nT_s$ .

gráficos dos espectros de frequência da figura 4.7.

O espectro do sinal emitido por uma fonte – no nosso exemplo a fonte são instrumentos musicais – tem o que chamamos de limitação em uma *banda de frequências*. No caso do contra-baixo, podemos dizer que estimamos o som que ele emite por um sinal limitado a uma banda entre 30 Hz e 900 Hz.

### Exercícios de Revisão

**Questão 4.4.** (a) Faça uma estimativa da banda de frequências da voz humana na fala. (b) Quais são as frequências de interesse no áudio para humanos?

## 4.4 Representação matemática e convenção de amostragem

Se a variável independente é o tempo  $t$  e fizermos uma amostra a cada 5 ms, por exemplo, então teremos como amostras 0, 5 ms, 10 ms, 15 ms, etc. Trabalharemos apenas com este caso em que as amostras são coletadas regularmente em intervalos fixos.

A amostragem passa a ser uma atividade periódica e ao tempo que se leva a cada repetição da amostragem chamamos de *período de amostragem*,  $T_s$ . A letra  $s$  é utilizada no subscrito pois é a inicial de *sample*, amostra em inglês.

A regra geral é que a amostragem de  $t$  é nos instantes 0,  $T_s$ ,  $2T_s$ ,  $3T_s$ , etc. ou ainda  $nT_s$  para  $n$  inteiro. Ou seja, nos instantes de amostragem, temos

$$t = nT_s. \quad (4.1)$$

Estes instantes de amostragem são mostrados no eixo  $t$  na figura 4.8.

Se o sinal de interesse é  $x(t)$ , quando o mesmo é amostrado, só nos interessa os valores  $x(nT_s)$ . Utilizaremos a convenção de chamar  $x(nT_s)$  de  $x[n]$ , utilizando os colchetes para explicitar que a variável dentro dos colchetes é uma variável independente discreta (inteira).

Ora, se  $T_s$  é chamado de período de amostragem, sua unidade deve ser de tempo, ou de tempo por amostra, já que amostra é um adimensional. Podemos quantificar o processo de amostragem, também, pelo que chamamos de *taxa de amostragem* ou *frequência de amostragem* dada pelo recíproco do período como

$$f_s = \frac{1}{T_s}.$$

Se no sistema internacional  $T_s$  tem unidade de s ou s/amostra, a unidade da taxa de amostragem é  $s^{-1} = \text{Hz}$  ou amostra/s.

Veja nas figuras 4.4 e 4.5 que há a informação da taxa de amostragem do áudio no lado esquerdo, onde são mostradas informações sobre os canais de áudio. Ele indica que o exemplo que usamos foi amostrado a 44 100 Hz ou 44 100 amostras/s.

## 4.5 Efeito da amostragem em uma senoide pura

Está implícito na ideia de espectro de frequências apresentada na seção 4.3 que os sinais são, de certa forma, compostos por uma grande quantidade de vibrações. Veremos no capítulo 5 que, de fato, é possível descrever qualquer sinal como a soma de várias parcelas de senoides.

Podemos, então, estudar um “efeito elementar” da amostragem em um processo com oscilação se observarmos o que ocorre quando amostramos um único seno. Pela periodicidade das funções senoidais, vista na equação 2.13, podemos afirmar que se  $n$  é inteiro, então

$$\sin(\omega t) = \sin(\omega t + 2\pi n) \quad , \text{ e, } \quad \cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi n). \quad (4.2)$$

Ao amostrarmos estas senoides com taxa de amostragem é  $T_s$ , observamos o tempo  $t$  apenas nos instantes em que  $t = nT_s$  com  $n$  inteiro. Se fizermos esta substituição,  $\omega = 2\pi f$  e estudarmos o efeito sobre a função cosseno, teremos

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f T_s n) &= \cos(2\pi f T_s n + 2\pi n) \\ &= \cos[2\pi(f T_s + 1)n] \\ &= \cos\left[2\pi\left(f + \frac{1}{T_s}\right) T_s n\right] \\ \cos(2\pi f T_s n) &= \cos[2\pi \underbrace{(f + f_s)}_{f'} T_s n]. \end{aligned}$$

A última equação nos diz que devido a periodicidade do cosseno o uso da amostragem (que impõe o uso de argumentos inteiros no função cosseno), cossenos amostrados com frequência  $f$  e  $f'$  se apresentam iguais! Ou seja, após amostradas, não é possível distinguir  $f$  e  $f' = f + f_s$ .

**Exemplo 4.1.** Verifique os sinais senoidais puros  $x_1$  e  $x_2$  com frequências de 80 Hz e de 280 Hz se apresentam idênticos quando amostrados a cada 5ms. Apresente o gráfico que ilustra as coincidências das amostras.

**Solução.** De fato, a taxa de amostragem em questão é de

$$f_s = 1/(0,005 \text{ s}) = 200 \text{ Hz}$$

e

$$280 \text{ Hz} = f' = f + f_s = 80 \text{ Hz} + 200 \text{ Hz}.$$

Os sinais nas frequências de 80 Hz e 280 Hz podem ser expressos como

$$x_1(t) = \cos(160\pi t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \cos(560\pi t),$$

que se amostrarmos com  $t = nT_s = 0,005n$  resulta em

$$x_1[n] = \cos(0,8\pi n) \quad \text{e} \quad x_2[n] = \cos(2,8\pi n).$$

Vemos que a distinção entre eles é de exatamente  $2\pi n$ , com  $n$  inteiro. Pela periodicidade da cossenoide temos  $\cos(0,8\pi n) = \cos(2,8\pi n)$ , o que significa que, quando amostradas, as cossenoides dos sinais  $x_1$  e  $x_2$  são iguais.

O código 4.1 constrói 4 gráficos sobrepostos. Os dois primeiros são os cossenos de 80 e 560 Hz traçados com grande quantidade de amostras para observarmos o traço da linha de dois períodos do cosseno de menor frequência como se fossem contínuos. Os outros dois são gráficos de ramos da amostragem proposta no problema. Não é fácil distinguir os dois gráficos de ramos pois eles ficam exatamente sobrepostos. Pusemos a linha do ramo do primeiro em amarelo contínuo e a do segundo em verde tracejado para possibilitar a visualização pois, devido a sobreposição, todas as linhas ficaram amarelas listradas de verde. O gráfico resultante da aplicação do código é mostrado na figura 4.9.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  T_s = 0.005
4  t = arange(0,0.025,(0.025-0)/200) # 80 Hz implica período de
   1/80s. Vamos fazer dois períodos ou 0,025 s. Uso de 200
   amostras.
5  n = arange(0,0.025/T_s + 1) # A quantidade de amostras vai de
   0 até o fim da escala. Somamos com 1 para incluir o último
   ponto.
6  x_1 = cos(160*pi*t) # Define grande quantidade de amostras
   para x_1 traçado do gráfico em linha.
7  x_2 = cos(560*pi*t) # Idem para x_2.
8  x_1_amostrado = cos(160*pi*T_s*n) # x_1 amostrado.
9  x_2_amostrado = cos(560*pi*T_s*n) # Idem para x_2.
10 plt.plot(t,x_1,"k-", t, x_2,"r—") # Plot das linhas de x_1 em
   preto com linha contínua e x_2 em vermelho tracejado.
11 plt.stem(n*T_s,x_1_amostrado, linefmt="y") # Plot do stem das
   amostras de x_1.
12 plt.stem(n*T_s,x_2_amostrado, linefmt="g—") # Idem para as
   amostras de x_2.
13 plt.show()
```

Código 4.1: Criação de gráficos de cossenoides de 80 e 280 Hz.

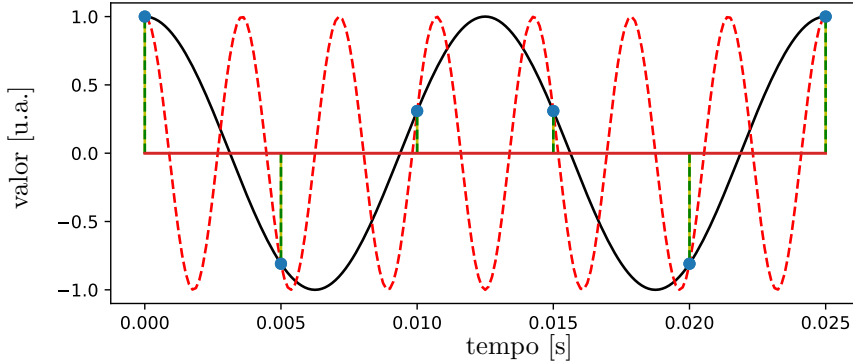


Figura 4.9: Gráfico ilustrativo da coincidência entre cossenoides de 80 e 280 Hz quando amostrados a 5 ms.

O que vimos até então indica que não adiantaria amostrar uma onda com frequência de  $f + f_s$  pois ela se confundiria com a frequência  $f$ , que é menor do que ela. A pergunta que devemos fazer é: se amostrarmos um sinal com taxa de  $f_s$ , haveria uma região dentre baixas frequências em que todas elas são únicas, e não se confundem entre si? Para responder esta pergunta, vamos tentar um outro caminho algébrico para verificar se há uma frequência ainda menor do que  $f + f_s$  que se confunde com  $f$  quando amostrada.

Para tal, vamos utilizar tanto a periodicidade do cosseno como a sua paridade, que nos diz que  $\cos(x) = \cos(-x)$ . Com isso, para a cossenoide  $\cos(\omega t) = \cos(2\pi f T_s n)$ , teremos as igualdades quando amostrada dadas por

$$\begin{aligned}
 \cos(2\pi f T_s n) &= \cos(-2\pi f T_s n) \\
 &= \cos(-2\pi f T_s n + 2\pi n) \\
 &= \cos[2\pi(1 - f T_s)n] \\
 &= \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{T_s} - f\right) T_s n\right] \\
 \cos(2\pi f T_s n) &= \cos[2\pi \underbrace{(f_s - f)}_{f'} T_s n].
 \end{aligned}$$

Com este desenvolvimento vemos que as frequências  $f$  e  $f' = f_s - f$  também são se apresentam idênticas quando amostradas.

**Exemplo 4.2.** Repita a comparação feita entre os sinais no exemplo 4.1, desta vez empregando as frequências de 80 e 120 Hz, de  $x_1$  e  $x_3$ , respectivamente, amostrados a 5 ms.

**Solução.** Neste caso, temos

$$120 \text{ Hz} = f' = f_s - f = 200 \text{ Hz} - 80 \text{ Hz}.$$

Os sinais podem ser

$$x_1(t) = \cos(160\pi t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \cos(240\pi t),$$



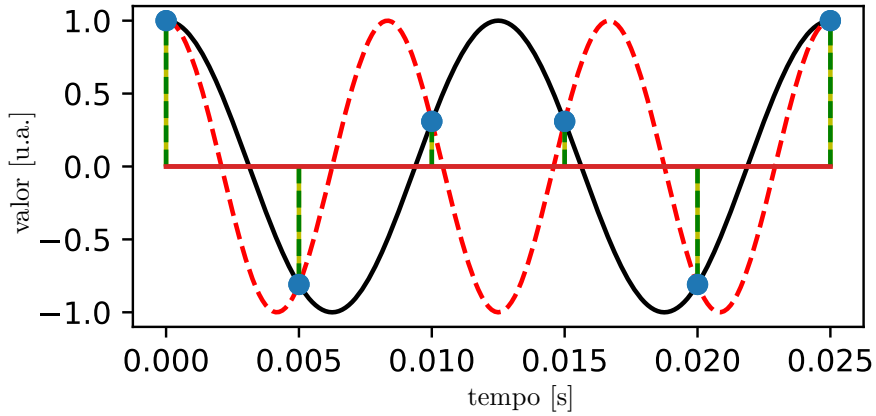


Figura 4.10: Gráfico ilustrativo da coincidência entre cossenoides de 80 e 120 Hz quando amostrados a 5 ms.

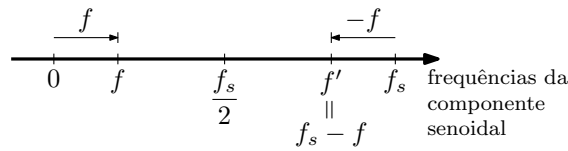


Figura 4.11: Localização das frequências  $f$  e  $f' = f_s - f$  com relação a  $f_s$  no eixo de frequências.

que amostradas se tornam

$$x_1[n] = \cos(0,8\pi n) \quad \text{e} \quad x_3[n] = \cos(1,2\pi n),$$

e, para  $n$  inteiro, vale

$$\cos(0,8\pi n) = \cos(-0,8\pi n) = \cos(-0,8\pi n + 2\pi n) = \cos(1,2\pi n).$$

Logo, os sinais  $x_1$  e  $x_3$ , quando amostrados, são iguais.

Modificamos minimamente o código 4.1 (foi necessário apenas substituir  $560*\pi$  ou  $240*\pi$ ) e obtivemos os gráficos da figura 4.10.

Não vamos provar rigorosamente nesta obra, mas a frequência  $f' = f_s - f$  é a menor que coincide com a frequência  $f$  quando amostradas com taxa  $f_s$ . Isto implica na configuração de frequências ilustrada na figura 4.11. Ela mostra a localização de  $f$  e  $f'$ , que tem mesma representação quando amostradas, com relação a taxa de amostragem  $f_s$  para um valor pequeno da frequência  $f$ .

Em uma aplicação real, não poderíamos ter ambas as frequências compondo o espectro de frequências do sinal, pois elas seriam indistinguíveis. Assim, vamos priorizar o uso da menor entre elas,  $f$ .

Deveríamos limitar, então, os valores de possíveis frequências  $f$  para  $0 \leq f \leq f_{\text{máx}}$  de modo a garantir que dentre elas todas têm representação única quando amostradas.

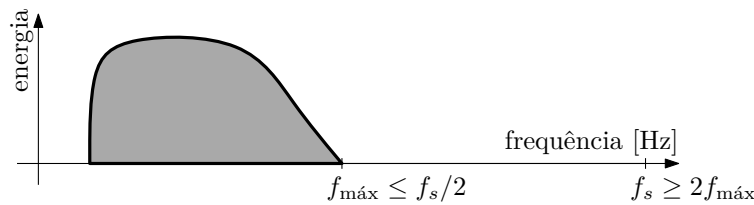


Figura 4.12: Localização no eixo de frequências da relação entre a frequência máxima de um sinal e da frequência de Nyquist.

Assim, vemos pela figura 4.11 que  $f_{\text{máx}}$  está entre  $f$  e  $f'$  na figura. Vemos também que a medida que aumentamos  $f$ , ele e sua contra-parte  $f'$  se aproximam de  $f_s/2$ , onde se encontrariam. Aumentar  $f$  a partir daí causa a inversão dos papéis pois  $f$  já seria maior do que  $f'$ .

Isto significa que se  $0 \leq f \leq f_s/2$ , a senoide que tem menor frequência e também tem mesma representação está na faixa  $f_s/2 \leq f' \leq f_s$ . Logo, se limitarmos  $f$  ao intervalo de 0 a  $f_s/2$ , garantimos que todos os  $f$  nesta faixa tem representação única, implicando em  $f_{\text{máx}} = f_s/2$ .

## 4.6 Critério de Nyquist

O resultado obtido na seção 4.5 para a amostragem de uma senoide pura é generalizado no *critério de Nyquist*. Ele pode ser expresso como: **se um sinal tem espectro com banda limitada até  $f_{\text{máx}}$ , se for adotada taxa de amostragem  $f_s \geq 2f_{\text{máx}}$  não haverá perda de informação.**

Equivalentemente, **o limite  $f_{\text{máx}}$  da banda de um sinal deve ser menor que a metade da taxa de amostragem, ou seja,  $f_{\text{máx}} \leq f_s/2$ .** A taxa  $f_s/2$  é chamada de *taxa de Nyquist*.

A figura 4.12 ilustra a distribuição do espectro de um sinal hipotético e a localização esperada da taxa de amostragem.

As provas rigorosas da veracidade do critério de Nyquist estão além do alcance deste curso, mas o que vimos com relação à senoide pura auxilia a compreender o tipo de problema que pode ocorrer quando ele não é respeitado. Dizemos que quando o critério de Nyquist não é respeitado, ocorre *subamostragem*. O erro que o sinal subamostrado apresenta se chama *aliasing*.

### Exercícios de Revisão

**Questão 4.5.** *Ligação com dual-tone.* A figura 4.13 ilustra o aspecto de um teclado numérico convencional como os empregados em telefones. Um dos padrões para sinalizar que uma tecla foi pressionada é o conhecido como *dual-tone* que consiste na emissão, pelo aparelho, da soma de dois tons (duas senoides) quando uma tecla é pressionada. Os tons empregados são padronizados e a composição dos mesmos é organizada de acordo com a posição da tecla, ou seja, variam com linha e coluna em que a tecla está disposta. As frequências associadas a cada linha e coluna também estão mostradas na figura. (a) Estime a banda necessária para operar o *dual-tone*. (b) Escolha uma taxa de amostragem compatível com a banda e crie um sinais no formato de *dual tone* de modo que ele tenha uma duração suficiente para que fosse audível e escute o resultado empregando

	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
697 Hz	1	2	3
770 Hz	4	5	6
852 Hz	7	8	9
941 Hz	*	0	#

Figura 4.13: Esquema do teclado *dual-tone* com as frequências atribuídas às linhas e colunas.

a função `sounddevice.play(arrayDeAudio, Ts)` do módulo `sounddevice` que recebe como parâmetros o sinal de áudio no formato de array do NumPy e a taxa de amostragem `Ts`. Escute o som emitido e compare com o emitido por seu celular (em geral, é possível ouvir o som do *dual-tone* quando o celular está no discador). (c) Crie um programa que pede sucessivamente que o usuário informe teclas e emite o som da tecla correspondente até que ele digite “encerrar”. (d) Tente realizar uma ligação pelos sons emitidos pelo *dual-tone* em seu computador aproximando a sua caixa de som ao microfone de um telefone convencional. (e) Mude a taxa de amostragem para abaixo da Taxa de Nyquist e compare os sons emitidos neste caso. Tente realizar a ligação novamente. O que se percebe com relação ao som emitido e a tentativa de ligação?

## 4.7 Frequência angular normalizada

A convenção para a frequência angular é ser medida em rad/s. Ela costuma aparecer multiplicando uma variável independente de tempo em expressões como

$$\cos(\omega t) \quad (4.3)$$

de modo a obter no argumento do cosseno um valor em radianos. Quando realizamos a amostragem, estamos observando os instantes de tempo em que  $t = T_s n$ , em que  $T_s$ , o período de amostragem é medido em s/amostra. Se substituirmos este valor numa expressão como a da equação 4.3, temos

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega T_s n) = \cos(\omega n), \quad (4.4)$$

em que  $\omega$ , definido como o produto entre a frequência angular e o período de amostragem, tem unidades de rad/amostra e é designada *frequência angular normalizada*. A rigor, tanto rad como amostra são adimensionais, de modo que a frequência angular normalizada é adimensional. Note, também que adotamos para distinguir a frequência angular da frequência angular normalizada a sutil substituição da letra grega ômega ( $\omega$ ) pela letra dáblui ( $\omega$ ).

O processo de amostragem faz “desaparecer” a dimensão do tempo, que passa a ser contado de amostra em amostra, normalizando-o por períodos de duração da amostragem. Podemos, então, reescrever o critério de Nyquist em

Tabela 4.1: Comparação entre as frequências dos exemplos 4.1 e 4.2.

$f$	$w$	situação		
$f_s = 200 \text{ Hz}$	$2\pi$			
$f_s/2 = 100 \text{ Hz}$	$\pi$			
$f_1 = 80 \text{ Hz}$	$0,8\pi$	$80 \text{ Hz} \leq 100 \text{ Hz}$	$0,8\pi \leq \pi$	atende ao critério
$f_2 = 280 \text{ Hz}$	$2,8\pi$	$280 \text{ Hz} > 100 \text{ Hz}$	$2,8\pi > \pi$	não atende ao critério
$f_3 = 120 \text{ Hz}$	$1,2\pi$	$120 \text{ Hz} > 100 \text{ Hz}$	$1,2\pi > \pi$	não atende ao critério

termos da frequência angular normalizada máxima, pois

$$\begin{aligned}
 f_s &\geq 2f_{\text{máx}} \\
 \frac{1}{T_s} &\geq 2 \frac{\omega_{\text{máx}}}{2\pi} \\
 \omega_{\text{máx}} T_s &\leq \pi,
 \end{aligned}$$

que resulta no critério

$$w_{\text{máx}} \leq \pi. \quad (4.5)$$

Ou seja, em um processo em que o critério de Nyquist é respeitado, as frequências angulares normalizadas tem valor máximo de  $\pi$  rad/amostra.

**Exemplo 4.3.** Analise os sinais senoidais proposto nos exemplos 4.1 e 4.2 com relação a sua concordância com o critério de Nyquist. Utilize as frequências em Hz e normalizadas.

**Solução.** Chamamos a frequência de amostragem de  $f_s$ , a taxa de Nyquist de  $f_s/2$  e as frequências de 80, 280 e 120 Hz do problema respectivamente de  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  e as listamos na tabela 4.1. Nas terceira e quarta colunas fizemos as comparações entre as frequências de interesse e a taxa de Nyquist em hertz e normalizada e pusemos a situação do atendimento ao critério de Nyquist na última coluna. Como esperado, apenas a menor das frequências, de 80 Hz, atende ao critério de Nyquist. Todas as outras que se apresentam iguais a ela quando amostradas tem maior frequência e não atendem ao critério.

## 4.8 Incompatibilidade da banda do sinal e da frequência de amostragem

Argumentamos sobre a limitação da banda do sinal de alguns instrumentos musicais na seção 4.3 pelas características do som emitido pelos instrumentos. Na prática, o tamanho da caixa de ressonância, o comprimento do braço, a espessura e a tensão das cordas etc. são aspectos físicos que acabam condicionando como o instrumento reage aos estímulos mecânicos e impedem que os instrumentos tenham uma resposta em um espectro que cubra qualquer frequência. Pelo contrário, o artífice, conhecendo as limitações da física, escolhe as características do instrumento para que ele responda aos estímulos mecânicos de acordo com a *tessitura* para a qual o instrumento se presta.

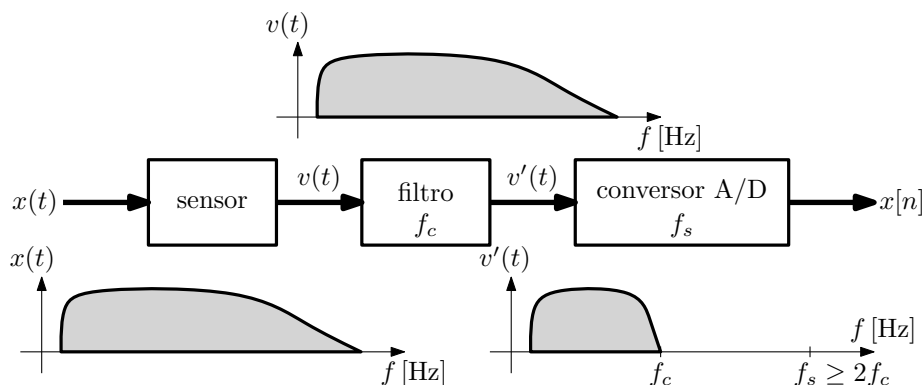


Figura 4.14: Esquema de sistema de amostragem com sensor, filtro e conversor.

Em alguns casos, os limites físicos da banda de frequências de um sistema não são fáceis de estimar. Ou ainda, os sinais de interesse se misturam com outros que abundam em frequências altas muito além dos limites do sinal de interesse. Quando isto ocorre, é importante que o sistema que realiza a amostragem faça uma filtragem prévia do sinal captado.

Com isto, vamos mostrar um esquema típico que realiza a amostragem na figura 4.14. Ele costuma ser composto de 3 partes. A primeira é a que consegue observar a grandeza em estudo e é designada *sensor*. Como os sistemas elétricos são aqueles que mais facilmente processam e tratam dados e informações, em geral, o sensor percebe uma grandeza qualquer  $x(t)$  e a converte em um sinal elétrico  $v(t)$ .

A segunda parte é um *filtro* que chamamos de passa-baixas (pois ele só deixa passar as baixas frequências). Este filtro tem uma característica que chamamos de *frequência de corte*  $f_c$ . A saída do filtro é um novo sinal de tensão  $v'(t)$  em que as frequências acima de  $f_c$  existentes em  $v(t)$  foram removidas, ou seja, estão ausentes pois foram filtradas. Com isso,  $v'(t)$  tem banda limitada à  $f_c$ .

Por fim, a parte que de fato realiza a amostragem é chamada de *conversor analógico-digital* ou simplesmente *conversor A/D*, que recebe  $v'(t)$  e gera o sinal  $x[n]$  amostrado. Neste sistema, se a frequência de amostragem do conversor A/D é  $f_s$ , para que o critério de Nyquist seja cumprido, é necessário que

$$f_s \geq 2f_c.$$

Este esquema garante que não haja aliasing ao realizar uma pré-filtragem no sinal amostrado e garantir que sua banda será limitada e adequada ao conversor. O efeito sobre os espectro sobre os sinais durante o processo também é mostrado na figura 4.14.

É importante observar que o filtro remove algumas informações. A escolha de  $f_c$  deve ser tal que ele remova apenas informações indesejadas, que costumamos chamar de *ruído*, permitindo a amostragem posterior do sinal de interesse. Ou seja, a escolha de  $f_c$  não deve ser arbitrária, mas adequada à aplicação específica.

## Capítulo 5

# Série de Fourier de tempo discreto

O sinal  $x_t(t)$  de tempo contínuo da figura 5.1 é o que chamamos de “onda triangular”. Desenhamos este sinal com período  $T = 30$  ms.

Considere agora que amostramos este sinal com período de amostragem  $T_s = 5$  ms gerando sua versão amostrada  $x_t[n]$ . Para este período de amostragem, temos como frequência de amostragem

$$f_s = 1/T_s = 200 \text{ Hz.}$$

O sinal amostrado também é apresentado na mesma figura e também é periódico, repetindo-se a cada 6 amostras. Dizemos que ele tem período  $N = 6$  amostras.

Agora vamos considerar o sinal

$$x'_t(t) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{6} f_s t\right) + \frac{1}{6} \cos\left(\frac{2\pi}{6} 3 f_s t\right) + \frac{2\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{6} f_s t\right) \quad (5.1)$$

traçado em linha contínua sobre as amostras e sob  $x_t(t)$ , denotando que a variável  $t \in \mathbb{R}$ .

Duas coisas interessantes ocorrem:

1.  $x'_t(t)$  tem aspecto muito semelhante a  $x_t(t)$ , ou seja,  $x'_t(t) \approx x_t(t)$  para qualquer  $t$ ; e
2. se  $x_t(t)$  ou  $x'_t(t)$  forem amostradas, obtém-se sinais de tempo discreto  $x_t[n]$  e  $x'_t[n]$  iguais, ou seja,  $x'_t(t) = x_t(t)$  para  $t = T_s n$ . Em outras palavras, indica que as amostragens de  $x_t$  e de  $x'_t$  são indistinguíveis.

Em particular, temos

$$x_t[n] = x'_t[n] = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{6} n\right) + \frac{1}{6} \cos\left(\frac{2\pi}{6} 3n\right) + \frac{2\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{6} n\right).$$

Este exemplo específico nos induz a propor que as funções seno e cosseno podem ser utilizadas para representar aproximadamente sinais quaisquer de tempo contínuo e identicamente as funções de tempo discreto.

Estes somatórios de senos e cossenos ponderados que utilizamos para definir  $x_t[n]$  e  $x'_t[n]$  chamamos de representação em *série de Fourier de tempo discreto* destes sinais.

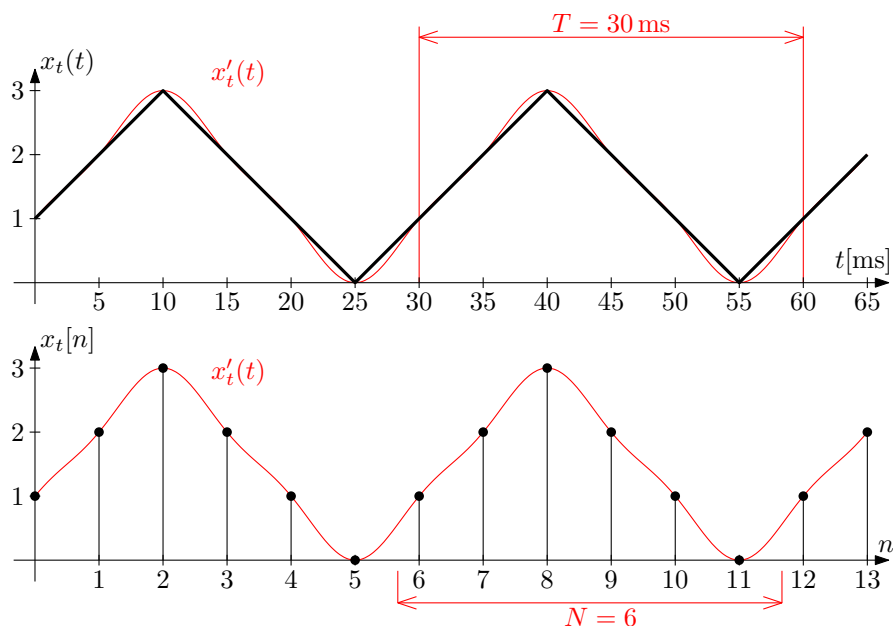


Figura 5.1: Onda triangular de tempo contínuo.

## 5.1 Sinais periódicos e sinais limitados

Iniciamos nossos exemplos com o sinal da onda triangular periódica. Faz mais sentido pensar que um sinal desta natureza possa ser representado como uma soma de senos e cossenos. Veremos, porém, que um grupo importante de funções, as funções limitadas na variável independente, também podem ser representadas por funções senoidais.

Na matemática pura, é comum trabalharmos com funções  $f$  de  $t$  em que qualquer valor de  $t$  é importante para o estudo, muitas vezes desde  $-\infty$  a  $+\infty$ , a depender do quão vasto possa ser o domínio das funções que compõem  $f$ . No mundo real, toda análise de sinal costuma ter um valor inicial e um valor final de interesse, ou seja,  $a \leq t \leq b$ , em que  $a$  e  $b$  são respectivamente os valores inicial e final de interesse. Isto ocorre pois se  $t$  é uma variável que representa o tempo, por exemplo,  $a$  e  $b$  podem ser os instantes em que um experimento começa ou termina. Se  $t$  é um comprimento,  $a$  e  $b$  pode ser o alcance do sensor ou o limites de deslocamento de um aparato mecânico que restringem os valores de interesse de  $t$ .

Nestes casos, dizemos que a função é *limitada* para  $t$  entre  $a$  e  $b$ . Caso esta função seja amostrada, teremos  $f[n]$  também limitada para  $n_a \leq n \leq n_b$ .

Veja as funções  $x_t[n]$ , que já trabalhamos, e  $x[n]$ , uma função limitada a  $0 \leq n \leq 5$  da figura 5.2. Dentro do limite em que  $x[n]$  está definida,  $x_t[n] = x[n]$ , de modo que **sempre podemos trabalhar uma função limitada como uma função periódica, desde que definamos a região limitada coincidente com um período.**

Desta maneira, a importância deste estudo recai sobre as funções limitadas e amostradas (de tempo discreto), que estudaremos por meio de séries de Fourier de tempo discreto.

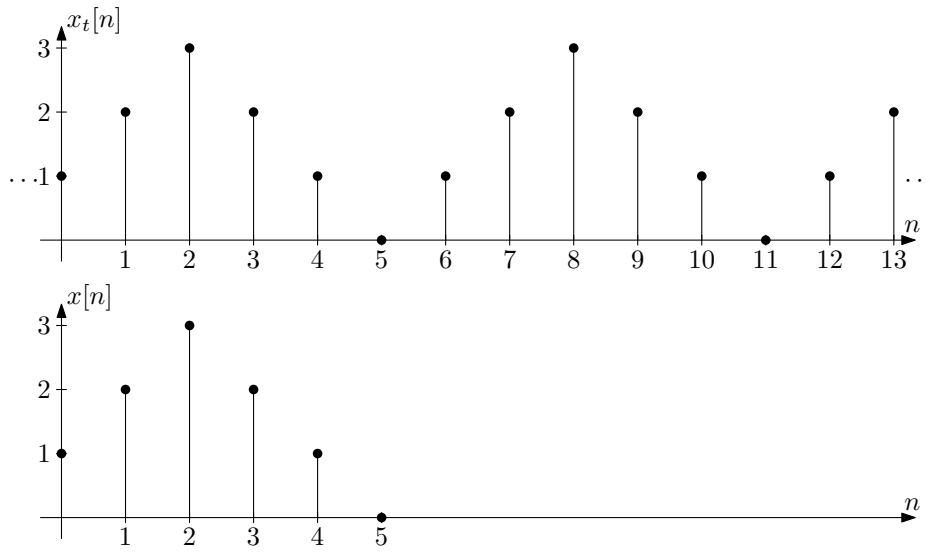


Figura 5.2: Sinal limitado  $x[n]$  e seu correspondente periódico  $x_t[n]$ .

## 5.2 Funções senoidais de interesse num sinal limitado

Para obter a série de Fourier de um sinal amostrado limitado ou periódico, devemos primeiro restringir quais senos e cossenos são de interesse. Para tal, vamos considerar o exemplo da onda triangular que demos. Como ela tem período  $N = 6$ , vamos começar pelas funções seno e cosseno que também têm este período. Na seção 2.3.2, vimos que um cosseno com período 6 deve respeitar

$$\begin{aligned}\cos(wn) &= \cos[w(n+6)] \\ \cos(\underbrace{wn}_{=\phi}) &= \cos(\underbrace{wn+6w}_{=\theta}).\end{aligned}$$

Como os cossenos são iguais, significa que a diferença entre seus argumentos  $(\theta - \phi)$  deve ser um múltiplo inteiro de uma volta completa ( $2\pi k$ , com  $k$  inteiro), ou seja,

$$\begin{aligned}\theta - \phi &= 2\pi k \\ wn + 6w - wn &= 2\pi k \\ 6w &= 2\pi k.\end{aligned}$$

Isto significa que há várias frequências normalizadas  $w$  no formato

$$w = \frac{2\pi k}{6}$$

para as quais um cosseno é periódico com período  $N = 6$ , a depender do valor de  $k$ . Vamos chamá-la de  $w_k$ . A expressão que obtivemos é para o caso em que



$N = 6$ . Para o caso geral em que  $N$  é um inteiro positivo qualquer teríamos

$$w_k = \frac{2\pi k}{N}.$$

O valor de  $w_0 = 0$  é aquele que torna o cosseno constante e igual a 1 (e o seno constante e igual a zero). Como ela não pode ser empregada para descrever um sinal variável, ela não é exatamente uma “frequência”, mas tem uma importância que veremos mais adiante (veja que  $x_t[n]$  do exemplo da onda triangular tem um termo constante e igual a  $3/2$ ).

A menor destas frequências é

$$w_1 = \frac{2\pi \cdot 1}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/amostra.}$$

Todas as outras frequências são múltiplos inteiros de  $w_1$ , ou seja,

$$w_k = w_1 \cdot k.$$

A próxima frequência,  $w_2 = 2\pi/3$  rad/amostra, também tem período  $N = 6$  (essa foi nossa premissa), mas ela tem o “dobro da velocidade” de  $w_1$ . Dizemos o dobro da velocidade para indicar que quando  $\cos(w_1 n)$  completa um ciclo,  $\cos(w_2 n)$  completou dois. Por fim,  $w_3 = \pi$  rad/amostra tem o triplo da velocidade de  $w_1$ . Também, não há variação mais abruta do que a que podemos observar em  $\cos(\pi n)$ , já que em uma amostra este cosseno apresenta o valor 1 e na amostra seguinte apresenta o valor oposto.

Estas quatro frequências,  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ , resultam nos quatro primeiros gráficos das funções cosseno que apresentamos na figura 5.3. Para mostrarmos as frequências de interesse, colocamos o gráfico de  $\cos(w_i n)$ , de tempo discreto, junto com seu correspondente  $\cos[(w_i/T_s)t]$ , de tempo contínuo. Veja que a partir de  $w_4$ , apesar de em termos de do tempo contínuo termos gráficos distintos (todos os gráficos em vermelho são diferentes), quando eles são amostrados, o resultado da amostragem de  $\cos[(w_4/T_s)t]$  é igual ao de  $\cos[(w_2/T_s)t]$ .

Algebricamente, é fácil observar que

$$\begin{aligned} \cos(w_4 n) &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}n\right) \\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}n - 2\pi n\right) \\ &= \cos\left(-\frac{2\pi}{3}n\right) \\ \cos(w_4 n) &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \cos(w_2 n), \end{aligned}$$

que é o que o gráfico nos mostra.

Esta demonstração de igualdade dependeu do fato de que  $\cos\left(\frac{4\pi}{3}n\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}n - 2\pi n\right)$ , o que só é verdade se  $n$  é inteiro. Isso significa que esta é uma particularidade do universo dos sinais amostrados – há apenas 4 frequências normalizadas de interesse de período  $N = 6$ :  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ . Todas as outras frequências se comportam exatamente como uma destas quando amostradas.

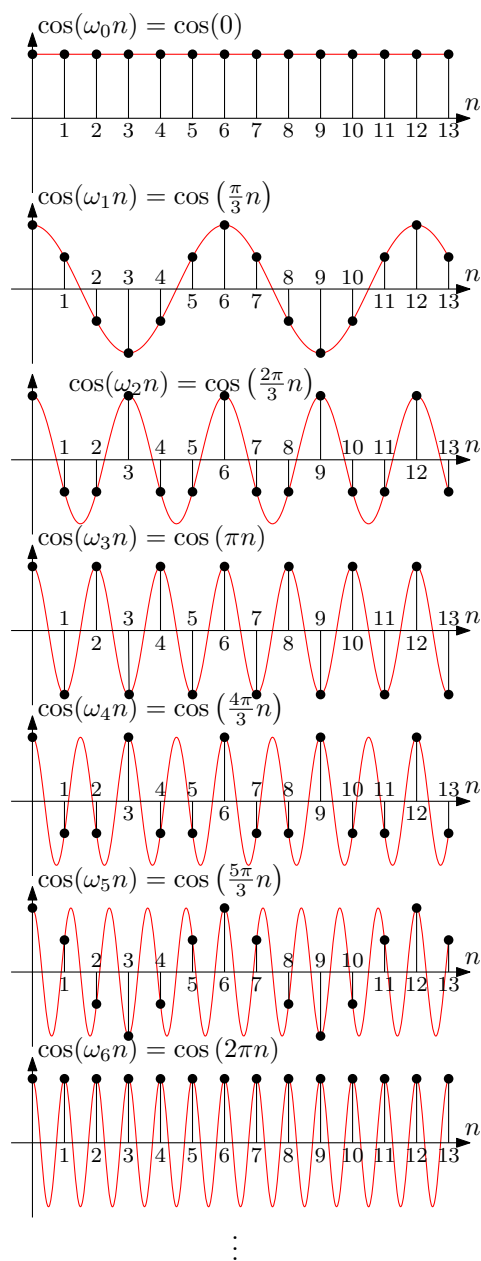


Figura 5.3: Amostragem de cossenos com período  $N = 6$ .

Vejam que o resultado que encontramos aqui se relaciona com a ideia expressa no critério de Nyquist que vimos na seção 4.6. Estamos trabalhando com frequências angulares que devem estar sujeitas a duas restrições

- o critério de Nyquist que as limita a  $0 \leq w_k \leq \pi$ , e
- serem periódicas com período  $N$  que implica em sua expressão geral ser

$$w_k = \frac{2\pi}{N}k. \quad (5.2)$$

Não devemos contar que apenas cossenos sejam suficientes para representar uma função (ou sinal) qualquer de frequência  $N = 6$ , pois a função cosseno tem uma fase fixa, e os sinais podem ter fases diversas. Uma soma de senos e cossenos ponderados é suficiente para resolver funções periódicas com qualquer fase como vimos na equação 2.29, de modo que poderemos escrever, particularmente para a onda triangular (ou para a função limitada  $x[n]$  com  $N = 6$ ) que estamos utilizando como exemplo,

$$x_t[n] = x[n] = a_0 \cos(w_0 n) + a_1 \cos(w_1 n) + a_2 \cos(w_2 n) + a_3 \cos(w_3 n) + \\ + b_0 \sin(w_0 n) + b_1 \sin(w_1 n) + b_2 \sin(w_2 n) + b_3 \sin(w_3 n).$$

Se simplificarmos  $\cos(w_0 n) = 1$  e  $\sin(w_0 n) = 0$ , teremos

$$x_t[n] = x[n] = a_0 + a_1 \cos(w_1 n) + a_2 \cos(w_2 n) + a_3 \cos(w_3 n) + \\ + b_1 \sin(w_1 n) + b_2 \sin(w_2 n) + b_3 \sin(w_3 n). \\ = a_0 + \sum_{k=1}^3 [a_k \cos(w_k n) + b_k \sin(w_k n)].$$

Aqui, fortalecemos nosso argumento de que deve ser possível representar  $x_t[n] = x[n]$  desde que consigamos determinar  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  e  $b_3$ , que são os “pesos” da ponderação dos senos e cossenos, além do  $a_0$  que é uma espécie de termo constante.

Em nosso exemplo, para  $N = 6$ , precisamos determinar o termo independente,  $a_0$ , e os coeficientes para 3 frequências. Estas três frequências são as que estamos chamando de frequências de interesse. Como regra geral, considerando a expressão geral para  $w_k$  e o critério de Nyquist, para  $N$  amostras, é necessário determinar o termo independente  $a_0$  e mais os coeficientes dos senos e cossenos de  $\lfloor N/2 \rfloor$  frequências de interesse. O símbolo  $\lfloor x \rfloor$  denota o arredondamento para baixo. Por exemplo,  $\lfloor 3,3 \rfloor = 3$  e  $\lfloor 3,9 \rfloor = 3$ .

A forma geral de uma função expressa como série de Fourier discreta poderá ser dada, portanto, como

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right]. \quad (5.3)$$

A equação 5.3 é conhecida como *equação de síntese*, que expressa  $x[n]$  como um somatório de senos e cossenos ponderados. Este termo vem do significado de síntese como construção ou montagem. Ela mostra como  $x[n]$  pode ser “construída” com componentes senoidais.

### 5.3 Determinação dos coeficientes $a_k$ e $b_k$

As fórmulas para cálculo dos coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  são dadas por

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]; \quad (5.4)$$

$$a_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(\pi n), \quad \text{para } N \text{ par}; \quad (5.5)$$

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right), \quad \text{para } k \neq 0, \quad k \neq N/2; \quad (5.6)$$

$$b_0 = 0, \quad (5.7)$$

$$b_{N/2} = 0, \quad \text{para } N \text{ par; e,} \quad (5.8)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right), \quad \text{para } k \neq 0, \quad k \neq N/2. \quad (5.9)$$

As equações de 5.4 a 5.9 são conhecidas como *equações de análise* e expressam os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  em termos de  $x[n]$ .

#### 5.3.1 Demonstração das fórmulas de análise da série de Fourier de tempo discreto

Para demonstrar como obter as fórmulas para  $a_k$  e  $b_k$  faremos uso ostensivo das propriedades

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) = 0, \text{ se } 1 \leq k \leq (N-1), \quad (5.10)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) = 0, \text{ para qualquer } k \text{ inteiro, e,} \quad (5.11)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) = N, \text{ se } k = 0 \text{ ou } k = N. \quad (5.12)$$

#### Demonstração do cálculo de $a_0$

Como estamos propondo

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right],$$

se somarmos todas as amostras de  $x[n]$  dos valores de 0 até  $N-1$ , o que pode ser interpretado como o somatório de termos do membro esquerdo para todos os valores de  $n$ , isto será igual ao mesmo somatório com os termos do lado direito, já que ambos os lados são iguais. Algebricamente, isto significa

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N-1} a_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
&= Na_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sum_{n=0}^{N-1} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sum_{n=0}^{N-1} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
&= Na_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
&= Na_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cdot 0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \cdot 0 \\
\sum_{n=0}^{N-1} x[n] &= Na_0,
\end{aligned}$$

de onde, isolando  $a_0$ , obtemos sua fórmula

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

Veja que  $a_0$  é a **média dos valores das amostras de  $x[n]$** ! Isto ocorre pois os componentes senoidais tem uma simetria entre seus valores positivos e negativos ao longo de  $N$  amostras pois todos são periódicos com esta quantidade de amostras. Esta simetria faz os componentes senoidais se anularem, sobrando apenas o componente constante  $a_0$  que deve coincidir com a “parte” constante que  $x[n]$  tenha na média.

### Demonstração do cálculo de $a_k$ , com $k \neq N/2$

Novamente partimos de

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right],$$

mas antes de somar todos os termos do membro esquerdo e direito, vamos multiplicar ambos os membros por  $\cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right)$ , em que  $k'$  é um dos valores de  $k$  de interesse, e, portanto,  $1 \leq k' \leq \lfloor N/2 \rfloor$  (excluímos  $k' = 0$  pois já o estudamos na seção passada), obtendo

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) x[n] &= \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) a_0 + \\
&+ \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \\
&+ \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right),
\end{aligned}$$

para então somar todos os termos do lado esquerdo e, conseqüentemente todos do lado direito, de  $n = 0$  até  $N - 1$ , obtendo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) x[n] &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) a_0 + \\
&+ \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \\
&+ \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) + \\
&+ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \\
&+ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
&= a_0 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sum_{n=0}^{N-1} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sum_{n=0}^{N-1} b_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k'n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{a_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k' + k)n\right] + \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k' - k)n\right] \right\} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{b_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k' + k)n\right] + \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k' - k)n\right] \right\}.
\end{aligned}$$

Aqui temos quatro termos de somatório de senoides que precisamos verificar se se anulam como nos casos previstos nas equações 5.10, 5.11 e 5.12. De imediato, podemos ver que os senos são todos nulos devido à equação 5.11.

Resta-nos analisar os cossenos. Vemos que como  $1 \leq k' \leq \lfloor N/2 \rfloor$  e  $1 \leq k \leq \lfloor N/2 \rfloor$ , então

$$2 \leq k' + k \leq N,$$

em que a igualdade  $k' + k = N$  **só ocorre se**  $N$  for par e quando  $k' = k = N/2$ . Deste modo, com exceção do caso  $N$  par e  $k' = k = N/2$ , que vamos estudar na

próxima seção,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' + k)n \right] = 0.$$

Resta analisar a diferença  $k' - k$ . Ela é tal que

$$-N/2 + 1 \leq k' - k \leq N/2 - 1.$$

Nesta faixa, as condições da equação 5.10 só não são atendidas quando  $k' = k$  e,  $k' - k = 0$ , quando ocorre a condição da equação 5.12. Temos então

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' - k)n \right] = \begin{cases} N, & k' = k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e no somatório original

$$\sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{a_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' - k)n \right] = \sum_{k=k'} \frac{a_k}{2} N = \frac{Na_{k'}}{2}.$$

Este é o único somatório não-nulo.

Retomando estes valores na equação original, teremos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos \left( \frac{2\pi}{N} k' n \right) x[n] = \frac{Na_{k'}}{2}.$$

Utilizando a variável  $k$  genérica no lugar de  $k'$ , já que não há mais variável com nome  $k$ , e isolando  $a_k$ , obtemos o resultado que esperávamos de

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left( \frac{2\pi}{N} kn \right) x[n], \quad k \neq 0, \quad k \neq N/2.$$

### Demonstração do cálculo de $a_k$ , com $N$ par e $k = N/2$

Na demonstração anterior, quando tínhamos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left( \frac{2\pi}{N} k' n \right) x[n] &= \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{a_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' + k)n \right] + \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' - k)n \right] \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{b_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (k' + k)n \right] + \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (k' - k)n \right] \right\}, \end{aligned}$$

vimos que os somatórios de seno são sempre zero, mas o primeiro somatório de cosseno, que era sempre nulo na seção passada, nesta seção, com  $k' = N/2$ , este primeiro somatório é não nulo quando  $k' = k = N/2$ . Assim temos dois casos dentre os somatório não nulos, em que ambos caem no caso da equação 5.12, resultando em, quando substituimos  $k' = N/2$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos \left( \frac{2\pi}{N} \frac{N}{2} n \right) x[n] = \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{a_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' + k)n \right] + \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' - k)n \right] \right\}$$

$$= \sum_{k=N/2} \frac{a_k}{2} [N + N]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(\pi n) x[n] = N a_{N/2},$$

que, isolando o termo  $a_{N/2}$ , resulta na fórmula que esperada

$$a_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\pi n) x[n], \quad \text{para } N \text{ par.}$$

#### Demonstração do cálculo de $b_k$

O termo  $b_0$  é nulo por definição pois podemos considerar que ele não existe, já que ele multiplicaria o  $\sin(\frac{2\pi}{N} \cdot 0 \cdot n) \equiv 0$ . Como esta componente de senoide é sempre nula, não faz sentido pensar em um termo com  $b_0$ .

Para os outros termos, faremos o processo análogo realizado com os casos gerais de  $a_k$  – multiplicaremos ambos os membros por  $\sin(\frac{2\pi}{N} k' n)$  e somaremos os termos dos dois membros para todos os  $n$  de 0 até  $N-1$ . Com isto, teremos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) x[n] &= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) a_0 + \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) + \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \\ &= a_0 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sum_{n=0}^{N-1} a_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sum_{n=0}^{N-1} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k' n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{a_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (k' + k)n \right] + \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (k - k')n \right] \right\} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{b_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' - k)n \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' + k)n \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Aqui, os dois primeiros somatórios, sobre funções seno, são sempre nulos pois coincidem com o caso da equação 5.11. Já o primeiro somatório de cosseno, é não nulo para  $k' = k$ , qualquer que seja o valor de  $k'$ , pois é sempre o caso da equação 5.12. O segundo somatório de cosseno é, também, sempre nulo, exceto quando  $N$  é par e  $k' = k = N/2$ , quando acabamos caindo, também, no caso da equação 5.12. Teremos, então, quando  $k' \neq N/2$  o caso

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \sin \left( \frac{2\pi}{N} k' n \right) x[n] &= \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{b_k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' - k)n \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k' + k)n \right] \right\} \\
&= \sum_{k=k'} \frac{b_k}{2} N = \frac{N b_{k'}}{2}
\end{aligned}$$

que implica no resultado esperado de

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin \left( \frac{2\pi}{N} k' n \right) x[n], \quad \text{para } k \neq 0, \quad k \neq N/2, \quad (5.13)$$

e quando  $N$  é par e  $k' = N/2$ , teremos

$$b_{N/2} = 0,$$

pois, a senoide da qual  $b_{N/2}$  é coeficiente,

$$\sin \left( \frac{2\pi}{N} \frac{N}{2} n \right) = \sin(\pi n) \equiv 0,$$

é sempre nula, tal como a senoide do termo  $b_0$ , de modo que ele não precisa existir.

## 5.4 Forma matricial das equações de análise

Quando vimos produtos de matrizes, antecipamos na questão 2.25 exatamente o conjunto de equações que possibilitam obter  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  e  $b_2$  que são os coeficientes da série de Fourier de tempo discreto quando a quantidade de amostras é  $N = 4$ . Ela nos ajuda a observar que como os termos  $a_k$ , como regra geral, são obtidos pelo somatório do produto entre  $\cos(\frac{2\pi}{N} kn)$  e  $x[n]$  e os termos  $b_k$  pelo somatório do produto entre  $\sin(\frac{2\pi}{N} kn)$  e  $x[n]$ , é possível obter todos os coeficientes se definirmos

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\lfloor N/2 \rfloor - 1} \\ a_{\lfloor N/2 \rfloor} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\lfloor N/2 \rfloor - 1} \\ b_{\lfloor N/2 \rfloor} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{bmatrix},$$

como a *matriz coluna de coeficientes*  $a_k$ , a *matriz coluna dos coeficientes*  $b_k$  e a *matriz coluna de amostras*, respectivamente, a *matriz de cossenos*,  $\mathbf{C}_{(\lfloor N/2 \rfloor + 1) \times N}$ , composta pelos elementos

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N}, & i = 1 \\ \frac{1}{N} \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (i-1)(j-1) \right], & N \text{ par}, i = N/2 + 1 \\ \frac{2}{N} \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (i-1)(j-1) \right], & \text{nos outros casos} \end{cases},$$

e a *matriz de senos*,  $\mathbf{S}_{(\lfloor N/2 \rfloor + 1) \times N}$ , composta pelos elementos

$$S_{ij} = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ 0, & N \text{ par}, i = N/2 + 1 \\ \frac{2}{N} \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (i-1)(j-1) \right], & \text{nos outros casos} \end{cases},$$

nas duas operações entre as matrizes

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \text{ e}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{x}. \quad (5.15)$$

Com estas definições, temos contas simples e fáceis de realizar em programação por meio de produto de matrizes, já que a matriz dos coeficientes dos cossenos é o produto da matriz dos cossenos pela matriz das amostras e a matriz dos coeficientes dos senos é o produto da matriz dos senos pela matriz das amostras.

## 5.5 Série de Fourier de tempo discreto compacta

Vimos na equação 2.29 da seção 2.3.5 que a soma de um seno com um cosseno resulta em um seno defasado seguindo a regra geral

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left[ \omega t + \arctg \left( \frac{A}{B} \right) \right]. \quad (5.16)$$

Ora, o somatório de nossa série de Fourier é justamente composto de somas de cosseno e com senos de amplitudes  $a_k$  e  $b_k$ , respectivamente, que podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} a_k \cos(w_k n) + b_k \sin(w_k t) &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \sin \left[ w_k n + \arctg \left( \frac{a_k}{b_k} \right) \right] \\ &= c_k \sin(w_k n + \theta_k), \end{aligned}$$

em que definimos

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \text{ e}, \quad (5.17)$$

$$\theta_k = \arctg \left( \frac{a_k}{b_k} \right). \quad (5.18)$$

Com esta mudança, podemos reescrever a série de Fourier de tempo discreto como uma constante somada a uma única senoide defasada para cada frequência como

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \sin(w_k n + \theta_k). \quad (5.19)$$

Demonstração similar pode ser realizada com a equação 5.20 para obter

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \cos(w_k n + \phi_k) \quad (5.20)$$

com

$$\phi_k = -\arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right). \quad (5.21)$$

Estas formas, além de mais sucintas, deixam explícita a existência de uma única componente de frequência angular normalizada  $w_k$  com sua respectiva amplitude  $c_k$  e por esta razão podemos chamá-la de *equação de síntese compacta*. No nosso nível de matemática, não é possível substituir as equações de análise. Devemos, então, continuar a calcular  $a_k$  e  $b_k$  pelas equações 5.4 a 5.9 e obter  $c_k$  e  $\theta_k$  ou  $\phi_k$  pelas equações 5.17 e 5.17 ou 5.21.

## 5.6 Espectro de frequências de um sinal limitado

Agora que chegamos a uma expressão que associa frequências  $w_k$  a uma medida de sua intensidade dada pela sua amplitude  $c_k$ , podemos dar algumas definições mais rigorosas de *espectro de frequências*, de modo a complementar significativamente e quantificar precisamente o que apresentamos na seção 4.3.

Podemos, definir o espectro de frequência como a **associação entre uma medida da intensidade de componentes de vibração e uma medida da respectiva frequência, em geral, apresentada em um gráfico que tem a medida da frequência como eixo horizontal (variável independente) e a medida da intensidade no eixo vertical (variável dependente)**.

Com esta definição, algumas possibilidades surgem, pois devemos escolher as medidas da intensidade da componente e a medida da frequência. São populares os usos dessas três medidas da intensidade da componente:

1. o valor absoluto da amplitude da componente  $|c_k|$ ;
2. o quadrado da amplitude da componente  $c_k^2$ ; ou
3. a energia da componente que, em geral, é proporcional a  $c_k^2$ .

Já para a quantificação da frequência, as quatro medidas a seguir são usuais:

1. o número de ordem  $k$  da componente;
2. a frequência angular normalizada  $w_k$  da componente;
3. a frequência angular  $\omega_k$  da componente; ou
4. a frequência  $f_k$  em hertz da componente.

Desta forma, é comum que chamemos um gráfico  $f_k \times |c_k|$  dos coeficientes da amostragem de  $x(t)$ , por exemplo, de espectro de frequências deste sinal.

## Apêndice A

# Respostas, sugestões e soluções

**Questão 2.1** (a)  $0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$ . (b)  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ .  
(c)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$ . (d)  $a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{11} \cdot 0 \cdot n\right) + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{11} n\right) +$   
 $a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{11} 2n\right) + a_3 \cos\left(\frac{2\pi}{11} 3n\right) + a_4 \cos\left(\frac{2\pi}{11} 4n\right) + a_5 \cos\left(\frac{2\pi}{11} 5n\right)$ .

**Questão 2.2** (a)  $\sum_{k=2}^6 \frac{1}{k^2}$  (b)  $\sum_{k=0}^5 12 \left(\frac{1}{4}\right)^k$  (c)  $\sum_{k=0}^4 \cos(k\omega t)$  (d)  $\sum_{k=1}^5 b_k \sin\left(\frac{2\pi}{10} kn\right)$

**Questão 2.3** (a)  $3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 2001^2 + 2003^2$ . (b)  $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \dots + \frac{1}{2^{115}} + \frac{1}{2^{119}}$   
(c)  $b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{200} n\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{200} n\right) + b_3 \sin\left(\frac{6\pi}{200} n\right) + \dots + b_{99} \sin\left(\frac{198\pi}{200} n\right) +$   
 $b_{100} \sin(\pi n)$ . (d)  $a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{1024} n\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{1024} k\right) + \dots + a_{511} \cos\left(\frac{1022\pi}{1024} n\right) +$   
 $a_{512} \cos(\pi n)$

**Questão 2.4** (a) 1,208721311. Erro de aproximadamente 2% para baixo. (b) 0,7604599047.  
Erro de aproximadamente 3,2% para baixo. (c) 1,499974597. Erro para baixo  
de aproximadamente 0,0017%.

**Questão 2.5** (a) 120. (b) 700. (c)  $5a$ . (d)  $Na_0$ . (e) 250. (f) 205. (g) 8250. (h) 0.

**Questão 2.6**  $\theta = \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}$ .

**Questão 2.7** (a)  $\dots -100\pi/3 \text{ rad/s}, -40\pi/3 \text{ rad/s}, 20\pi/3 \text{ rad/s}, 80\pi/3 \text{ rad/s}, 140\pi/3 \text{ rad/s} \dots$  A  
regra geral é  $\omega_k = 20\pi/3 + 20\pi k \text{ [rad/s]}$ . (b)  $20\pi/3 \text{ rad/s}$ .

**Questão 2.8** (a) Adotando para o 1º flash  $k = 0$ , a regra geral é  $\theta = \pi/6 + \pi k/2$ , com  $k$   
inteiro. As posições do móvel são todas sobrepostas às posições  $\pi/6, 2\pi/3, 7\pi/6$   
e  $5\pi/3$ , que correspondem a giros de  $\pi/2$  com relação a posição inicial. Após  
quatro flashes, o quinto ocorrerá com o móvel sobreposto a primeira posição pois  
 $4 \cdot \pi/2 = 2\pi$ .

**Questão 2.9** Vamos chamar a posição no 1º flash de  $\theta_0$ , no 2º de  $\theta_1$  e assim suces-  
sivamente até  $\theta_{10}$  no 11º flash. Se ao fim dos flashes eles se encontravam em  
posições coincidentes, podemos dizer que se  $\theta_0 = \theta_a + 2\pi i$ , então  $\theta_{10} = \theta_a + 2\pi j$  e  
teremos  $\Delta\theta = \theta_{10} - \theta_0 = 2\pi k$ . Se o primeiro flash ocorre em  $t_0$ , o segundo ocorre  
em  $t_1 = t_0 + T_s$ , o terceiro em  $t_2 = t_1 + T_s = T_0 + 2T_s$  e assim sucessivamente  
até  $t_{10} = t_0 + 10T_s$  no 11º flash, de modo que  $\Delta t = t_{10} - t_0 = 10T_s$ . Assim,  
a velocidade tem como regra geral a expressão  $\omega_k = \frac{2\pi k}{10T_s}$ , que é a resposta

da letra (b). Fazendo  $k = 1$  (ou, identicamente  $k = -1$ , que significaria que o móvel gira no sentido horário), teremos a velocidade mínima não nula dada por  $\omega = \frac{2\pi}{10T_s}$ , que é a resposta da letra (a). (c) As posições coincidem com os vértices de um polígono regular com  $L$  lados em que um dos vértices está sobre o eixo de referência e a trajetória é a circunferência circunscrita ao polígono. É possível ver que  $L = 10/\text{mdc}(10,k)$ .

**Questão 2.10** (a)  $\omega = \frac{2\pi}{NT_s}$ . (b)  $\omega_k = \frac{2\pi k}{NT_s}$ . (c) As posições coincidem com os vértices de um polígono regular com  $L = N/\text{mdc}(N,k)$  lados em que um dos vértices está sobre o eixo de referência e a trajetória é a circunferência circunscrita ao polígono.

**Questão 2.11** (a)  $|\omega| < \pi/T_s$ . (b)  $\theta_2$  próximo de  $\pi$ . Se  $\theta_2 = \pi$ , já haverá ambiguidade no sentido do giro. O móvel poderá estar com velocidade  $\omega = \pi/T_s$  ou  $\omega = -\pi/T_s$ . (c) Não é permitido que o móvel dê mais de uma volta. É justamente a possibilidade de ocorrer mais de uma volta que gera a ambiguidade na variação da posição angular consequentemente na velocidade angular.

**Questão 2.12** Pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa é 5, e  $\sin \alpha = 3/5 = 0,6$ ,  $\cos \alpha = 4/5 = 0,8$   $\text{tg } \alpha = 3/4 = 0,75$ .

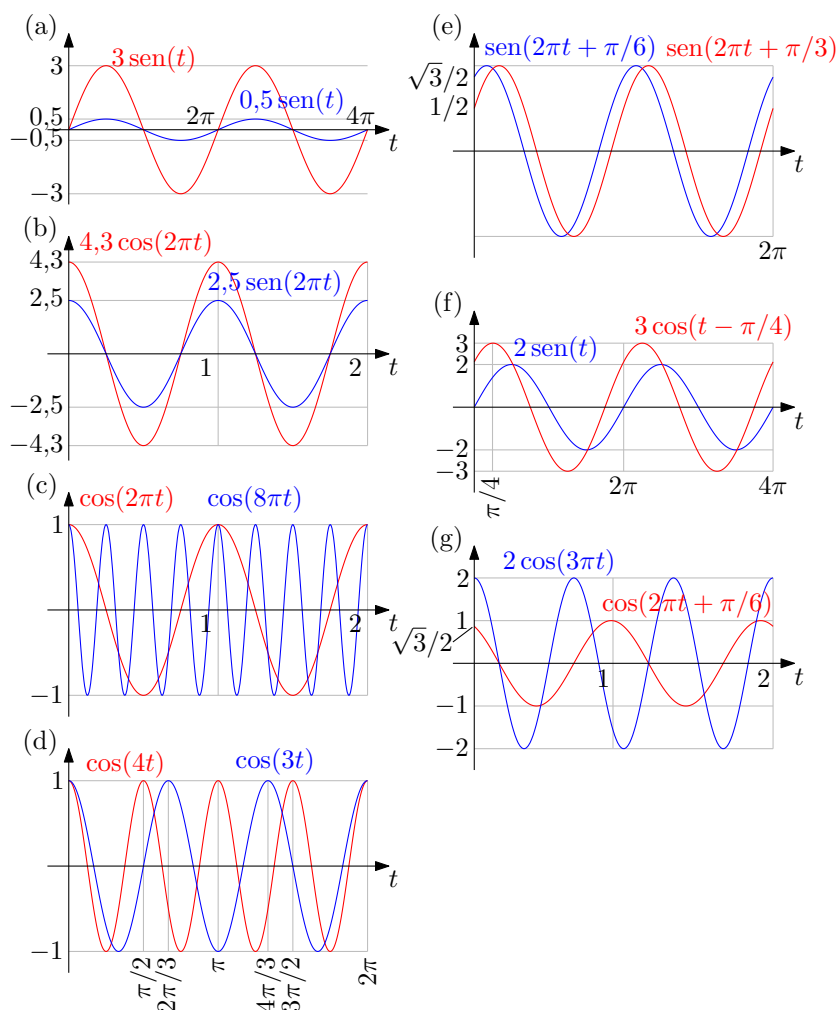
**Questão 2.13** Obtém-se  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$ .

**Questão 2.14** Obtém-se  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\text{tg } 45^\circ = 1$ .

**Questão 2.15**

ângulo	arco	seno	cosseno	tangente
$-120^\circ$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$-90^\circ$	$-\frac{\pi}{2}$	$-1$	$0$	$\infty$
$-60^\circ$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$-45^\circ$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1$
$-30^\circ$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$0^\circ$	$0$	$0$	$1$	$0$
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$1$	$0$	$\infty$
$120^\circ$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$135^\circ$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1$
$150^\circ$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$180^\circ$	$\pi$	$0$	$-1$	$0$
$210^\circ$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$225^\circ$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$
$240^\circ$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$270^\circ$	$\frac{3\pi}{2}$	$-1$	$0$	$\infty$
$300^\circ$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$315^\circ$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1$
$330^\circ$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$360^\circ$	$2\pi$	$0$	$1$	$0$
$405^\circ$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$
$450^\circ$	$\frac{5\pi}{2}$	$1$	$0$	$\infty$
$495^\circ$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1$
$540^\circ$	$3\pi$	$0$	$-1$	$0$
$585^\circ$	$\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$
$630^\circ$	$\frac{7\pi}{2}$	$-1$	$0$	$\infty$
$675^\circ$	$\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1$
$720^\circ$	$4\pi$	$0$	$1$	$0$

**Questão 2.16** Os valores de seno e cosseno se repetem a cada  $360^\circ$ . Os valores de tangente a cada  $180^\circ$ . Os valores do cosseno em um ângulo são iguais aos do seno  $90^\circ$  a mais. O seno é ímpar e o cosseno é par. Os valores de máximo e mínimo do seno e cosseno são iguais a 1 e  $-1$  respectivamente. O cosseno é nulo nos ângulos congruentes a  $90^\circ$  e  $-90^\circ$  e o seno é nulo nos ângulos congruentes a  $0^\circ$  e  $180^\circ$ .



**Questão 2.18**

**Questão 2.19**  $\theta = -\pi/4 + 2\pi k$  ou  $\theta = -3\pi/4 + 2\pi k$ , para  $k$  inteiro. Na margem entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ , teremos  $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2) = -\pi/4$ .

**Questão 2.20**  $\theta = \pi/3 + 2\pi k$  ou  $\theta = -\pi/3 + 2\pi k$ , para  $k$  inteiro. Na margem entre 0 e  $\pi$ , teremos  $\cos^{-1}(1/2) = \pi/3$ .

**Questão 2.21**  $\theta = -\pi/6 + 2\pi k$  ou  $\theta = 2\pi/3 + 2\pi k$ , para  $k$  inteiro. Esta resposta pode ser resumida como  $\theta = -\pi/6 + \pi k$ . Na margem entre 0 e  $\pi$ , teremos  $\text{tg}^{-1}(-\sqrt{3}/3) = -\pi/6$ .

**Questão 2.22** (a)  $8 \text{ sen}(120\pi t + \pi/6)$ ; (b)  $1,5\sqrt{2} \cos(\omega t)$ ; (c)  $\frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ sen}(880\pi t - 2\pi/3)$ .

**Questão 2.23** (a)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

(b)  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 6 & 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

$$(c) \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \cos(0) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 1) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 2) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 3) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 4) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 5) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 6) \\ \frac{2}{7} \cos(0) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 2) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 4) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 6) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 8) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 10) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 12) \\ \frac{2}{7} \cos(0) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 3) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 6) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 9) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 12) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 15) & \frac{2}{7} \cos(w_0 \cdot 18) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} \approx \begin{bmatrix} 0,1429 & 0,1429 & 0,1429 & 0,1429 & 0,1429 & 0,1429 & 0,1429 \\ 0,2857 & 0,1781 & -0,0636 & -0,2574 & -0,2574 & -0,0636 & 0,1781 \\ 0,2857 & -0,0636 & -0,2574 & 0,1781 & 0,1781 & -0,2574 & -0,0636 \\ 0,2857 & -0,2574 & 0,1781 & -0,0636 & -0,0636 & 0,1781 & -0,2574 \end{bmatrix},$$

em que  $\omega_0 = 2\pi/7$ .

**Questão 2.24** (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -11 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$

**Questão 2.25**

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{4}x[0] + \frac{1}{4}x[1] + \frac{1}{4}x[2] + \frac{1}{4}x[3] \\ a_1 = \frac{1}{2}x[0] + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)x[1] + \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right)x[2] + \cos\left(\frac{6\pi}{4}\right)x[3] \\ a_2 = \frac{1}{4}x[0] + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right)x[1] + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{8\pi}{4}\right)x[2] + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{12\pi}{4}\right)x[3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)x[1] + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)x[2] + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)x[3] \\ b_2 = 0 \end{cases}$$

**Questão 2.26**

$$c_{11} = \sum_{k=1}^3 a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 2$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^3 a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = -1$$

$$\vdots$$

$$c_{32} = \sum_{k=1}^3 a_{3k}b_{k2} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = -2$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

**Questão 3.7**  $S = 21\,133\,125$ .

**Questão 3.8**  $\pi^2/8 \approx 1,2334505501570059$  com erro de aproximadamente 0,0203%.  
 $\pi/4 \approx 0,7851481634599485$  com erro de aproximadamente 0,031%. Na aritmética aproximada do Python obtemos um valor exato para o último somatório com 1000 termos.

**Questão 3.13** Empregue operações elemento a elemento sobre matriz para, partindo de uma matriz com os valores da variável independente, calcular todos os valores da variável dependente.





# Referências Bibliográficas

- [1] VIDEOLAN Organization. **VLC**. Versão 3.0.20. [S.l], 2024. Disponível em: <https://www.videolan.org/vlc/>. Acesso em: 9 nov. 2024.
- [2] LINSSID. Versão 3.6. [S.l], 2018. Disponível em: <https://sourceforge.net/projects/linssid/> . Acesso em: 9 nov. 2024.
- [3] PYTHON 3.10.4 documentation. **Python Software Foundation**, 15 abr. 2022. Disponível em: <https://docs.python.org/3/index.html>. Acesso em: 15 abr. 2022.
- [4] NUMPY documentation. **NumPy Project**, 14 jan. 2022. Disponível em <https://numpy.org/doc/stable/index.html>. Acesso em: 17 abr. 2022.
- [5] MATPLOTLIB 3.5.1 documentation. **Matplotlib Project**, 2022. Disponível em <https://matplotlib.org/3.5.1/index.html>. Acesso em: 17 abr. 2022.
- [6] Applied Science. **Electron microscope slow-motion video of vinyl LP**. Youtube, 15 Jun. 2015. Disponível em <<https://youtu.be/GuCdsyCWmt8>>. Acesso em 27 abr. 2022.
- [7] AUDACITY TEAM. **Audacity**. Versão 3.6.1. [S.l], 2024. Disponível em: <https://www.python.org/>. Acesso em: 18 ago. 2024.

# Apêndice B

## Material Instrucional – Videoaulas

As 35 videoaulas listadas a seguir, produzidas para auxílio na condução do curso de Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier proposto para o curso de Análise de Espectro para o Ensino Médio. O acesso às videoaulas é facilitada pelo uso da [lista de reprodução](#)<sup>1</sup> disponibilizada no YouTube.

- Introdução ao Espectro de Frequências [1]
- Introdução ao Espectro de Frequências [2]
- Introdução ao Espectro de Frequências [3]
- Introdução ao Espectro de Frequências [4]
- Espectro e a modulação AM
- Somatórios [1]
- Somatórios [2]
- Movimento Circular Uniforme

---

<sup>1</sup>Disponível no link:  
[https://youtube.com/playlist?list=PLdny05X-pNRIGw\\_003X9N7u0uEqLFixqX](https://youtube.com/playlist?list=PLdny05X-pNRIGw_003X9N7u0uEqLFixqX).

- Funções Trigonométricas [1]
- Funções Trigonométricas [2]
- Funções Trigonométricas [3]
- Funções Trigonométricas [4]
- Ondas [1]
- Ondas [2]
- Ondas [3]
- Ondas [4]
- Matrizes
- Aspectos Gerais do Python
- Sintaxe Básica Python Nativo
- Comandos de Controle de Fluxo
- Python na Matemática [1]
- Python na Matemática [2]
- Python na Matemática [3]
- Amostragem
- Noção de Espectro e Amostragem de Senoides
- Série de Fourier de Tempo Discreto [1]
- Série de Fourier de Tempo Discreto [2] - Recuperação do Sinal
- Cálculo dos Coeficientes da Série de Fourier de Tempo Discreto
- Demonstração das Equações de Análise [1]
- Demonstração das Equações de Análise [2]

- Equações de análise da SFTD na forma matricial
- Equação de síntese da SFTD na forma matricial
- Espectro com SFTD [1]. Série de Fourier de tempo discreto compacta
- Espectro com SFTD [2]. Espectro do ping do sonar
- Espectro com SFTD [3]. Espectro do ping do sonar real

## Apêndice C

### Material Instrucional – Projetos para análise de espectro

O material instrucional a seguir é uma lista de pequenos projetos ou exercícios mais aprofundados criados com a finalidade de aplicar as competências desenvolvidas durante o curso de “Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier”. Seu uso deve ser integrado ao curso e as soluções e sugestões para solução dos problemas se encontram no apêndice D.

## PROJETOS PARA ANÁLISE DE ESPECTRO

**Quão rápido batem as asas.** Estime o quão rápido batem as asas de um beija-flor empregando um vídeo comum como o “How to tame wild humming-birds” (disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=vVjkAnbcDqw>). Tente empregar mais de um método de estimativa. Repita o processo para estimar o quão rápido batem as asas de uma mosca. Explique como você realizou as estimativas.

**Estimativa de velocidade na F1.** Estime a velocidade com a qual os carros passam pelo espectador no vídeo “BEST F1 Sound exhaust V8” (disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=hpvu5MfaSk>) Tente empregar mais de um método de estimativa com a finalidade de validar a medida. Explique como você realizou as estimativas.

**Velocidade do chute ao gol.** Estime a velocidade do seu chute ao gol. Tente empregar mais de um método de estimativa com a finalidade de verificar a confiabilidade da medida. Explique como você realizou as estimativas.

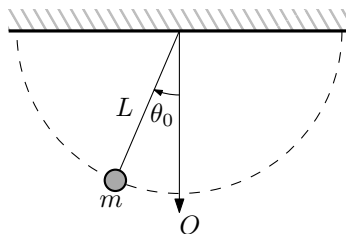
**Identificação da altura de som monofônico.** Escolha um trecho de áudio de uma música monofônica (uma única nota é tocada por vez) e identifique a altura das notas executadas. Empregue algum método para validar se as notas identificadas conferem com as executadas. Explique como você realizou a identificação.

**Identificação de dígitos em *dual-tone*.** Grave a discagem de algumas sequências numéricas empregando o simulador “Online Tone Generator”. (Disponível em: <https://onlinetonegenerator.com/dtmf.html>). Identifique a sequência discada. Explique como você realizou a identificação. Tente automatizar o processo de identificação.

**Pêndulo, ângulo de partida e MHS.** Discuta qual é o perfil do espectro de um MHS. Obtenha  $\theta[n]$  para o pêndulo da figura abaixo que é largado do repouso a partir de  $\theta_0$  para diversos valores de  $\theta_0$ . Ele é composto por uma massa pontual  $m$  e por uma haste de massa desprezível e comprimento  $L$ . Discuta se o espectro coincide com aquele esperado para um MHS e se a possível coincidência ocorre para qualquer  $\theta_0$ . Faça o gráfico da proporção do harmônico fundamental na composição de  $\theta[n]$  com relação ao ângulo de largada  $\theta_0$ . Verifique o quanto a frequência fundamental se afasta da frequência teórica

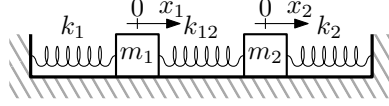
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

também com a variação de  $\theta_0$ .



**Comportamento massa-mola com 2 graus de liberdade.** Considere o sistema de massas e molas da figura em uma superfície sem atrito. Descreva como você supõe que seria o movimento das massas  $m_1$  no eixo  $x_1$  e  $m_2$  no

eixo  $x_2$  caso uma perturbação temporária fosse introduzida anteriormente no sistema. Considere que no momento do estudo apenas as forças elásticas agem horizontalmente sobre as massas. Descreva a posição das massas a partir da equação para a força resultante em cada bloco.



**Filtragem da voz.** Aplique uma máscara sigmoide (em formato de “S”) sobre o espectro de um áudio de voz. Uma boa função sigmoide direita (começa com valor baixo e aumenta o valor a medida que  $k$  cresce) é dada por

$$f[k] = \frac{1}{1 + e^{-\frac{k-k_0}{L}}}.$$

O valor  $k_0$  é o valor de  $k$  no qual ocorre a inversão da curva do “S” e o de  $L$  determina o espalhamento da curva. Quanto maior for o seu valor, mais espalhada será a curva e menos abrupta é a transição entre valores próximos de 0 e próximos de 1. Já a curva sigmoide

$$g[k] = \frac{1}{1 + e^{\frac{k-k_0}{L}}},$$

é invertida, mas os parâmetros têm o mesmo significado (veja que muda apenas o sinal da exponencial). Escute o áudio da voz recuperada após a aplicação das máscaras. Descreva qualitativamente o efeito da aplicação da máscara sobre o áudio.

**Flauta sintética.** Analise o espectro de uma flauta tocando um tom. Estime quais harmônicos são os mais relevantes. Tente replicar o som pelo somatório de componentes senoidais na proporção do obtido na análise de espectro. Escute e analise qualitativamente o som. Gere um áudio com uma grande quantidade de números aleatórios (com a função `numpy.random.normal`, por exemplo). Faça vários espectrogramas de trechos consecutivos deste áudio obtenha a média da intensidade das componentes. Estime quais são as frequências presentes no áudio composto com números aleatórios, na média. Aplique uma máscara sobre o espectro do ruído (o sinal gerado com números aleatórios) com perfil similar ao do espectro da flauta. Uma função capaz de gerar uma faixa estreita similar a um harmônico é dada por

$$g[k] = e^{-\alpha|k-k_0|},$$

ela cresce exponencialmente próximo a  $k_0$ , em  $k_0$  ela atinge o valor máximo de 1 e a partir daí ela decresce exponencialmente formando um pico simétrico em torno de  $k_0$ . Mude o valor de  $\alpha$  para mudar o quão abrupta é a passagem até o máximo em  $k_0$ . Escute o áudio resultante e analise qualitativamente o som.

**Reconhecimento de altura (*pitch*) automático.** Dado um áudio de música monofônica, proponha um script que identifica a altura das notas tocadas automaticamente.

**Transmissão simultânea empregando AM.** Obtenha o espectro de um sinal de voz  $m_1[n]$  e observe qual é a frequência máxima  $w_{\text{máx1}}$  de suas componentes. Empregue-o como amplitude de um sinal cossenoidal  $p_1[n] = \cos w_{p1}n$



para obter

$$s_1[n] = m_1[n]p_1[n] = m_1[n] \cos w_{p1}n.$$

Este esquema é chamado de modulação em amplitude em que  $m_1[n]$  é o sinal modulante da portadora  $p_1[n]$ , ou seja,  $p_1[n]$  é uma senoide de amplitude variável dada pelo valor de  $m_1[n]$ . Escolha para a frequência da portadora  $w_{p1}$  um valor que seja ao menos o dobro da frequência máxima das componentes de  $m_1[n]$ . Caso necessário recorra a *superamostragem* para “abrir espaço” no espectro e possibilitar o estudo. O espectro do estudo deve possibilitar a visualização de frequências até  $w_{p1} + w_{\text{máx1}}$ . Descreva o que acontece com o espectro de  $s_1[n]$  quando a frequência da portadora  $w_{p1}$  é modificada e verifique se há justificativa para a necessidade de empregar frequências até  $w_{p1} + w_{\text{máx1}}$ . Proponha uma explicação que justifique a forma do espectro de  $s_1[n]$ . (Obs.: é possível obter uma explicação algébrica descrevendo  $m_1[n]$  por uma série de Fourier de tempo discreto.)

Agora faça o mesmo com um segundo sinal de voz  $m_2[n]$  e uma portadora  $p_2[n] = \cos w_{p2}n$  para obter o sinal modulado  $s_2[n]$ . Considerando o efeito da mistura da portadora com o sinal que vimos em  $s_1[n]$ , descreva como poderíamos transmitir  $s_1[n]$  e  $s_2[n]$  de modo que, na frequência, um sinal não se misture com o outro. Apresente o espectro do sinal resultante  $s[n] = s_1[n] + s_2[n]$  em que é possível ver as duas transmissões sem que haja mistura. Se  $s_1[n]$  é o sinal de uma onda eletromagnética gerada por uma estação 1 de rádio AM e  $s_2[n]$  o sinal gerado pela estação 2, que efeito faz com que, para um receptor, o sinal percebido seja  $s[n]$ ?

**Separação de sinais AM.** Considere o sinal  $s[n]$  do problema anterior. Aplique máscaras sobre seu espectro para separar o sinal  $s_1[n]$  do sinal  $s_2[n]$  e obtenha os sinais AM recebidos  $r_1[n]$  e  $r_2[n]$  de cada estação.

**Demodulação AM.** Aplique sobre  $r_1[n]$  e  $r_2[n]$  os sinais  $p_1[n] = \cos w_{p1}n$  e  $p_2[n] = \cos w_{p2}n$ , respectivamente, tal como na modulação AM e observe o espectro dos sinais  $m'_1[n] = r_1[n]p_1[n]$  e  $m'_2[n] = r_2[n]p_2[n]$  comparando seus espectros com os de  $m_1[n]$  e  $m_2[n]$ . Obtenha  $m_1[n]$  e  $m_2[n]$  a partir de  $m'_1[n]$  e  $m'_2[n]$ . Proponha uma explicação que justifique a forma do espectro de  $m'_1[n]$  ou de  $m'_2[n]$ . (Obs.: é possível obter uma explicação algébrica utilizando o resultado do problema da modulação.) Descreva a operação realizada para recuperar  $m_1[n]$  e  $m_2[n]$ . Escute  $m_1[n]$  e  $m_2[n]$  recuperados e compare com os originais utilizados na operação de modulação.

**Amortecedor massa-mola com atrito viscoso.** Considere uma força  $\vec{F}(t)$  de intensidade  $F = F_m \cos(\omega t)$  sendo aplicada sobre o bloco de massa  $m$ . A superfície em que o bloco se desloca é livre de atrito, mas o fluido em que a massa se encontra causa uma força de atrito viscoso  $\vec{F}_{at}$  contrária e proporcional a velocidade, e para a qual a constante de proporção é  $\beta$ , ou seja,

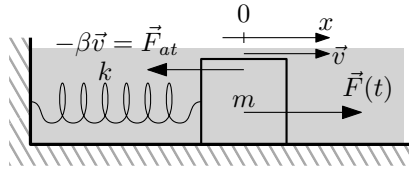
$$\vec{F}_{at} = -\beta \vec{v}.$$

Após algum tempo sobre ação da força  $\vec{F}(t)$ , a posição  $x(t)$  do bloco deve se aproximar, também, de uma senoide  $x(t) \approx X_m \cos(\omega t + \theta)$ , com mesma frequência do estímulo de  $\vec{F}(t)$ . Faça o gráfico  $\frac{X_m}{F_m} \times \omega$  da razão da amplitude do deslocamento de  $x(t)$  pela amplitude da força  $\vec{F}(t)$  a medida que se altera a frequência  $\omega$ . Este gráfico é chamado de *resposta em frequência*.

Obtenha o espectro de  $x[n]$  para uma força  $\vec{F}[n]$  impulsiva, ou seja,  $\vec{F}[n]$  é sempre nula, exceto em uma amostra  $n_0$  em que  $\vec{F}[n_0] = 1$ . Compare o gráfico

de  $\frac{X_m}{F_m} \times \omega$  com o espectro de  $x[n]$  para este estímulo. Por fim, compare os resultados com o resultado esperado obtido empregando cálculo diferencial e dada por

$$\frac{X_m}{F_m} = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}.$$



## Apêndice D

### Material Instrucional – Sugestões para realização dos projetos

O material instrucional a seguir resolve ou apresenta sugestões aos projetos propostos no apêndice C para emprego como referência no curso de “Amostragem de grandezas na Física e seus espectros de Fourier”.

# SUGESTÕES PARA SOLUÇÃO DOS PROJETOS PARA ANÁLISE DE ESPECTRO

## 1 Quão rápido batem as asas

Vídeos comuns tem taxa de atualização de quadro muito baixa comparada a velocidade do bater das asas de um beija-flor. As asas aparecem como um borrão devido ao efeito conhecido como *motion blur*, o rastro devido à movimentação. Por esta razão, sugerimos empregar o áudio<sup>1</sup> como fonte de informação para estimativa.

Para tal, é necessário uma breve modelagem da situação física para verificar que o som se relaciona com o quão rápido as asas do beija-flor batem. Isto é possível considerando que as asas causam uma variação de pressão nas vizinhanças da asa e sabemos que o som se origina na propagação de ondas de pressão. Logo, é razoável supor que o bater das asas gere som, e que as cristas e vales, por terem origem no movimento das asas, devem acompanhar seus padrões de repetitividade. Assim, se se sabe qual a frequência dos componentes do som do bater da asa, poder-se-á estimar a frequência do bater das asas.

Utilizamos um aplicativo web do tipo “conversor de Youtube para mp3” que escolhemos arbitrariamente dentre os resultados da pesquisa empregando os termos em inglês “youtube to mp3” na ferramenta de busca. Com este aplicativo, conseguimos acesso ao áudio do vídeo sugerido.

O vídeo completo tem 3 min 28 s, mas desejamos estudar um fenômeno em uma escala de tempo muito menor. Para isso, fizemos a análise grossa do áudio no Audacity onde observamos que aproximadamente entre 21,95 s e 22,70 s há um trecho em que o som do bater das asas é bem evidente e que representa bem o fenômeno que desejamos estudar. Isolamos este trecho no audacity, reduzimos o áudio para mono e exportamos para o arquivo `beijaflor.wav` para fazer a análise fina no Python.

### 1.1 Análise no domínio do tempo

O código 1 gera o gráfico  $t \times$  intensidade do trecho de áudio em que o bater das asas é isolado e forte. Plotamos o gráfico exibido na figura 1 que editamos para marcar dois vales da ondulação gerada. Contamos 34 ondulações entre  $t_1 \approx 0,00925$  s e  $t_2 \approx 0,7861$  s onde localizamos os vales. Se considerarmos que as ondulações são aproximadamente periódicas com período  $T_0$ , então

$$34T_0 = t_2 - t_1, \quad (1)$$

o que implica  $T_0 \approx 22,8$  ms, correspondente a uma frequência fundamental  $f_0 \approx 43,8$  Hz.

---

<sup>1</sup>Interessante notar que o nome em inglês do beija-flor, *hummingbird*, se traduz, aproximadamente como pássaro-zumbido, destacando o efeito sonoro perceptível da batida de suas asas.

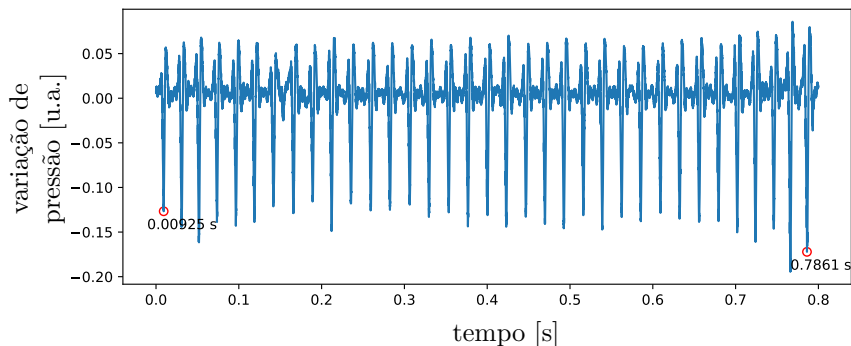


Figura 1: Trecho de áudio do bater de asas obtido pelo código 1.

```

1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import soundfile
4 amostras, fsArquivo = soundfile.read("beijaflor.wav")
5 NArquivo = len(amostras)
6 TsArquivo = 1/fsArquivo
7 t = arange(0, len(amostras))
8 t = t*TsArquivo
9 print("Quantidade de amostras no arquivo:", NArquivo, "amostras
    ")
10 print("Taxa de amostragem do arquivo:", fsArquivo, "Hz")
11 print("Duração do áudio:", t[-1], "s")
12 print("Estimativa de consumo de memória:", (NArquivo
    **2*64/(8*2**30)), "GiB")
13 plt.plot(t, amostras)
14 plt.show()

```

Código 1: Análise do áudio do beija-flor no domínio do tempo.

## 1.2 Análise no domínio da frequência

Imprimimos as informações abaixo no código 1 que empregaremos para tomar algumas decisões para realizar a análise no domínio da frequência.

- Quantidade de amostras no arquivo: 35270 amostras
- Taxa de amostragem do arquivo: 44100 Hz
- Duração do áudio: 0.799750566893424 s
- Estimativa de consumo de memória: 9.268320351839066 GiB

Vemos que o trecho de áudio que contém o fenômeno a estudar tem uma grande quantidade de amostras, mais de 35 mil. Pela estimativa que fizemos na análise de tempo, a frequência fundamental presente no áudio é por volta de 40 Hz. Se considerarmos que o áudio tem 10 harmônicos relevantes, precisaríamos estudar até 400 Hz. Como consequência, a taxa de amostragem mínima é de  $2 \cdot 400 \text{ Hz} = 800 \text{ Hz}$ , e a taxa de amostragem do áudio é a taxa de amostragem

padrão de 44100 Hz, mais de 50 vezes maior do que a necessária para estudar até o 10<sup>o</sup> harmônico.

É esta alta taxa de amostragem que leva a uma grande quantidade de amostras. A estimativa de consumo de memória para os cálculos com essa quantidade de amostras é de mais de 9 GiB<sup>2</sup>, o que está nos limites da memória disponível em computadores comuns de escritório.

Para realizar a análise no domínio da frequência, vamos, antes, reduzir forçadamente a taxa de amostragem por um processo chamado de *dizimação*. Trata-se de, simplesmente, ignorar algumas amostras. Por nossa estimativa, podemos ignorar até por volta de 49 de cada 50 amostras, mas vamos adotar uma *dizimação* mais conservadora e coletar apenas 1 de cada 20 amostras. Chamaremos este número de  $k_{\text{dizimação}} = 20$ .

Desta forma, das 35270 amostras iniciais, sobrarão apenas 1764 amostras, reduzindo o consumo de memória para menos de 30 MiB. Este processo é equivalente a ter um amostrador 20 vezes mais lento do que o que realizou a amostragem do áudio, ou seja, a nova frequência de amostragem será  $44100/20 = 2205$  Hz. Processos para alterar a frequência de amostragem para baixo são chamados de *downsampling*, sendo a *dizimação* o mais simples deles.

Pusemos o código 2 após a execução do código 1 para realizar a *dizimação* das amostras de áudio, calcular os coeficientes da SFTD compacta  $c_k$  e plotar o espectro do áudio *dizimado*. A *dizimação* é feita na linha 2 empregando um recurso mais avançado da indexação dos arrays do NumPy. Vimos na apostila duas formas de indexar. Utilizando `amostras[i]`, acessamos o *i*-ésimo elemento e utilizando `amostras[inicio:fim]`, fazemos um corte dos elementos de `amostras` do elemento de índice `inicio` até o elemento de índice `fim` (exceto). O corte com três elementos como fizemos na linha 2 do código 2, em que empregamos `amostras[0:NArquivo:kDizimacao]`, tem como sintaxe `inicio:fim:passo`, ou seja, o corte não é feito coletando todos os elementos, mas a distância entre os elementos é dada pelo `passo`, que é exatamente o efeito que desejamos na *dizimação*.

---

<sup>2</sup>Para chegar à estimativa de consumo de memória, consideramos o tamanho de 64 bits de um número da matriz, relativo ao tamanho empregado por um número no padrão `double` (representação em ponto flutuante de dupla precisão), que 1 Byte corresponde a 8 bits e que 1 Gi é o multiplicador equivalente a  $2^{30}$ . Por fim, a quantidade de números empregado nas matrizes de análise é aproximadamente o quadrado da quantidade de amostras.

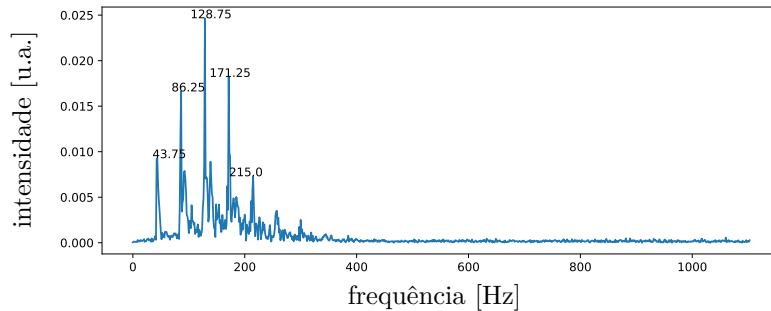


Figura 2: Espectro do trecho de áudio do bater de asas obtido pelo código 2.

```

1 kDizimacao = 20
2 x = amostras[0:NArquivo:kDizimacao]
3 fs = fsArquivo/kDizimacao
4 N = len(x)
5 w0 = 2*pi/N
6 i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
7 j = reshape(arange(N),(1,N))
8 matrizIJ = i@j
9 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
10 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
11 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
12 if N%2==0:
13     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
14 a = Ca@x
15 b = Sa@x
16 c = sqrt(a**2 + b**2)
17 f = arange(0,int(N/2)+1)*(fs/N)
18 plt.plot(f,c)
19 plt.plot()
20 plt.show()

```

Código 2: Análise do áudio do beija-flor no domínio da frequência.

O espectro do áudio dizimado obtido é mostrado na figura 2, em que adicionamos por fora as frequências dos picos observados. O seu eixo vertical é a frequência em hertz e o vertical é a intensidade do harmônico em unidades arbitrárias oriundas do processo de conversão analógico-digital.

Este espectro exhibe as características típicas de um espectro de um sinal aproximadamente periódico mas não-senoidal. Neste caso, os componentes presentes no sinal são devidos à frequência fundamental e aos harmônicos de ordem mais alta que têm, necessariamente, frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental. Os principais picos de intensidade dos componentes encontram-se nas frequências  $f_0 \approx 43,75$ ,  $86,25$ ,  $128,75$ ,  $171,25$  e  $215$  hertz, que são, respectivamente, a frequência fundamental e seus 4 harmônicos seguintes que vão do dobro de  $f_0$  ao seu quádruplo.

A resolução da medida da frequência neste espectro é de

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{2205}{1764} = 1,25 \text{ Hz.}$$

Com este valor de resolução, temos uma frequência fundamental  $42,5 \text{ Hz} \leq f_0 \leq 45 \text{ Hz}$ . Este valor confere com a estimativa de  $f_0 = 43,8 \text{ Hz}$  que fizemos no domínio do tempo. Vemos, também, que 86,25, 128,75, 171,25 e 215 hertz estão dentro das margens aceitáveis para  $2f_0$ ,  $3f_0$ ,  $4f_0$  e  $5f_0$ , respectivamente.

### 1.2.1 Qualidade da medida de frequência

A medida de frequência feita pelo espectro da figura 2 tem duas imperfeições: o limite superior da frequência e a resolução. O limite superior de nossa medida foi de 1102,5 Hz, metade da frequência de amostragem após a dizimação (que era de 2205 Hz). Grosseiramente (sem um critério quantitativo rigoroso), podemos dizer não haver, efetivamente, qualquer componente de frequência relevante nas frequências acima de 400 Hz do espectro. Isto significa que nossa estimativa inicial foi boa. Pode-se testar uma dizimação com  $k_{\text{dizimação}} = 125$ , por exemplo, e observar o efeito que a frequência de amostragem de 352,8 Hz terá sobre o espectro<sup>3</sup>. Além do deslocamento aparente de alguns componentes, observar-se-á que não haverá “folga” entre os últimos componentes de frequência relevantes e o limite da escala de frequência. Sempre que isto ocorrer, é provável que seja um caso de subamostragem.

Já a resolução de 1,25 Hz, considerando que estamos com medidas relevantes de frequência em torno de 40 Hz, representa um desvio de por volta de 3%, o que é um valor razoável para uma estimativa e, portanto, com qualidade suficiente para a aplicação.

Estas duas observações são sempre necessárias no estudo de um fenômeno e na medida de frequências por meio da série de Fourier de Tempo Discreto. Se a taxa de amostragem é adequada para observação do fenômeno e se a resolução possibilitará a precisão necessária para as medidas.

## 1.3 Estimativa do quão rápido batem as asas do beija-flor

Tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, obtivemos uma frequência fundamental em torno de 40 Hz para o som emitido pelo bater das asas do beija-flor no curto trecho estudado. Empregamos duas metodologias distintas para tal. Pode-se argumentar que como o movimento de descida das asas é muito distinto do de subida, podemos supor que um ciclo descida-subida corresponde a um período do som. Daí, então, estimar a frequência do bater das asas nas dezenas de batidas por segundo.

Para uma verificação final, sem realização de análise de dados, pode-se recorrer à pesquisa bibliográfica como no trabalho de Warrick [1] que põe um limite superior para o bater de asas de um beija-flor em torno de 80 Hz.

Como última avaliação quantitativa, pode-se buscar outros trechos do mesmo vídeo e ainda outros vídeos e tentar estabelecer uma estatística para uma melhor estimativa. Neste caso, a pesquisa bibliográfica pode auxiliar na escolha de

<sup>3</sup>A frequência de Nyquist de 176,4 Hz parecerá um espelho que rebaterá as frequências mais altas do que este limite. A frequência do quinto harmônico, por exemplo, de 215 Hz, aparecerá na frequência de  $137,8 \text{ Hz} = 176,4 - (215 - 176,4) \text{ Hz}$ .



vídeos buscando diferentes espécies de beija-flor que tenham uma frequência de batida distinta, de modo a estabelecer bons limites para a estimativa.

## 1.4 Bater das asas de uma mosca

A estimativa do quão rápido bate as asas de uma mosca pode ser feita de maneira análoga ao realizado para estimativa do bater das asas do beija-flor. Ou seja, partir de uma fonte do áudio do bater das asas e, pela medida da frequência fundamental do som gerado pelo fenômeno, estimar a frequência do bater das asas.

## 2 Estimativa de velocidade na F1

Vamos fazer uma breve análise da situação encontrada no vídeo. Os automóveis passam rapidamente em um trecho do circuito por um observador que grava a corrida de uma mureta colada com o limite da pista. Pelo vídeo, é possível falar pouco sobre valores exatos de velocidade pois a posição é difícil de verificar quando o observador grava o movimento a partir do chão. Não há referências seguras de posição ou comprimento e o movimento é acompanhado em uma projeção em que a escala muda devido ao afastamento. Não há escala de distância definida no vídeo. Isto significa que o vídeo, apenas, não facilita a estimativa da velocidade pois não é fácil definir as posições dos móveis, apenas os instantes de tempos que estão bem definidos no progresso dos quadros.

A descrição do vídeo nos informa que o vídeo é gravado na Bélgica no Circuito de Spa-Francorchamps, nas proximidades (ou observando) dos trechos chamados de *Eau Rouge* e *Raidillon*. Pesquisamos na Internet pelo circuito, localizamos seu mapa com as referências dos trechos no guia [RacingCircuits.info](http://RacingCircuits.info) [2]. Com o vídeo e o mapa, foi possível localizar a pista em imagens de satélite do Google Maps e a posição aproximada do observador do vídeo na latitude  $50,442900^\circ$  e longitude  $5,969823^\circ$ .

Com a imagem de satélite, que dispõe de uma escala, pode-se fazer uma primeira estimativa por meio da cinemática do vídeo comparada com o mapa. Pode-se definir aproximadamente dois pontos em que se possa ter alguma correspondência no mapa e no vídeo. No mapa, pode-se achar a distância entre eles e, no vídeo, o tempo aproximado que o móvel leva para passar entre um ponto e o outro, de modo que se pode estimar a velocidade pela velocidade média dada pela razão da distância pelo tempo.

### 2.1 Estimativa empregando o efeito Doppler

Uma segunda estimativa pode ser feita por meio do efeito Doppler sobre as emissões dos carros ao passarem pelo observador. Para tal, é necessário uma breve modelagem da situação física de modo a garantir que a estimativa é coerente com a situação. Observa-se que o trecho é aproximadamente reto e que o observador, no limite externo da pista, está o mais próximo possível da trajetória dos móveis onde ainda há segurança.

No nível do Ensino Médio, a modelagem do efeito Doppler pressupõe que o móvel e o observador se encontram na mesma trajetória retilínea. Este não é o caso da nossa situação. De fato, no caso geral, há uma dependência da

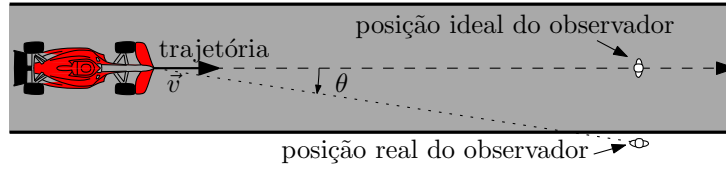


Figura 3: Descrição da situação em que o vídeo da fórmula 1 foi gravado.

frequência percebida pelo observador com o cosseno do ângulo  $\theta$  que a velocidade instantânea do móvel faz com a direção entre o observador e o móvel como ilustrado na figura 3.

Quando o observador se encontra na trajetória retilínea, a relação entre a frequência percebida  $f_p$  pelo observador, a frequência emitida  $f_e$  pelo emissor é

$$f_p = \frac{f_e}{1 \pm \frac{v}{c}} \quad (2)$$

em que  $v$  é o módulo da velocidade do móvel e  $c$  é a velocidade do som. O sinal positivo ocorre no afastamento e o sinal negativo é o caso da aproximação. No caso geral, quando o observador não se encontra na mesma trajetória retilínea, temos

$$f_p = \frac{f_e}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}}. \quad (3)$$

Neste caso, a aproximação para a expressão da equação 2 só é válida quando, se aproximando,  $\theta$  é pequeno de modo que  $\cos \theta \approx 1$  ou  $\theta$  é próximo de  $180^\circ$  de modo que  $\cos \theta \approx -1$ .

Isto significa que durante a passagem do móvel, há um trecho de transição em que  $\cos \theta$  é muito diferente de 1 ou  $-1$ . Nesta região, não podemos empregar a expressão da equação 2 com exatidão, o que não é um grande problema para a finalidade de estimativa.

De qualquer maneira, ainda temos uma outra variável para tratar se desejamos determinar a velocidade  $v$  do móvel que é a frequência que ele emite. Isto pode ser resolvido com as seguintes considerações

- o trecho em que há a transição entre aproximação e afastamento é curto e a velocidade  $v$  é aproximadamente constante logo antes e logo após a transição; e
- a frequência de emissão  $f_e$  do automóvel depende de sua velocidade (está predominantemente associada a rotação do motor que é proporcional à velocidade em uma mesma marcha) e portanto também é aproximadamente constante.

Com elas, podemos estudar a frequência percebida na aproximação logo antes da transição, que chamaremos  $f_{ap}$ , e a frequência percebida no afastamento logo após a transição, que chamaremos de  $f_{af}$ . Consideraremos que em ambos os casos  $v$  e  $f_e$  permanecem constantes. Com isso

$$f_{ap} = \frac{f_e}{1 - \frac{v}{c}} \text{ e } f_{af} = \frac{f_e}{1 + \frac{v}{c}}. \quad (4)$$

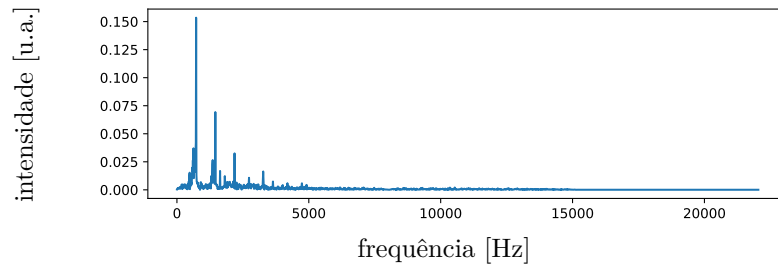


Figura 4: Espectro de trecho do áudio da aproximação do carro.

Resolvendo para  $v$ , temos

$$v = c \frac{f_{ap} - f_{af}}{f_{ap} + f_{af}}. \quad (5)$$

Basta-nos realizar as medidas de  $f_{ap}$  e  $f_{af}$ . Vamos fazê-lo com uma passagem de um automóvel por volta dos 10 s no vídeo. Consideramos como aproximação um trecho de áudio entre 9,77 s e 9,865 s. O trecho que escolhemos tinha apenas 3937 amostras, o que resulta em menos de 200 MiB de memória e efetivamente utilizamos o áudio original para a medida. O espectro deste trecho é mostrado na figura 4 e foi obtido pelo código 3. O primeiro pico é o mais intenso e de menor frequência, sendo, portanto o componente da frequência fundamental. Ela é medida no espectro como  $f_{ap} = 728,09$  Hz.

```

1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import soundfile
4 x, fs = soundfile.read("Flap.wav")
5 N = len(x)
6 w0 = 2*pi/N
7 i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
8 j = reshape(arange(N),(1,N))
9 matrizIJ = i@j
10 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
11 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
12 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
13 if N%2==0:
14     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
15 a = Ca@x
16 b = Sa@x
17 c = sqrt(a**2 + b**2)
18 f = arange(0,int(N/2)+1)*(fs/N)
19 plt.plot(f,c)
20 plt.plot()
21 plt.show()

```

Código 3: Obtenção do espectro do som de trecho da aproximação do carro de F1.

Vemos no espectro que praticamente não há componentes com frequência

maior do que 5000 Hz e, por esta razão, aqui também poderíamos ter empregado dizimação com  $k_{\text{dizimação}} \approx 4$  sem prejuízo à análise do espectro.

Para estimar  $f_{af}$  fizemos um processo similar com um trecho entre aproximadamente 11,250 e 11,330 s obtendo  $f_{af} = 445,80$  Hz.

Aplicando os valores obtidos para  $f_{ap}$  e  $f_{af}$  e considerando  $c = 343$  m/s na equação 5, obtemos  $v = 82$  m/s = 297 km/h, uma velocidade típica da F1 em uma reta. Neste problema, também é válida a análise estatística, já que há a passagem de vários carros, o que possibilita o estabelecimento de uma média e um desvio padrão para a medida.

### 3 Velocidade do chute ao gol

Este problema comporta a solução típica da cinemática, como a medida da velocidade como a razão entre a distância entre o ponto em que a bola é chutada e o ponto em que ela colide com a rede, por exemplo. Considerando nossa sugestão de realizar mais de uma estimativa e a possibilidade de realização de medidas de frequências, podemos tentar uma medida da velocidade explorando o efeito Doppler.

A figura 5 propõe uma configuração que possibilita a medida por meio desse efeito. Para tal, é necessário uma fonte de áudio por meio da qual se possa controlar a frequência da emissão. Isto é fácil de obter empregando uma caixa de som sem fio e a emissão de uma frequência conhecida. Não é difícil encontrar aplicativos, inclusive com funcionamento no navegador, que emitem uma frequência controlada. Eles podem ser encontrados pesquisando por gerador de tom, sendo mais fácil encontrá-los em ferramentas de pesquisa empregando os termos em inglês (*tone generator*).

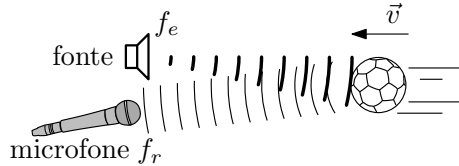


Figura 5: Esquema para medição da velocidade da bola empregando o efeito Doppler.

Como alternativa, pode-se empregar o Python, gerar uma senoide com a frequência desejada, com uma taxa de amostragem arbitrária, e por um tempo suficiente para realizar o experimento. Pode-se reproduzir o áudio executando a função `sounddevice.play` ou ainda salvando a matriz em um arquivo com a função `soundfile.write` e executá-lo em um aplicativo de reprodução de mídia.

Ao mesmo tempo em que a frequência é emitida, é necessário captá-la com um microfone, que pode ser um microfone de um celular. Se a bola fosse um observador, ele estaria em movimento com relação à fonte que se encontra em repouso com relação à atmosfera. Neste caso, sabemos que a frequência que a bola “perceberia” o som é

$$f_r = f_e \left( 1 + \frac{v}{c} \right). \quad (6)$$

Ora, essa é justamente a taxa com a qual a onda se choca com a bola e, portanto, a taxa com a qual a bola reflete a onda. Ou seja, pode-se determinar a velocidade da bola isolando  $v$ , obtendo

$$v = c \left( \frac{f_r}{f_e} - 1 \right). \quad (7)$$

Da equação 7 sabe-se a frequência emitida  $f_e$ , que deve ser definida na configuração do experimento, e a velocidade  $c$  do som. Pelo espectro do sinal captado pelo microfone que esboçamos na figura 6, pode-se determinar a frequência refletida  $f_r$ . Tipicamente nesta configuração, não é fácil evitar que o microfone receba a emissão da caixa de som, que poderá, inclusive, se apresentar com maior amplitude do que as componentes de áudio refletido. O áudio deverá ter dois picos, um na frequência emitida e outro, possivelmente menor, na frequência refletida  $f_r$ . Observando este segundo pico, pode-se medir  $f_r$  e estimar a velocidade da bola pela equação 7.

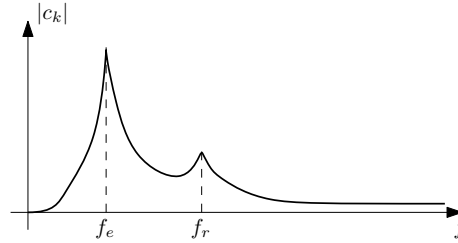


Figura 6: Esboço do espectro do sinal de áudio captado pelo microfone no experimento da figura 5.

## 4 Identificação da altura de som monofônico

Se o a música é monofônica, espera-se que a única nota tocada possa ser identificada por sua frequência fundamental e, portanto, mensurável pelo espectro. Pode-se separar os trechos de cada uma das notas no Audacity e verificar suas frequências fundamentais pelo espectro com um algoritmo similar ao do código 3.

Obtida a frequência fundamental, pode-se recorrer às convenções para a definição das notas musicais na escala temperada, convenção mais comum na música ocidental. A escala temperada respeita as convenções:

- Nota padrão  $A_4 = 440$  Hz.
- Outras notas seguem uma progressão geométrica.
- 13ª nota da escala *cromática* recebe o mesmo nome da 1ª nota, chamada de oitava (na escala não cromática utiliza-se apenas 7 notas).
- A oitava tem o dobro da frequência da nota original.  $A_4 = 440$  Hz,  $A_5 = 880$  Hz.

Tabela 1: Oitava completa das notas da escala cromática ocidental.

ordem	alfabética	solfejo
0	A (A <sub>4</sub> )	lá (natural)
1	A $\sharp$ ou B $\flat$	lá sustenido ou si bemol
2	B	si (natural)
3	C (A <sub>5</sub> )	dó (natural)
4	C $\sharp$ ou D $\flat$	dó sustenido ou ré bemol
5	D	ré (natural)
6	D $\sharp$ ou E $\flat$	ré sustenido ou mi bemol
7	E	mi (natural)
8	F	fá (natural)
9	F $\sharp$ ou G $\flat$	fá sustenido ou sol bemol
10	G	sol (natural)
11	G $\sharp$ ou A $\flat$	sol sustenido ou lá bemol

Logo, se considerarmos a nota A<sub>4</sub> como o termo de ordem 0 da PG, ou seja  $a_0 = 440$  Hz, então o A<sub>5</sub> será o termo de ordem 12, ou seja  $a_{12} = 880$  Hz. Com isso, é possível encontrar a regra geral na qual, dada a ordem da nota (neste caso A<sub>4</sub> tem ordem 0 e A<sub>5</sub> tem ordem 12), temos a sua frequência, pois é possível obter a razão  $q = 2^{1/12}$  e a expressão geral para o termo da PG

$$a_n = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}n} [\text{Hz}]. \quad (8)$$

Ora, se os termos desta PG determinam as frequências, para identificar a nota, devemos tentar descobrir a ordem  $n$  dado o termo. A tabela 1 mostra a ordem de todas as notas da escala cromática (a que contém todas as 12 notas desta convenção). Se medirmos, por exemplo, uma frequência fundamental de  $a_n = 790$  Hz, pela inversão

$$n = 12 \log_2 \frac{a_n}{440}, \quad (9)$$

chegamos a  $n \approx 10,13$ . Como  $n$  deve ser um inteiro, a ordem da nota, vemos que há ou uma imprecisão na execução da nota ou na sua medida, sendo a ordem mais próxima  $n = 10$  que corresponde a nota G (sol natural).

A sequência das notas da tabela 1 é cíclica, repetindo-se a cada 12 notas. A nota de ordem 0 é a mesma nota de ordem 12. A nota de ordem 1 é a mesma nota da de ordem 13 e assim sucessivamente, inclusive para valores negativos da ordem. Assim, se se obtém  $a_n = 2220$  Hz, se obtém  $n \approx 28$ , que, pelo ciclo, é o mesmo que a nota que tem  $n = 4$  pois  $28 = 4 + 12 \cdot 2$ , ou seja, são dois ciclos adiante da nota de ordem 4. Como a nota de ordem 4 é o C $\sharp$  (dó sustenido) e o primeiro ciclo é o ciclo do C $\sharp_5$  (ou seja, da oitava de ordem 5), então a nota que tem  $n = 28$  é o C $\sharp_7$ , ou seja, duas oitavas à frente<sup>4</sup>.

Por outro lado, uma nota com frequência fundamental  $a_n = 165$  Hz, tem  $n \approx -17$ . Ora,  $-17 = 7 + (-2) \cdot 12$ , ou seja, é a mesma nota que a nota de ordem 7 mas duas oitavas abaixo da apresentada na tabela 1. Como a nota de ordem 7 na tabela é o E<sub>5</sub>, então a nota que tem frequência fundamental de 165 Hz é o E<sub>3</sub>.

<sup>4</sup>Observe que o A (lá natural) é a nota padrão de frequência e primeira letra do alfabeto mas o C (dó natural) é a nota que determina a numeração das oitavas, apresentada no subscrito.

## 4.1 Verificação das notas

Pode-se procurar algum registro das notas que estão sendo tocadas como a sua partitura, por exemplo. Este caminho é fácil se a música escolhida for clássica com direitos autorais abertos. Uma segunda possibilidade é procurar um instrumento afinado ou até um aplicativo de piano e repetir as notas obtidas e comparar sensorialmente com as notas na música. Há uma grande quantidade de aplicativos, inclusive alguns web, que podem ser utilizados no navegador, permitem a reprodução das notas e, inclusive, indicam a nota tocada e a sua oitava.

## 5 Identificação de dígitos em *dual-tone*

O uso do dual-tone consiste na execução de duas frequências ao mesmo tempo, sendo uma delas referente à linha e a outra a coluna da tecla, de modo a associar o par de tons aos símbolos arranjados em linha e colunas como mostra a figura 7 reproduzida da norma ITU-T Rec. Q. 23 [3]. As frequências são 697, 770, 852 e 941 Hz para as linhas (baixas frequências) e 1209, 1336, 1477 e 1633 Hz<sup>5</sup> para as colunas (altas frequências).

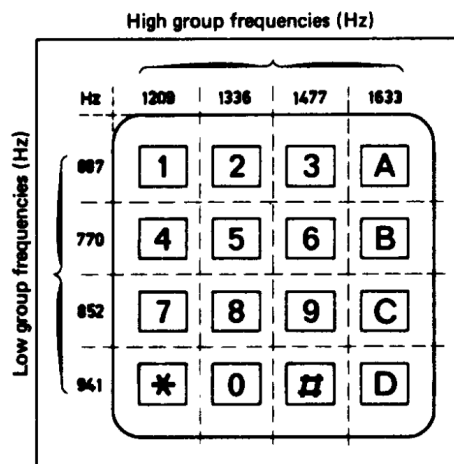


Figura 7: Teclado do *dual-tone* e as suas frequências.

Fonte: ITU-T Rec. Q. 23[3].

Como cada tecla emite duas frequências muito próximas de senoidais (a norma determina que o conteúdo na frequência seja 10 vezes maior na frequência fundamental do que aqueles em outras frequências durante a transmissão e um desvio máximo de  $\pm 1,8\%$  na frequência emitida), o espectro apresentará apenas dois picos acentuados nas frequências relativas à tecla pressionada.

Assim, basta ler ambas as frequências num trecho de emissão para determinar a tecla pressionada. A leitura pode ser feita pelo espectro da mesma

<sup>5</sup>Note que a última coluna foi reservada na norma para as teclas A, B, C e D que foram previstas mas acabaram não sendo implantadas nos telefones e teclados com este formato.

maneira que empregamos o espectro para leitura de harmônicos nos problemas anteriores.

## 5.1 Automatização de leitura da sequência de teclas

Esta fase admite muitas soluções, pois a automatização da identificação da sequência é um verdadeiro problema de engenharia. Vamos propor uma solução com muitas regras mas, todas elas, simples. Nesta fase da aprendizagem, não é possível propor um programa de identificação automática infalível e os algoritmos propostos poderão apresentar falsos positivos ou falsos negativos com frequência e isto não deve ser considerado um problema.

Para nossa solução gravamos uma sequência de teclas no Audacity a partir do áudio gerado pelo aplicativo Dual Tone Generator<sup>6</sup> e o empregamos como entrada do script de Python. Como uma sequência de discagem é um áudio longo, criamos uma regra para analisá-lo em partes. A primeira parte do algoritmo é mostrada no código 4. Ele cria as variáveis de apoio que empregaremos. A primeira delas, o `criterioEnergia` é a proporção mínima de energia (associada ao quadrado da amplitude da componente de frequência) na frequência para considerarmos que ela está presente como parte de uma emissão de *dual-tone*. Ou seja, se a tecla 6 for pressionada, deve haver pelo menos 10% da energia do sinal na frequência 770 Hz e pelo menos 10% da energia na frequência 1477 Hz pois empregamos `criterioEnergia = 0.1`.

---

<sup>6</sup>Disponível em <https://onlinetonegenerator.com/dtmf.html>.



```

1  #Definição de variáveis da lógica da sequência
2  critérioEnergia = 0.1
3  freqLinha = array([697, 770, 852, 941])
4  freqColuna = array([1209, 1336, 1477, 1633])
5  teclas = array([[ "1", "2", "3", "A", "n" ],
6                  [ "4", "5", "6", "B", "n" ],
7                  [ "7", "8", "9", "C", "n" ],
8                  [ "*", "0", "#", "D", "n" ],
9                  [ "n", "n", "n", "n", "n" ]])
10 sequencia = ""
11 #Carrega o áudio
12 discagem, fs = soundfile.read("discagem.wav")
13 #Prepara as variáveis para realizar SFTD
14 N = 5000
15 Deltaf = fs/N
16 w0 = 2*pi/N
17 i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
18 j = reshape(arange(N),(1,N))
19 matrizIJ = i@j
20 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
21 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
22 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
23 if N%2==0:
24     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
25 #Preparação para percorrer o áudio
26 inicio = 0
27 fim = N
28 i=0
29 teclaAtual = "n"

```

Código 4: Definição de variáveis gerais e para cálculo do espectro para a identificação automática de *dual-tone*.

Os vetores **freqLinha** e **freqColuna** guardam as frequências padrão das linhas e colunas na ordem em que aparecem no padrão. Já a matriz **teclas**, carrega em seu elemento **teclas[i,j]** a tecla correspondente em formato string da *i*-ésima linhas e *j*-ésima coluna. A última linha e última coluna é utilizada com o caractere identificador "n" com a finalidade de indicar que o toque de uma das frequências da linha ou da coluna não foi identificado. Estas três variáveis foram criadas para facilitar a localização da possível tecla tocada pela comparação entre as posições das frequências nos vetores **freqLinha** e **freqColuna** e localizá-lo na matriz **teclas**.

Após cada teste, caso o resultado da avaliação da matriz **teclas** resulte em uma das teclas, ela será gravada no string **sequencia**, que é inicializado vazio para que seja preenchido a medida que a presença das frequências do *dual-tone* forem sendo identificadas.

O fim do código 4 apenas define as matrizes que serão empregadas no cálculo do espectro e as variáveis de controle do laço que efetivamente fará a identificação das teclas.

O algoritmo que propomos aqui divide o áudio em frações **x** com **N** amostras. Esperamos que **N** seja muito menor que a quantidade total de amostras do áudio

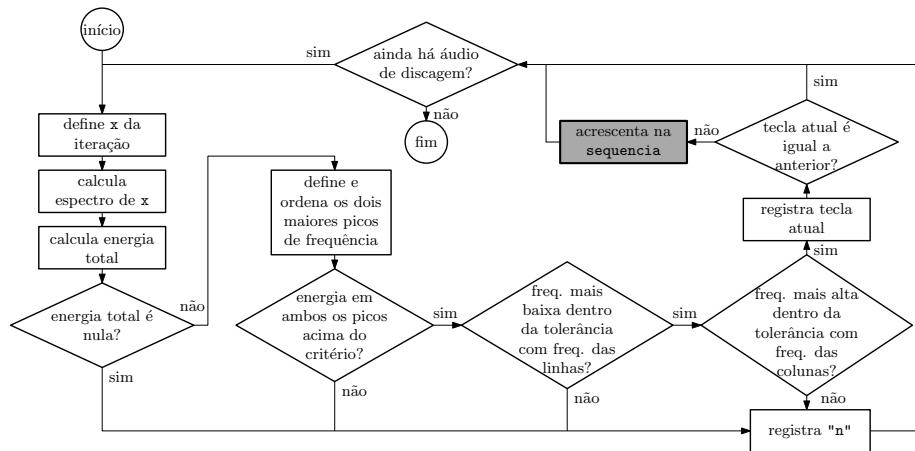


Figura 8: Fluxograma do algoritmo para definir a sequência *dual-tone* presente em um áudio.

que contém a sequência. O que fazemos com  $x$  a cada iteração é mostrado no fluxograma da figura 8.

Os seguintes testes são feitos para que se possa, enfim, registrar uma tecla como sendo parte da sequência:

- A energia total no sinal deve ser não-nula, caso contrário, trata-se de um trecho de silêncio absoluto.
- Identificados dois picos de frequência e sua ordem (qual tem frequência maior que o outro), só haverá registro se a energia nos picos for alta o suficiente para ser considerada uma frequência de *dual-tone* intencional e não a simples presença ocasional destas frequências no áudio.
- O valor da frequência medida dos picos deve estar dentro da tolerância de 1,8% com relação às frequências esperadas no *dual-tone*.
- A tecla deve ser nova para ser registrada, caso contrário, consideramos que este trecho  $x$  ainda continua o toque da tecla iniciado em trechos anteriores.

O código 5 implementa o fluxograma da figura 8. A forma como ele identifica dois picos é, localizando o primeiro pelo seu índice dentre os valores dos coeficientes  $c$  com a função **argmax** que retorna o índice do item de  $c$  que tem o maior valor. Após calcular sua potência, o algoritmo zera o valor do pico e de suas adjacências de modo que a próxima aplicação de **argmax** tenda a localizar o próximo pico.

Para comparar a frequência dos picos com as frequências padrão, o algoritmo utiliza o **argmin**, análogo ao uso do **argmax**, mas para obter o índice do valor mínimo, o que é feito sobre o vetor que contém as frequências padrão subtraídas do valor do pico. Se o pico for próximo de alguma frequência padrão, a célula correspondente apresentará um valor próximo de 0.

```

1  while fim < len(discagem):
2      x = discagem[inicio:fim]
3      c = sqrt( (Ca@x)**2 + (Sa@x)**2 )
4      energiaTotal = sum(c**2)
5      if energiaTotal == 0:
6          linha = 4
7          coluna = 4
8      else:
9          picoLinha = argmax(c)*Deltaf
10         energia1 = c[argmax(c)]**2/energiaTotal
11         c[argmax(c)-3:argmax(c)+4] = 0
12         picoTemp = argmax(c)*Deltaf
13         energia2 = c[argmax(c)]**2/energiaTotal
14         if picoTemp < picoLinha:
15             picoColuna = picoLinha
16             picoLinha = picoTemp
17         else:
18             picoColuna = picoTemp
19         if energia1 < criterioEnergia or energia2 <
20             criterioEnergia:
21             linha = 4
22             coluna = 4
23         else:
24             linha = argmin(abs(freqLinha - picoLinha))
25             if abs(freqLinha[linha] - picoLinha) > 0.036*
26                 freqLinha[linha]:
27                 linha = 4
28             coluna = argmin(abs(freqColuna - picoColuna))
29             if abs(freqColuna[coluna] - picoColuna) > 0.036*
30                 freqColuna[coluna]:
31                 coluna = 4
32         if ((teclas[linha,coluna] != teclaAtual) and (teclas[
33             linha,coluna] != "n")):
34             sequencia = sequencia + teclas[linha,coluna]
35         teclaAtual = teclas[linha,coluna]
36     i = i+1
37     inicio = N*i
38     fim = N*(i+1)
39 print(sequencia)

```

Código 5: Implementação do fluxograma da figura 8 em continuação ao código 4.

O áudio criado continha a sequência “77367150” que foi testado em dois cenários. No primeiro o áudio puro obtido do aplicativo Dual Tone Generator foi empregado como entrada. O áudio puro tem silêncio absoluto nos períodos em que nenhuma tecla está sendo pressionada, configurando um áudio ideal de *dual-tone*. No segundo cenário, empregamos o Audacity para misturar o áudio puro com o som ambiente<sup>7</sup> em uma mistura de volumes realista. Em ambos os cenários o algoritmo identificou a sequência de *dual-tone* corretamente.

<sup>7</sup>O som ambiente empregado foi <https://www.soundjay.com/human/crowd-talking-1.mp3>.

## 6 Pêndulo, ângulo de partida e MHS

### 6.1 Discussão do espectro do MHS

O movimento harmônico simples é aquele definido como análogo ao da projeção do movimento circular uniforme, e, portanto, consiste de um movimento senoidal. Por esta razão, seu espectro contém apenas 1 componente, com intensidade igual à amplitude e frequência igual a frequência de repetição do movimento. Por esta razão, o seu espectro deve conter apenas um pico, e o resto do espectro deve ser nulo.

### 6.2 Obtenção de $\theta[n]$

A força resultante sobre o pêndulo tem dois componentes. A centrípeta, que mantém a trajetória circular e o tangente à trajetória, que efetivamente altera o módulo da velocidade do móvel ao longo da trajetória. É este segundo que nos dará a equação do movimento. O componente tangente à trajetória da força resultante é dada por  $mg \sin \theta$ . Com isso, a equação do movimento do pêndulo é

$$mg \sin \theta = ma_t, \quad (10)$$

em que  $a_t$  é o componente tangente da aceleração, e é a aceleração linear sobre a trajetória circular, e, portanto, dado por

$$a_t = \alpha L, \quad (11)$$

em que  $\alpha$  é a aceleração angular dada em  $\text{rad/s}^2$ .

Podemos usar as relações

$$\alpha \approx \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega[n] - \omega[n-1]}{T_s} \quad (12)$$

e

$$\omega \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta[n] - \theta[n-1]}{T_s} \quad (13)$$

sucessivamente e isolar  $\theta[n]$  para obter

$$\theta[n] = -\frac{T_s^2 g}{L} \sin \theta[n-1] + 2\theta[n-1] - \theta[n-2]. \quad (14)$$

Nestas expressões  $\omega$  é a velocidade angular e  $\theta$  é a posição angular. Os valores entre colchetes são a ordem da amostra, ou seja, é uma simulação que nos dará amostras das posições angulares  $\theta$ . Como estamos trabalhando com amostras, a melhor aproximação para  $\Delta t$  é o período de amostragem  $T_s$ .

Vemos que o valor de  $\theta[n]$  depende de duas amostras anteriores, valores de  $\theta[n-1]$  e de  $\theta[n-2]$ , isto porque, de certa forma, para determinar o valor sucessivo, deve-se ter conhecimento da posição anterior, que poderia ser dada por  $\theta[n-1]$  e da velocidade anterior, que precisaria de uma variação  $\Delta \theta = \theta[n-1] - \theta[n-2]$ . Com isso, se o pêndulo é solto (velocidade inicial nula) de  $\theta = \theta_0$ , podemos fazer  $\theta[0] = \theta[1] = \theta_0$ , garantindo tanto a velocidade inicial nula como a posição inicial dada por  $\theta_0$ . A partir destes dois valores, é possível obter quantos valores de  $\theta$  se desejar.

### 6.3 Simulação no tempo

O código 6 simula 500 mil pontos de  $\theta[n]$  considerando  $L = 10$  m,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e  $\theta_0 = 0.1$  rad e tomando como referência para o período de amostragem 10000 pontos por período, considerando o período teórico de

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (15)$$

```
1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 L = 10
4 g = 10
5 omega0 = sqrt(g/L)
6 f0 = omega0/(2*pi)
7 T0 = 1/f0
8 Tssim = T0/10000
9 Nsim = 500000
10 theta0 = 0.1
11 theta = empty(Nsim)
12 k = (-1)*(Tssim**2)*g/L
13 theta[0] = theta0
14 theta[1] = theta0
15 for n in range(2,Nsim):
16     theta[n] = k*sin(theta[n-1])+2*theta[n-1] - theta[n-2]
17 t = arange(0,500000)*Tssim
18 plt.plot(t,theta[:50000])
19 plt.show()
```

Código 6: Cálculo de 500 000 valores de  $\theta[n]$  empregando aproximadamente 10 000 amostras por período.

### 6.4 Espectro para $\theta_0$ pequeno

O espectro do sinal do código 6 é mostrado na figura 10 para  $\theta_0 = 0,1$  rad, considerado um valor pequeno e com uma dizimação de  $k_{\text{dizimação}} = 100$ . Vale, portanto, a aproximação de que o pêndulo realiza uma oscilação harmônica com frequência fundamental

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad (16)$$

que para as escolhas da simulação resultam em  $\omega_0 = 1$  rad/s, valor no qual se observa o único valor relevante de componente. Para nossas escolhas de  $N$  e  $f_s$  após a dizimação, a ordem do harmônico com frequência de 1 rad/s é o  $c_{50}$ . Seu valor deveria ser igual a amplitude da oscilação dada pelo ângulo de onde o pêndulo é solto, porém, o valor calculado é de  $c_{50} = 0,09981449749198941$ , 0,18% menor do que deveria ser.

Os componentes próximos à  $c_{50}$  são em torno de duas ordens de grandeza menores do que o valor de pico e os valores dos componentes próximos dos

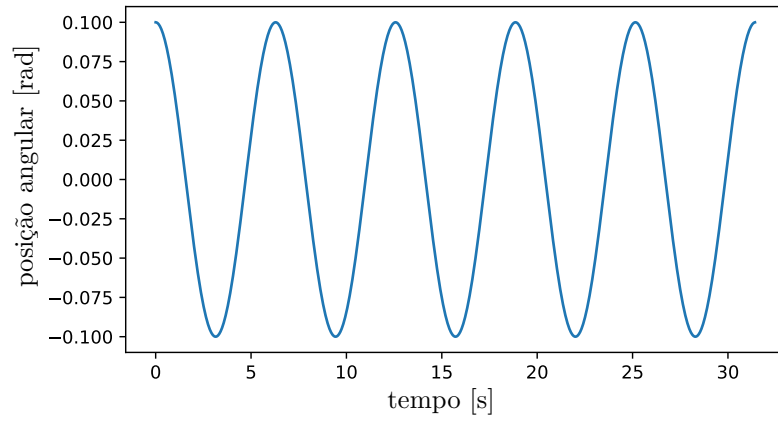


Figura 9: Simulação da oscilação do pêndulo para  $L = 10$  m,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e  $\theta_0 = 0.1$  rad.

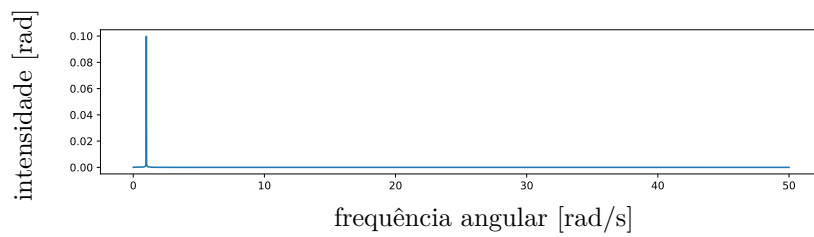


Figura 10: Espectro de  $\theta[n]$  obtido no código 6.

harmônicos de 2º e 3º ordens são quatro ordens de grandeza menor do que o valor de pico, mostrando que o espectro parece, efetivamente, o espectro de um MHS, composto de um único componente na frequência de oscilação<sup>8</sup>.

## 6.5 Estudo da frequência de oscilação com a variação do ângulo inicial $\theta_0$

Para estudar a variação da frequência da oscilação com  $\theta_0$ , é necessário um laço em que, a cada iteração, fazemos uma simulação, calculamos o espectro e estimamos a frequência da oscilação pela ordem do componente de frequência com máxima amplitude empregando a função `argmax`, o que fizemos no código 7. Assim, dada a ordem  $k$  do componente de frequência máximo, o que poderia ser feito com `k = argmax(c)`, pode-se chegar à frequência de oscilação por

$$\omega_{\text{oscilação}} = \frac{2\pi f_s}{N} k. \quad (17)$$

Assim, para cada valor de  $\theta_0$  no vetor `thetaIniciais`, que varre os ângulos  $0,1 \leq \theta_0 < \pi/2$  em intervalos de um centésimo de radiano, calculamos a frequência de oscilação e pusemos no gráfico em azul da figura 11. Nele, vemos que quanto maior é o ângulo de onde o pêndulo é solto, mas lentamente o pêndulo oscila. O gráfico dá “saltos” pois a precisão da medida da frequência de oscilação é

$$\Delta\omega = \frac{2\pi f_s}{N} = 0,02 \text{ rad/s} \quad (18)$$

em nossos espectros.

Para verificar a aderência dos resultados simulados e calculados por meio do espectro com valores teóricos, comparamos o nosso resultado com o proposto por Beléndez et al. [4] para o período de oscilação do pêndulo dado aproximadamente por

$$T_{\text{oscilação}} = 2\pi \sqrt{\frac{g}{L}} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right) \quad (19)$$

e apresentamos o gráfico do  $\omega_{\text{oscilação}}$  teórico em vermelho tracejado. Vemos uma excelente adesão entre as medidas de nossas simulações com o comportamento teórico esperado.

---

<sup>8</sup>Se mudarmos no modelo `sin(theta[n-1])` por `theta[n-1]`, estabelecendo um modelo efetivamente de MHS, o erro na frequência de pico cai para 0,0000058%, as frequências adjacentes à frequência de pico caem para 7 ordens de grandeza abaixo do pico e nas proximidades dos 2º e 3º harmônicos entre 8 e 9 ordens de grandeza abaixo.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  L = 10
4  g = 10
5  omega0 = sqrt(g/L)
6  f0 = omega0/(2*pi)
7  T0 = 1/f0
8  Tssim = T0/10000
9  Nsim = 500000
10 theta = empty(Nsim)
11 #Variáveis para cálculo dos espectros
12 kDizimacao = 100
13 Ts = Tssim*kDizimacao
14 N = int(Nsim/kDizimacao)
15 fs = 1/(Ts)
16 w0 = 2*pi/N
17 i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
18 j = reshape(arange(N),(1,N))
19 matrizIJ = i@j
20 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
21 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
22 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
23 if N%2==0:
24     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
25 #Simulações com variação do theta0
26 k = (-1)*(Tssim**2)*g/L
27 thetaIniciais = arange(0.1, pi/2, 0.01)
28 omega = empty(len(thetaIniciais))
29 i = 0
30 for theta0 in thetaIniciais:
31     theta[0] = theta0
32     theta[1] = theta0
33     for n in range(2,Nsim):
34         theta[n] = k*sin(theta[n-1])+2*theta[n-1] - theta[n-2]
35     x = theta[0:Nsim:kDizimacao]
36     c = sqrt((Ca@x)**2 + (Sa@x)**2)
37     omega[i] = 2*pi*argmax(c)*fs/N
38     i=i+1
39 #Cálculo teórico segundo Beléndez et al (2011)
40 TTeorico = 2*pi*sqrt(L/g)*(1+thetaIniciais**2/16+11*
    thetaIniciais**4/3072)
41 omegaTeorico = (2*pi)/TTeorico
42 #Plot dos gráficos
43 plt.plot(thetaIniciais,omega)
44 plt.plot(thetaIniciais,omegaTeorico,"r—")
45 plt.show()

```

Código 7: Cálculo da frequência de oscilação para valores de  $0,1 \leq \theta_0 < \pi/2$ .



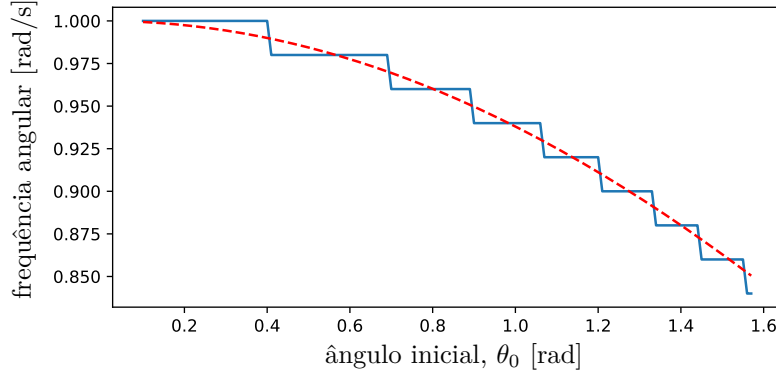


Figura 11: Variação da frequência de oscilação do pêndulo em termos do ângulo inicial  $\theta_0$ . Azul contínuo obtido pela simulação e vermelho tracejado o valor teórico aproximado da equação 19.

## 6.6 Estudo da proporção do harmônico fundamental com a variação do ângulo inicial $\theta_0$

Alteramos o código 7 na sua linha 28 para inicializar um vetor para registrar o cálculo da proporção:

```
proporcao = empty(len(thetaIniciais))
```

e a linha 37 para efetivamente realizar a proporção:

```
proporcao[i] = (c[argmax(c)])/(sum(c)).
```

Também modificamos o trecho para gerar o gráfico da variável `proporcao` em termos de  $\theta_0$ .

Como resultado das alterações no código 7, geramos o gráfico da figura 12 para a proporção entre a amplitude do componentes de maior intensidade com relação ao somatório de todas as amplitudes de componentes, ou seja

$$\text{proporção} = \frac{c_{\text{maior componente}}}{\sum c_k}. \quad (20)$$

Podemos ver que em alguns pontos esta razão está muito próxima de 1 para  $0,1\theta_0 \leq \pi/2$ , ou seja, o maior componente de frequência é o componentes predominante em todo o espectro, o que condiz com um MHS que possui um único harmônico na frequência de oscilação.

Fora destes pontos de pico, há uma queda abrupta na relevância da componente de pico. Isto se deve à imprecisão da medida da frequência por meio do espectro. A medida que o ângulo  $\theta_0$  muda, vimos que a frequência de oscilação muda, mas como a SFTD só mede **exatamente** as frequências no formato

$$\omega = \frac{2\pi f_s}{N} k = \Delta\omega k \quad (21)$$

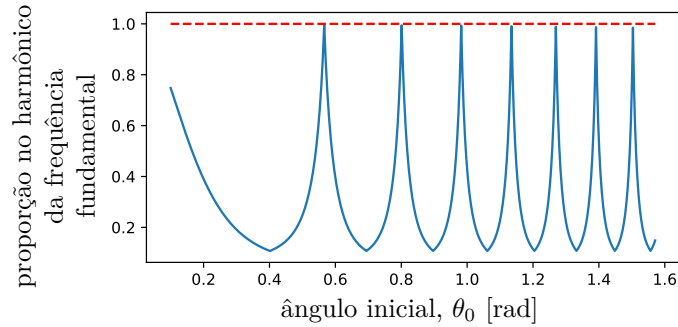


Figura 12: Proporção do componente da frequência fundamental com relação ao total para  $0,1 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ .

para valores inteiros distintos de  $k$ . Assim, quando a frequência de oscilação real fica fora destes valores, outras frequências próximas à frequência de oscilação acabam sendo “usadas” pela SFTD para conseguir realizar a representação do sinal por meio de frequências que usam necessariamente frequências no formato da equação 21.

Tomemos o caso em que  $\theta_0 = 0,4$  rad, por exemplo. Neste caso, temos  $\omega_{\text{oscilação}} = 0,99$  rad/s. Como em nossa simulação e cálculo de espectro nosso  $\Delta\omega = 0,2$  rad/s, as melhores leituras seriam para  $\omega_{\text{oscilação}} = 0,98$  ou  $\omega_{\text{oscilação}} = 1,00$ , e para  $\theta_0 = 0,4$  temos uma medida exatamente no meio, resultando na pior leitura possível. O espectro deste caso é apresentado na figura 13 em que a proporção calculada utilizando a equação 20 mede aproximadamente 0,108 e há uma grande quantidade de componentes em torno de  $\omega = 0,99$  rad/s com valor não nulo na tentativa de representar esta frequência que não está disponível com exatidão na representação em que  $\Delta\omega = 0,2$  rad. Observe como ele é diferente do espectro apresentado na figura 10 em que o pico de frequência é bem concentrado em um ponto.

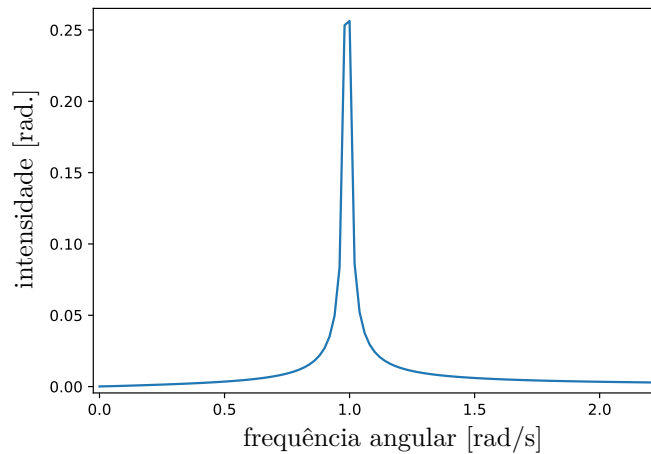


Figura 13: Detalhe do Espectro do pêndulo para  $\theta_0 = 0,4$  rad.

Desta forma, só é segura a análise do comportamento da proporção da figura 12 nos seus pontos de máximo, quando ela é capaz de melhor representar a oscilação do pêndulo. Esta figura, porém, mostra uma queda muito sutil na proporção, mostrando que até  $\theta_0 = \pi/2$ , a oscilação ainda é aproximadamente senoidal. Por esta razão, repetimos este processo para  $0,95\pi \leq \theta_0 < 99\pi$ , obtendo o resultado da figura 14. Nela, observamos que nos picos, onde a medida é mais precisa, a proporção do componente mais intenso é por volta de 80% do total, o que significa que para representar a forma da onda, são necessários mais componentes de frequência, possivelmente harmônicos, senoides em múltiplos inteiros da frequência fundamental.

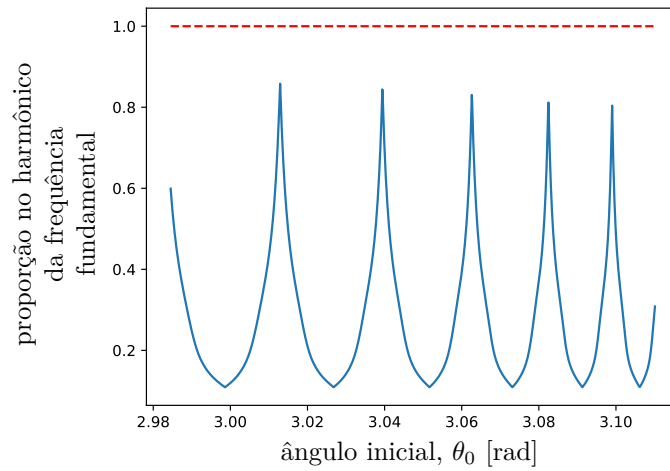


Figura 14: Proporção do componente da frequência fundamental com relação ao total para  $0,95\pi \leq \theta_0 < 0,99\pi$ .

Para ilustrar a distorção do formato senoidal, mostramos na figura 15 a simulação no tempo do caso extremo em que  $\theta_0 = 0,99\pi$ . Para este ângulo extremo, obtivemos  $\omega_{\text{oscilação}} = 0,283515 \text{ rad/s}$ , muito distante da frequência de  $1 \text{ rad/s} = \sqrt{g/L}$  e uma curva completamente diferente de uma senoide, que foi posta no gráfico em vermelho tracejado com mesma amplitude e frequência para a finalidade de comparação.

Uma onda tão diferente da senoide não pode ser composta de um único componente de frequência. O seu espectro é mostrado na figura 16. Nela, ajustamos  $N$  para alterar  $\Delta\omega$  de modo a coincidir com um submúltiplo da frequência de oscilação do pêndulo. Assim, podemos ver claramente a frequência fundamental  $\omega_{\text{oscilação}} = 0,283515 \text{ rad/s}$  e pelo menos mais três ou quatro harmônicos, todos de ordem ímpar (nas frequências  $3\omega_{\text{oscilação}}$ ,  $5\omega_{\text{oscilação}}$ ,  $7\omega_{\text{oscilação}}$  e  $9\omega_{\text{oscilação}}$ ). Este caso especial encerra nossa análise com relação a distorção da oscilação com relação àquela do MHS.

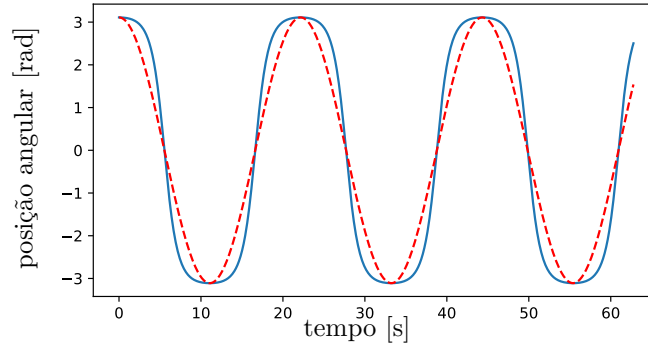


Figura 15: Simulação das oscilações do pêndulo para  $\theta_0 = 0,99\pi$  rad ao longo do tempo. Linha contínua azul dada pela simulação e a linha tracejada em vermelho uma senoide com mesma amplitude e frequência.

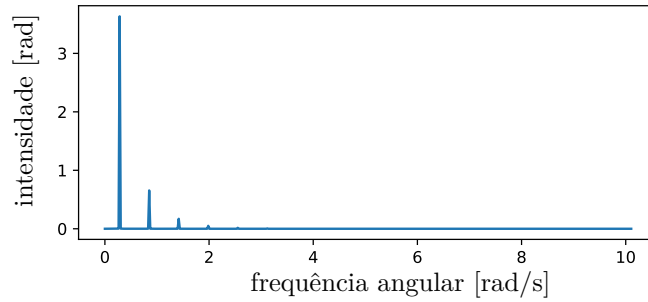


Figura 16: Espectro da oscilação do pêndulo para  $\theta_0 = 0,99\pi$  rad. O eixo vertical é a intensidade do componente de frequência dado no eixo horizontal em radianos.

## 7 Comportamento massa-mola com 2 graus de liberdade

### 7.1 Descrição do movimento

Neste nível, é muito difícil deduzir qual é efetivamente o movimento das massas num sistema com este nível de complexidade. Talvez seja fácil inferir apenas que será alguma espécie de oscilação, e certamente não tão simples como uma oscilação senoidal harmônica. Não é fácil supor qual é o comportamento qualitativamente e muito menos quantitativamente. Este exercício busca, inclusive, mostrar como é complexa a descrição de um sistema desta natureza apenas “dobrando” a quantidade de elementos com relação ao sistema massa-mola convencional para o qual se sabe que o movimento é harmônico simples.

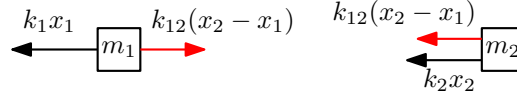


Figura 17: Diagrama de corpo livre do esquema de massas e mola.

## 7.2 Análise do movimento a partir da força resultante

A figura 17 mostra o diagrama de corpo livre das massas  $m_1$  e  $m_2$ . Com eles, determinamos as equações do movimento de ambos os corpos como

$$\begin{cases} m_1 a_1 &= -k_1 x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m_2 a_2 &= -k_{12}(x_2 - x_1) - k_2 x_2 \end{cases} \quad (22)$$

Substituindo as relações

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T_s} \quad (23)$$

$$a \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v[n] - v[n-1]}{T_s} = \frac{x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]}{T_s^2} \quad (24)$$

em que o período de amostragem  $T_s$  é tomado como um tempo curto o suficiente para uma boa aproximação das medidas instantâneas da aceleração e da velocidade, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \left( \frac{m_1}{T_s^2} + k_1 - k_2 \right) x_1[n] & -k_{12}x_2[n] &= \frac{m_1}{T_s^2}(2x_1[n-1] - x_1[n-2]) \\ -k_{12}x_1[n] & + \left( \frac{m_2}{T_s^2} + k_1 + k_2 \right) x_2[n] &= \frac{m_2}{T_s^2}(2x_2[n-1] - x_2[n-2]) \end{cases} \quad (25)$$

para obter os valores atuais das posições dos blocos,  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ , a partir dos valores anteriores de suas posições,  $x_1[n-1]$ ,  $x_1[n-2]$ ,  $x_2[n-1]$  e  $x_2[n-2]$  e dos parâmetros do sistema.

## 7.3 Simulando comportamento das massas no tempo

Para simular o comportamento das massas, escolhemos os parâmetros

$$\begin{aligned} k_1 &= 100 \text{ N/m}; & m_1 &= 1 \text{ kg}; & x_1[0] &= 0,2 \text{ m}; & x_2[0] &= 0,1 \text{ m}; \\ k_{12} &= 200 \text{ N/m}; & m_2 &= 2 \text{ kg}; & x_1[1] &= 0,2 \text{ m}; & x_2[1] &= 0,1 \text{ m}; & \text{e} \\ k_2 &= 300 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

A escolha de duas amostras na mesma posição simula o efeito das massas  $m_1$  e  $m_2$  serem soltas a partir do repouso quando estão deformadas, respectivamente, de 0,2 m e 0,1 m. Como  $\Delta t = T_s$ , escolhemos  $10 \mu\text{s}$  e coletamos 1 500 000 amostras.

Estes parâmetros da simulação correspondem às linhas de 3 a 11 do código 8. Em seguida, criamos as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  por meio das quais resolveremos o sistema da equação 25 pelo teorema de Cramer dentro do laço `for` fazendo

$$x_1[n] = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{D_1}{D}, \quad x_2[n] = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{D_2}{D} \quad (26)$$

para valores sucessivos de  $n$ . O determinante das matrizes é calculado pela função `linalg.det` do NumPy.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  m1 = 1 ; m2 = 2
4  k1 = 100 ; k12 = 200 ; k2 = 300
5  x10 = 0.2 ; x11 = 0.2
6  x20 = 0.1 ; x21 = 0.1
7  Tssim = 0.00001
8  Nsim = 1500000
9  x1 = empty(Nsim) ; x2 = empty(Nsim)
10 x1[0] = x10 ; x1[1] = x11
11 x2[0] = x20 ; x2[1] = x21
12 A = array ([[m1/(Tssim**2) + k1 + k12, -k12], [-k12, m2/(Tssim
    **2) + k12 + k2]])
13 D = linalg.det(A)
14 ka = m1/(Tssim**2)
15 kb = m2/(Tssim**2)
16 A1 = A.copy()
17 A2 = A.copy()
18 for n in range(2, Nsim):
19     B = array ([ka * (2*x1[n-1]-x1[n-2]),
20                kb * (2*x2[n-1]-x2[n-2])])
21     A1[:, 0] = B
22     A2[:, 1] = B
23     D1 = linalg.det(A1)
24     D2 = linalg.det(A2)
25     x1[n] = D1/D
26     x2[n] = D2/D
27 t = arange(0, Nsim)*Tssim
28 plt.subplot(2,1,1)
29 plt.plot(t, x1)
30 plt.subplot(2,1,2)
31 plt.plot(t, x2)
32 plt.show()

```

Código 8: Simulação do movimento do sistema de massas e molas.

Ao fim do cálculo de todos os valores de  $x_1$  e  $x_2$ , são exibidos seus gráficos que reproduzimos na figura 18. Observa-se uma espécie de “oscilação bagunçada”. Neste nível e olhando apenas para o gráfico não é fácil descrever as características específicas da oscilação, mas parece uma espécie de movimento composto, especialmente para os valores escolhidos dos parâmetros.

## 7.4 Característica oscilatória do movimento das massas

Para extrair características adicionais do movimento das massas, analisamos o comportamento do deslocamento  $x_1$  no domínio da frequência por meio do código 9 posposto ao código 8.

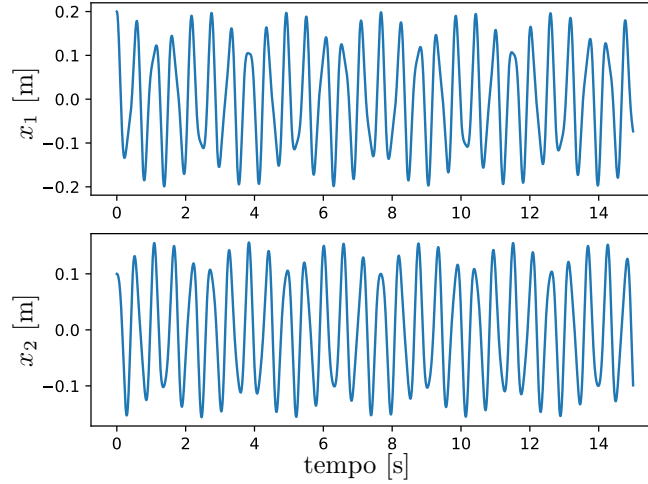


Figura 18: Movimento das massas simulado pelo código 8.

```

1  kDizimacao = 1000
2  N = int(Nsim/kDizimacao)
3  Ts = Tssim*kDizimacao
4  x = x1[0:Nsim:kDizimacao]
5  w0 = 2*pi/N
6  i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
7  j = reshape(arange(N),(1,N))
8  matrizIJ = i@j
9  Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
10 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
11 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
12 if N%2==0:
13     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
14 c = sqrt((Ca@x)**2 + (Sa@x)**2)
15 omega = 2*pi*arange(0,int(N/2)+1)/(Ts*N)
16 plt.plot(omega,c)
17 plt.show()
18 Termo1 = ((k1+k12)*m2+(k12+k2)*m1)/(m1*m2)
19 Termo2 = ((k1+k12)*(k12+k2) - k12**2)/(m1*m2)
20 omega1 = sqrt( 0.5*Termo1 - 0.5*((Termo1**2 - 4*Termo2)
21               **0.5) )
22 omega2 = sqrt( 0.5*Termo1 + 0.5*((Termo1**2 - 4*Termo2)
23               **0.5) )
22 print("omega1 =",omega1)
23 print("omega2 =",omega2)

```

Código 9: Espectro e valores teóricos das frequências de ressonância para a simulação do código 8.

O resultado é um espectro com dois picos acentuados mostrados na figura

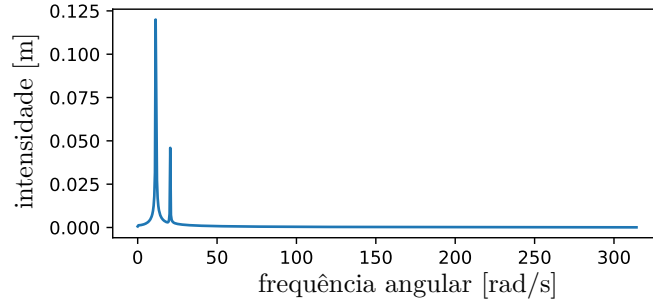


Figura 19: Espectro do movimento da massa  $m_1$ . O eixo horizontal é a frequência angular em radianos por segundo e o vertical a amplitude do deslocamento em metros.

19. Isto indica um movimento composto por dois componentes senoidais puros, ou seja, uma espécie de MHS composto por duas frequências.

De fato, Rao [5], em seu livro, indicado para nível superior, deduz analiticamente que se trata de um movimento de dupla oscilação senoidal em que as frequências de oscilação são as raízes positivas<sup>9</sup> de

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(k_1 + k_{12})m_2 + (k_{12} + k_2)m_1}{m_1 m_2} \right] \mp \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{(k_1 + k_{12})m_2 + (k_{12} + k_2)m_1}{m_1 m_2} \right]^2 - 4 \left[ \frac{(k_1 + k_{12})(k_{12} + k_2) - k_{12}^2}{m_1 m_2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (27)$$

Pelo gráfico da figura 19, os picos se localizam em  $\omega_1 = 11,31 \text{ rad/s}$  e  $\omega_2 = 20,53 \text{ rad/s}$  com uma precisão  $\Delta\omega = 0,42 \text{ rad/s}$  da SFTD. Pelo cálculo da equação 27 que também fizemos no código 9, obtivemos  $\omega_1 = 11,46 \text{ rad/s}$  e  $\omega_2 = 20,46 \text{ rad/s}$ , o que mostra uma excelente adesão da simulação ao valor teórico esperado.

## 8 Filtragem da voz

Preparamos um áudio muito curto com aproximadamente 1 s de voz com um pouco mais do que 50 000 amostras de um áudio. Como a quantidade de amostras de áudio é muito grande, fizemos a filtragem por partes a cada  $N = 5000$  amostras. O processo de filtragem é muito simples e consiste apenas em aplicar a função  $f[k]$  ou  $g[k]$  sobre os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$ . Para a aplicação de  $f$ , por exemplo, fizemos

$$a_k \text{ filtrado} = f[k]a_k \text{ original} \text{ e } b_k \text{ filtrado} = f[k]b_k \text{ original}. \quad (28)$$

<sup>9</sup>Veja que poderiam ser 4 valores de  $\omega$ , as raízes positiva e negativa e um valor para cada escolha do sinal indicado pelo símbolo  $\mp$  (“menos ou mais”). Os valores negativos não tem significado de frequência distinto de sua contrapartida positiva, razão pela qual basta-nos olhar as raízes positivas e obter as duas frequências de oscilação.



Para tal, transformamos os valores de  $f[k]$  em um vetor  $\mathbf{f}$  e realizamos a multiplicação elemento a elemento  $\mathbf{a} = \mathbf{f} * \mathbf{a}$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{f} * \mathbf{b}$ , já que já temos  $a_k$  e  $b_k$  em vetores.

O código 10 consiste, simplesmente, na carga do áudio, seguida da definição dos parâmetros. Escolhemos  $k_0$  de modo que ele coincidisse aproximadamente com o  $k$  correspondente à frequência  $f_{\text{corte}} = 600$  Hz. A decisão do  $f_{\text{corte}}$  e dos outros parâmetros foi feita por tentativa e erro.

Em seguida criamos o perfil do filtro. Na linha 11 calculamos  $f[k]$  e na linha 12  $g[k]$ , mas empregamos o mesmo nome  $\mathbf{f}$  para ambos os casos para não ser necessário alterar todo o código pela mudança da expressão do perfil do filtro. Pode-se mudar a expressão escolhendo, dentre as linhas 11 e 12, qual será comentada.

Utilizando a expressão para  $f[k]$ , obtivemos o perfil de filtro mostrado na figura 20 e com a expressão  $g[k]$  o perfil mostrado na figura 21.

As linhas de 16 a 31 do código 10 apenas definem as matrizes de síntese e análise. Logo em seguida, um laço escolhe trechos sucessivos das amostras do áudio de voz de tamanho  $N = 5000$ , obtém o espectro, realiza a filtragem pela multiplicação elemento-a-elemento e determina o trecho correspondente do áudio filtrado pela síntese a partir dos valores de  $a_k$  e  $b_k$  modificados por  $f[k]$  ou  $g[k]$ .

Elaboramos as figuras 22 e 23 para mostrar o efeito da filtragem sobre o espectro original (em azul tracejado). Onde o valor de  $f[k]$  ou  $g[k]$  são baixos, o gráfico do espectro original é visível pois ele não está presente no espectro resultante da filtragem (em preto). Já onde seus valores são altos (próximos a 1 na escala original), os gráficos do original e do resultante da filtragem são praticamente iguais e, com a sobreposição, fica visível apenas o gráfico resultante (preto).

Assim, na figura 22, em que  $f[k]$  é aplicado, observa-se que os componentes de baixa frequência são filtrados no processo e os de alta frequência são preservados. Este processo é chamado de *filtragem passa alta* (em referência a passagem das altas frequências). Já o processo da figura 23 faz o contrário, sendo designado *filtragem passa baixa*.

Reproduzimos o áudio utilizando a função `sounddevice.play` para os dois tipos de filtro. Em termos qualitativos da percepção do áudio, o filtro passa alta faz o áudio soar como um rádio velho ou um megafone, já o passa baixa torna o som abafado, como se houvesse uma dificuldade na passagem do som.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import soundfile
4  import sounddevice
5  voz, fs = soundfile.read("voz.wav")
6  N = 5000 ; Deltaf = fs/N ; fCorte = 600 ; L = 10
7  voz = voz[0:int(len(voz)/N)*N]
8  vozFiltrada = empty(voz.shape)
9  kCorte = int(fCorte/Deltaf)
10 k = arange(0,int(N/2)+1)
11 f = 1/( 1 + exp( - (k-kCorte)/L ) )
12 #f = 1/( 1 + exp((k-kCorte)/L) )
13 freq = k*fs/N
14 plt.plot(freq, f)
15 plt.show()
16 w0 = 2*pi/N
17 #Definindo matrizes de análise
18 i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
19 j = reshape(arange(N),(1,N))
20 matrizIJ = i@j
21 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
22 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
23 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
24 if N%2==0:
25     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
26 #Definindo matrizes de síntese
27 i = reshape(arange(N),(N,1))
28 j = reshape(arange(int(N/2)+1),(1,int(N/2)+1))
29 matrizIJ = i@j
30 Cs = cos(w0*matrizIJ)
31 Ss = sin(w0*matrizIJ)
32 #Laço de filtragem
33 inicio = 0
34 fim = N
35 i=0
36 while fim<len(voz):
37     x = voz[inicio:fim]
38     a = Ca@x
39     b = Sa@x
40     a = f*a #filtragem sobre coeficientes a
41     b = f*b #filtragem sobre coeficientes b
42     vozFiltrada[inicio:fim] = Cs@a + Ss@b
43     i = i+1
44     inicio = i*N
45     fim = (i+1)*N

```

Código 10: Filtragem da voz por meio do perfil de filtro f.

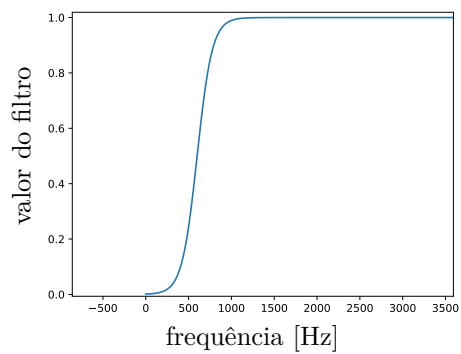


Figura 20: Perfil do filtro  $f[k]$  obtido com  $k_0 = \lfloor 600N/f_s \rfloor$ .

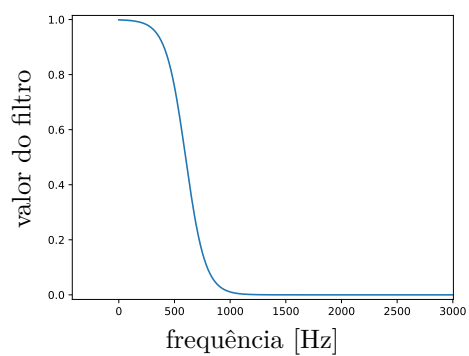


Figura 21: Análogo à figura 20 para  $g[k]$ .

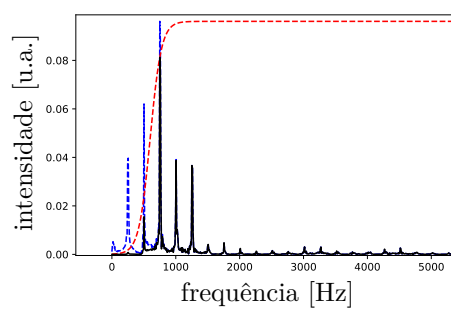


Figura 22: Efeito da filtragem de  $f[k]$  (perfil vermelho tracejado fora de escala) sobre o espectro do áudio original (azul tracejado) para obter o espectro filtrado (preto contínuo).

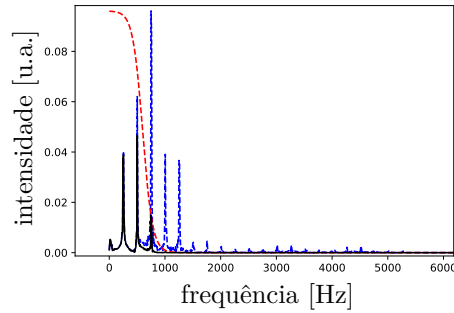


Figura 23: Análogo à figura 20 para  $g[k]$ .

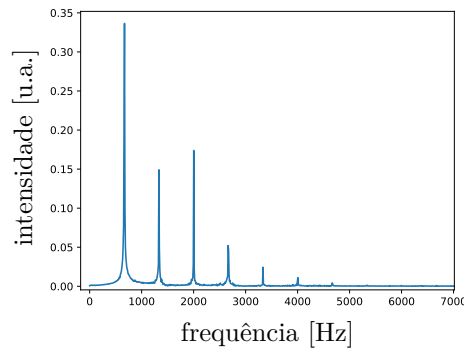


Figura 24: Espectro de um trecho do áudio de uma flauta.

## 9 Flauta sintética

### 9.1 Análise do áudio de uma flauta

Escolhemos um áudio de uma flauta de bambu soando em  $f_0 = 667$  Hz. O espectro de um trecho do áudio é mostrado na figura 24. Nele, extraímos a frequência fundamental e as intensidades aproximadas da componente fundamental e dos seis harmônicos seguintes dados aproximadamente por 0,336, 0,149, 0,174, 0,052, 0,024, 0,011 e 0,004.

### 9.2 Reprodução do som da flauta por componentes senoidais puros

Montamos um sinal com o somatório de sete senoides com as intensidades extraídas do espectro do áudio da flauta no código 11. Escutamos o som gerado empregando `sounddevice.play(flautaSintetica,fs)`. O resultado é um som extremamente artificial mas cujo espectro é muito similar ao da flauta original e que mostramos na figura 25. Observamos que ele é muito parecido com o espectro original da figura 24, ainda que os áudios reproduzidos sejam muito diferentes.

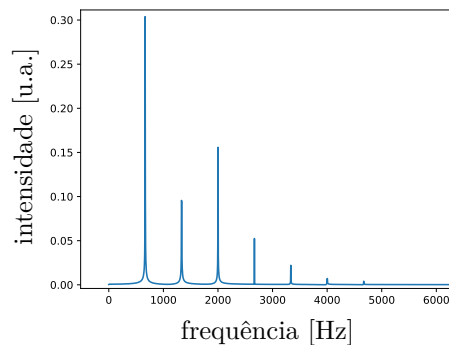


Figura 25: Espectro de um trecho do som similar a flauta elaborado com o código 11.

```

1  from numpy import *
2  import sounddevice
3  f0 = 667
4  fs = 44100
5  N = 100000
6  t = arange(0,N)/fs
7  intensidades = (0.336472468501187, 0.14908012775965768,
8                  0.1738175811205412, 0.05220254193671233,
9                  0.024395951321697543, 0.011099601727655806,
10                 0.004297160535376037)
11 flautaSintetica = zeros(N)
12 i = 1
13 for k in intensidades:
14     flautaSintetica = flautaSintetica + k*cos(2*pi*i*f0*t)
15     i = i+1

```

Código 11: Construção de um áudio com componentes nas intensidades de um áudio de uma flauta empregando componentes senoidais puros.

### 9.3 Espectro de sinal gerado por valores aleatórios

No código 12 construímos 500 sinais a partir de  $N = 5000$  números aleatórios gerados pela função `numpy.random.normal`, um a cada iteração de um laço `for`. Ao longo do laço, separamos 5 espectros para estes sinais, mostrados nos 5 gráficos superiores da figura 26. Observando estes espectros, vemos que não há regularidade para a presença de determinadas componentes. Frequências altas, médias e baixas estão presentes, mas de forma pouco uniforme.

Já o último gráfico da figura 12, mostra a média entre os valores das componentes dos espectros dos 500 sinais gerados. Nele, uma regularidade é observada – a média dos componentes de frequência cobre **todas as frequências com intensidade quase constante**. Isto significa que os números aleatórios da função `numpy.random.normal` são bons para “criar quaisquer frequências”.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  N = 5000
4  w0 = 2*pi/N
5  i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
6  j = reshape(arange(N),(1,N))
7  matrizIJ = i@j
8  Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
9  Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
10 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
11 if N%2==0:
12     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
13 cAcumulado = zeros(int(N/2)+1)
14 for i in range(500):
15     x = random.normal(size=N)
16     c = sqrt( (Ca@x)**2 + (Sa@x)**2 )
17     if i%100==0:
18         plt.subplot(6,1,int(i/100)+1)
19         plt.plot(c)
20     cAcumulado = cAcumulado + c
21 plt.subplot(6,1,6)
22 plt.plot(cAcumulado/500)
23 plt.show()

```

Código 12: Geração do espectro obtido para um sinal composto por números aleatórios.

## 9.4 Geração de áudio a partir de ruído

Empregamos o código 13 para gerar um som parecido com o de flauta a partir de ruído. As linhas de 10 a 17 geram uma máscara com o perfil mostrado na figura 27, similar ao do espectro da flauta que estudamos na seção 9.1. No laço das linhas de 34 a 29, geramos sinais a partir de números aleatórios, lhes aplicamos a máscara do filtro e concatenamos seus valores na variável **flauta** até que tenha por volta de 100 000 amostras, totalizando por volta de 2s de áudio.

O único detalhe que adicionamos neste algoritmo foi o emprego de uma máscara de volume. Isto foi necessário pois nossa intenção era gerar um áudio com por volta de 100 000 amostras a partir de trechos de áudio mais curtos para que pudessemos utilizar as matrizes da SFTD com um valor razoável (escolhemos  $N = 5000$ ). Acontece que o fim de um trecho não precisa necessariamente coincidir com o início do trecho seguinte, já que eles foram criados separadamente, não tendo correlação um com o outro. Estas discontinuidades causam efeitos de “estalos” no áudio. Por esta razão, misturamos um trecho ao outro diminuindo gradualmente o volume do anterior, enquanto o misturávamos com o seguinte cujo volume vai aumentando aos poucos a medida que o anterior abaixa. Escolhemos uma máscara de volume com formato trapezoidal para esta finalidade. Ela cresce a partir do 0 até 1 (que corresponde a 100% do volume), passa a maior parte das amostras neste volume máximo para, então, reduzir de 1 até 0 ao fim.

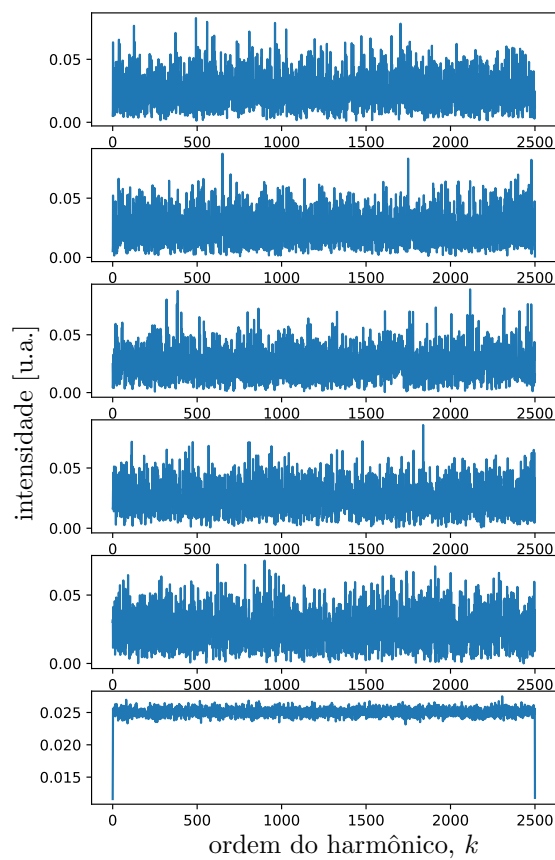


Figura 26: Espectro de cinco trechos de um sinal gerado a partir de números aleatórios com a função `numpy.random.normal` (cinco primeiros superiores) e da média entre 500 espectros (inferior).

O resultado é muito melhor em termos de áudio sintético para representar o som de uma flauta do que a proposta com senoides puras.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import sounddevice
4  f0 = 667 ; fs = 44100 ; N = 5000 ; alpha = 0.5
5  Deltaf = fs/N
6  intensidades = (0.336472468501187, 0.14908012775965768,
7                  0.1738175811205412, 0.05220254193671233,
8                  0.024395951321697543, 0.011099601727655806,
9                  0.004297160535376037)
10 k = arange(0, int(N/2)+1)
11 f = k*Deltaf
12 mascara = zeros(k.shape)
13 i=1
14 for ki in intensidades:
15     k0 = i*f0/Deltaf
16     mascara = mascara + ki*exp(-alpha *abs( k-k0 ))
17     i = i+1
18 w0 = 2*pi/N
19 i = reshape(arange(int(N/2)+1), (int(N/2)+1,1))
20 j = reshape(arange(N), (1,N))
21 matrizIJ = i@j
22 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
23 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
24 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
25 if N%2==0:
26     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
27 i = reshape(arange(N), (N,1))
28 j = reshape(arange(int(N/2)+1), (1,int(N/2)+1))
29 matrizIJ = i@j
30 Cs = cos(w0*matrizIJ)
31 Ss = sin(w0*matrizIJ)
32 volume = concatenate((linspace(0,1,500), ones(4000), linspace
33                        (1,0,500)))
34 flauta = zeros(20*(N-500)+500)
35 for i in range(20):
36     x = random.normal(size=N)
37     a = mascara*(Ca@x)
38     b = mascara*(Sa@x)
39     flauta [ i*(N-500):i*(N-500)+N] = (volume*(Cs@a + Ss@b) +
40                                         flauta [ i*(N-500):i*(N-500)+N])
41 flauta = flauta / (max(abs(flauta)))

```

Código 13: Geração do espectro obtido para um sinal composto por números aleatórios.



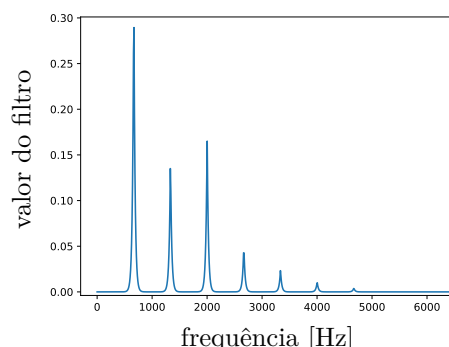


Figura 27: Máscara (filtro) a ser aplicada em um sinal contendo ruído para conformar seu espectro ao da flauta que estudamos na seção 9.1.

## 10 Reconhecimento de altura (*pitch*) automático

Aqui, vamos misturar a ideia de máscara e filtragem com o ideia que empregamos nos problemas das seções 4 e 5. Vamos fazer uma máscara para cada nota e vamos filtrar o trecho do áudio com cada máscara. Se a nota coincidir com a respectiva máscara, devemos ter muita energia no resultado da filtragem. Se a nota for diferente da máscara, ocorrerão poucos casos de coincidência entre as componentes do áudio e a máscara, tendo como consequência a filtragem de boa parte de suas componentes e resultando em pouca energia ao fim da operação. Assim, vamos atribuir a nota observada àquela que tiver associada a máscara que deixa passar maior energia após a filtragem.

O código 14 faz a detecção armazenando as máscaras para as notas na matriz `matrizHarmonicos`, sendo um linha para cada máscara. Escolhemos arbitrariamente a cobertura da frequência fundamental e mais 5 harmônicos na máscara. Também arbitrariamente, a primeira nota é o  $C_2$ , o que facilita a identificação da nota e da oitava, já que o dó natural é a primeira nota de toda oitava. O resto da divisão dos índices das notas na `matrizHarmonicos` coincide com o índices dos nomes das notas no vetor `notas`, o que é empregado para nomear as notas no string `sequencia`.

Montamos a máscara considerando uma janela unitária por harmônico indo da média geométrica entre os harmônicos adjacentes. Veja por exemplo a máscara do  $C_3$  e do  $E_3$  na figura 28. O primeiro harmônico do  $C_3$  está centrado em 130,8 Hz e o  $E_3$  em 164,8 Hz. As posições em que as frequências dos harmônicos de uma máscara estão costumam diferir significativamente com as de outra máscara. Há algumas exceções, como se observa no 5º harmônico do C que é aproximadamente coincidente com o 4º harmônico do E. Com o nível da precisão que empregamos, eles ficam exatamente coincidentes.

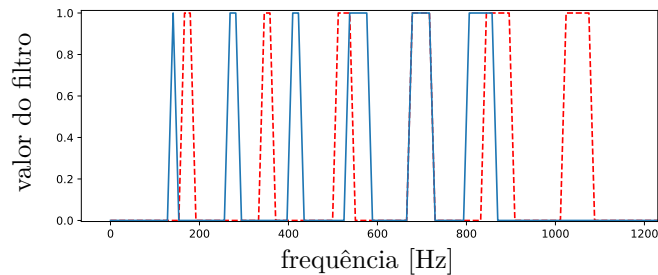


Figura 28: Máscaras para identificação do  $C_3$  (azul) e do  $E_3$  (vermelho tracejado).

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import soundfile
4  musica, fs = soundfile.read("celloG.wav")
5  qtdeNotas = 37 ; silencio = 0.0005 ; N = 7500
6  sequencia = "" ; Deltaf = fs/N
7  cBaixo = 2**(-1/24) ; cAlto = 2**(1/24)
8  k = arange(0, int(N/2)+1)
9  fC5 = 440*(2**(3/12)) ; fC2 = fC5/(2*2*2)
10 notas = array([ "C", "C#", "D", "D#", "E", "F",
11                "F#", "G", "G#", "A", "A#", "B" ])
12 matrizHarmonicos = zeros((qtdeNotas, len(k)))
13 for i in range(qtdeNotas):
14     for h in range(6):
15         fi = (h+1)*(2**(i/12))*fC2
16         inicio = int(rint( fi*cBaixo/Deltaf ))
17         fim = int(rint( fi*cAlto/Deltaf ))+1
18         matrizHarmonicos[i, inicio:fim] = 1
19 w0 = 2*pi/N
20 i = reshape(arange(int(N/2)+1), (int(N/2)+1, 1))
21 j = reshape(arange(N), (1, N))
22 matrizIJ = i@j
23 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
24 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
25 Ca[0, :] = 0.5*Ca[0, :]
26 if N%2==0:
27     Ca[int(N/2), :] = 0.5*Ca[int(N/2), :]
28 energia = empty(qtdeNotas)
29 inicio = 0 ; fim = N ; i = 0
30 notaAnterior = "s"
31 while fim <= len(musica):
32     x = musica[inicio:fim]
33     c = (Ca@x)**2 + (Sa@x)**2
34     for j in range(qtdeNotas):
35         energia[j] = sum(matrizHarmonicos[j, :]*c)
36     if max(energia) > silencio:
37         notaAtual = notas[argmax(energia)%12]
38         notaAtual = notaAtual + str(argmax(energia)//12 + 2)
39     else:
40         notaAtual = "s"
41     if notaAtual != notaAnterior and notaAtual != "s":
42         sequencia = sequencia + notaAtual
43     i = i+1 ; inicio = N*i ; fim = N*(i+1)
44     notaAnterior = notaAtual
45 print(sequencia)

```

Tabela 2: Resultados da execução do código 14.

Arpejo esperado	Notas detectadas
Tuba Mirum	
A <sub>#3</sub> F <sub>3</sub> D <sub>4</sub> A <sub>#3</sub> F <sub>3</sub> D <sub>4</sub>	A <sub>#3</sub> F <sub>3</sub> D <sub>4</sub> A <sub>#3</sub> F <sub>3</sub> <b>F<sub>4</sub></b> D <sub>3</sub> <b>D<sub>4</sub></b>
Prelúdio da Suíte N <sup>o</sup> 1	
G <sub>2</sub> D <sub>3</sub> A <sub>3</sub> B <sub>3</sub>	G <sub>2</sub> D <sub>3</sub> A <sub>3</sub> B <sub>3</sub>
G <sub>2</sub> E <sub>3</sub> B <sub>3</sub> C <sub>4</sub>	<b>E<sub>2</sub></b> G <sub>2</sub> E <sub>3</sub> <b>G<sub>3</sub></b> B <sub>3</sub> C <sub>4</sub>
G <sub>2</sub> F <sub>#3</sub> B <sub>3</sub> C <sub>4</sub>	F <sub>#2</sub> G <sub>2</sub> <b>C<sub>3</sub></b> F <sub>#3</sub> <b>G<sub>3</sub></b> B <sub>3</sub> C <sub>4</sub> <b>F<sub>#4</sub></b>
G <sub>2</sub> G <sub>3</sub> <b>A<sub>3</sub></b> B <sub>3</sub>	G <sub>2</sub> G <sub>3</sub> B <sub>3</sub>

O código 14 observará qual é a máscara de maior energia a medida que percorre os trechos do sinal de entrada. Ao fim da iteração, ele incluirá a nota correspondente na variável **sequencia** caso a nota observada seja distinta da que ele observou no último trecho, considerando que não houve interrupção na execução da nota enquanto não houver um trecho de silêncio ou de outra nota separando dois trechos em que a mesma nota foi identificada. Caso o nível de energia seja muito baixo, ele considerará um trecho de silêncio e não realizará nenhum registro.

Testamos o algoritmo com uma gravação dos trechos iniciais de Tuba Mirum do Réquiem de Mozart e do Prelúdio da Suíte N<sup>o</sup> 1 de Bach, por se tratarem de trechos monofônicos. Como resultado, tivemos a seguinte saída para a variável **sequencia** para o primeiro trecho (Tuba Mirum)

A<sub>#3</sub> F<sub>3</sub> D<sub>4</sub> A<sub>#3</sub> F<sub>3</sub> F<sub>4</sub> F<sub>3</sub> F<sub>4</sub> F<sub>3</sub> D<sub>3</sub> D<sub>4</sub> D<sub>3</sub>.

Na tabela 2 comparamos o arpejo esperado com o arpejo detectado. Neste trecho, mais curto, listamos as notas na ordem em que aparecem e observamos alta fidelidade, com exceção de algumas falsas detecções das notas corretas na oitava acima.

Fizemos o mesmo processo para o segundo trecho (Prelúdio da Suíte N<sup>o</sup>1) e obtivemos o seguinte registro para a variável **sequencia**

G<sub>2</sub> D<sub>3</sub> B<sub>3</sub> A<sub>3</sub> B<sub>3</sub> D<sub>3</sub> B<sub>3</sub> D<sub>3</sub> G<sub>2</sub> D<sub>3</sub> G<sub>2</sub> B<sub>3</sub> B<sub>3</sub> D<sub>3</sub> B<sub>3</sub> D<sub>3</sub>  
 G<sub>2</sub> E<sub>2</sub> E<sub>3</sub> C<sub>4</sub> B<sub>3</sub> E<sub>3</sub> G<sub>3</sub> G<sub>2</sub> E<sub>3</sub> B<sub>3</sub> E<sub>2</sub> E<sub>3</sub> E<sub>3</sub>  
 G<sub>2</sub> F<sub>#3</sub> B<sub>3</sub> C<sub>4</sub> F<sub>#3</sub> C<sub>3</sub> F<sub>#3</sub> G<sub>2</sub> F<sub>#3</sub> B<sub>3</sub> F<sub>#3</sub> F<sub>#4</sub> F<sub>#2</sub>  
 G<sub>2</sub> G<sub>3</sub> G<sub>2</sub> G<sub>3</sub> G<sub>2</sub> B<sub>3</sub> G<sub>2</sub>.

Também na tabela 2, fizemos a comparação entre os arpejos, considerando as notas que o compõem, e não a ordem. Neste caso, a velocidade da execução parece ter sido determinante como dificultante na detecção de cada nota. Apesar disto, o algoritmo detectou corretamente todas as notas, errando algumas oitavas, e deixou de detectar apenas o A<sub>3</sub> no último arpejo.

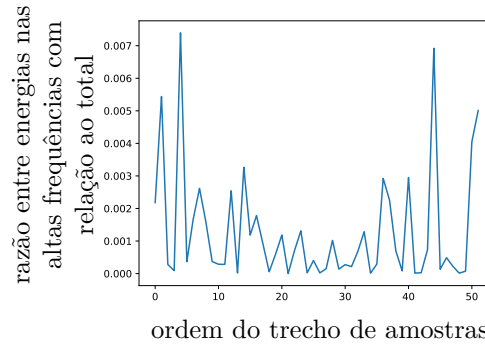


Figura 29: Relação entre a potência acima de 5 kHz com relação à potência total em  $m_1[n]$ .

## 11 Transmissão simultânea empregando AM

### 11.1 Escolha do sinal

Escolhemos um sinais de voz com pouco mais de 1 s e separamos 50 000 amostras deste áudio com frequência de amostragem padrão de 44 100 Hz para tomarmos como  $m_1[n]$ . Empregamos o Audacity para aplicar um filtro passa baixas para remover frequências acima de 5 kHz. Calculamos espectros sucessivos deste áudio e observamos a quantidade de energia acima da frequência de 5 kHz com relação à energia total e registramos estes valores no gráfico 29. O maior valor que essa relação assume é de 0,00739 o que significa que no pior caso, há menos de 0,8% de energia acima de 5 kHz, mostrando a eficácia do processo de filtragem<sup>10</sup>. Portanto, é seguro afirmar que temos  $f_{\text{máx1}} = 5$  kHz.

### 11.2 Superamostragem

No código 15, preparamos os áudios e as matrizes. Vamos precisar realizar análises com quantidades distintas de conjuntos de amostras, conforme explicaremos a seguir, para realizar o processo designado superamostragem. Por esta razão, após a criação das variáveis que carregam as amostras de áudio completas, criamos um conjunto de matrizes para realizar a análise do espectro com  $N_1 = 1000$  amostras e um conjunto de matrizes para realizar análise e outro para realizar a síntese com  $N = MN_1 = 4 \cdot 1000 = 4000$  amostras.

<sup>10</sup>Sem a filtragem, este valor passa de 75% em um trecho em que é pronunciado um fonema fricativo rico em componentes de alta frequência.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import soundfile, sounddevice, sys
4  audio1, fs1 = soundfile.read("audio1.wav")
5  audio2, fs2 = soundfile.read("audio2.wav")
6  audio1 = audio1[0:50000] ; audio2 = audio2[0:50000]
7  if fs1 != fs2:
8      print("Taxas de amostragem diferentes.") ; sys.exit()
9  #Matrizes de análise sobre N1 amostras
10 N1 = 1000 ; w01 = 2*pi/N1
11 i = reshape(arange(int(N1/2)+1), (int(N1/2)+1,1))
12 j = reshape(arange(N1), (1,N1))
13 Sa1 = i@j ; Ca1 = (2/N1)*cos(w01*Sa1) ; Sa1 = (2/N1)*sin(w01*
    Sa1)
14 Ca1[0,:] = 0.5*Ca1[0,:]
15 if N1%2==0:
16     Ca1[int(N1/2),:] = 0.5*Ca1[int(N1/2),:]
17 f1 = arange(0, int(N1/2)+1)*fs1/N1
18 #Matrizes de síntese sobre N amostras
19 M = 4 ; N = N1*M ; fs = fs1*M ; Deltaf = fs/N ; w0 = 2*pi/N
20 f = arange(0, int(N/2)+1)*Deltaf
21 i = reshape(arange(N), (N,1))
22 j = reshape(arange(int(N/2)+1), (1, int(N/2)+1))
23 Ss = i@j ; Cs = cos(w0*Ss) ; Ss = sin(w0*Ss)
24 #Matrizes de análise sobre N amostras
25 i = reshape(arange(int(N/2)+1), (int(N/2)+1,1))
26 j = reshape(arange(N), (1,N))
27 Sa = i@j ; Ca = (2/N)*cos(w0*Sa) ; Sa = (2/N)*sin(w0*Sa)
28 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
29 if N%2==0:
30     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]

```

Código 15: Preparação das variáveis e das matrizes para realização da síntese e da análise.

Com a frequência de amostragem de 44100 Hz, podemos observar apenas 22050 Hz, o que “comporta” apenas 4 vezes a frequência máxima. Por esta razão, no código 16, realizamos o processo chamado *superamostragem* com um fator de 4, levando o estudo para a frequência de amostragem de 176400 Hz e a máxima frequência observável para 88200 Hz. Veremos mais adiante que este limite é suficiente para o estudo do AM.

```

1 m1 = zeros(len(audio1)*M)
2 intervalo = 25
3 volume1 = concatenate((ones(N-M*intervalo), linspace(1,0,M*
4     intervalo)))
5 volume = concatenate((linspace(0,1,M*intervalo),
6     ones(N-2*M*intervalo), linspace(1,0,M*
7     intervalo)))
8 volumeUltimo = concatenate((linspace(0,1,M*intervalo), ones(N-M
9     *intervalo)))
10 inicio = 0 ; fim = N1 ; i = 0 ; terminar = False ; ultimo =
11     False
12 while not terminar:
13     if ultimo == True:
14         a = Ca1@concatenate((audio1[inicio:], zeros(1000-len(
15             audio1[inicio:])))
16         b = Sa1@concatenate((audio1[inicio:], zeros(1000-len(
17             audio1[inicio:])))
18     else:
19         a = Ca1@audio1[inicio:fim] ; b = Sa1@audio1[inicio:fim
20             ]
21     a = concatenate((a, zeros(int(N/2)+1 - len(a))))
22     b = concatenate((b, zeros(int(N/2)+1 - len(b))))
23     if i == 0:
24         m1[inicio*M:fim*M] = m1[inicio*M:fim*M] + volume1*(
25             Cs@a + Ss@b)
26     elif ultimo == True:
27         m1[inicio*M:] = m1[inicio*M:] + (volumeUltimo*(Cs@a +
28             Ss@b))[0:len(m1[inicio*M:])]
29     else:
30         m1[inicio*M:fim*M] = m1[inicio*M:fim*M] + volume*(Cs@a
31             + Ss@b)
32     i = i+1
33     inicio = i*(N1-intervalo)
34     fim = i*(N1-intervalo)+N1
35     if ultimo == True:
36         terminar = True
37     if fim >= len(audio1):
38         ultimo = True

```

Código 16: Superamostragem de  $m_1[n]$ .

O processo escolhido para superamostragem é simples e consiste em acrescentar frequências que “não existem” ou seja, que podem ser interpretadas como se existissem mas fossem nulas, ao fim do espectro e em seguida retomar o sinal no tempo. Neste caso, acrescentamos três vezes a quantidade de componentes além dos valores que já tínhamos. A quantidade de componentes de frequências ficou 4 vezes maior, correspondendo a

$$f_{s\text{ novo}} = 4f_{s\text{ anterior}}. \quad (29)$$

A figura 30 mostra o espectro original de um trecho do áudio e como ele fica após acrescentarmos componentes nulos até a frequência de  $4f_{s\text{ anterior}}$ .

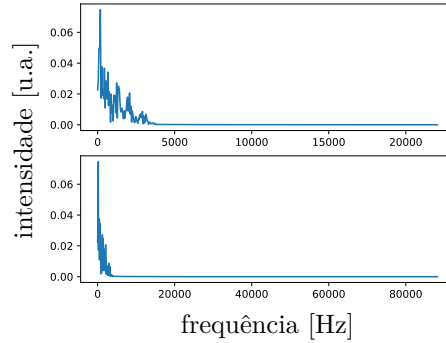


Figura 30: Comparação entre os espectros original (superior) e superamostrado (inferior).

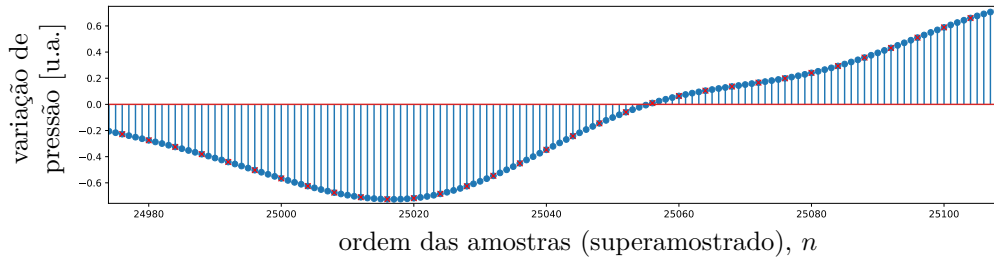


Figura 31: Amostras do sinal original nas marcações em  $\times$  vermelho sobre o gráfico *stem* do sinal superamostrado.

Se retornarmos para o domínio do tempo por uma operação de síntese sobre o novo espectro, vamos obter 4 vezes a quantidade de amostras que tínhamos antes da superamostragem. Ora, se a frequência de amostragem quadruplicou, isso significa que o período de amostragem caiu para um quarto do que era. Ou seja, 4 das novas amostras ocupam o tempo decorrido para apenas uma amostra antes do processo de superamostragem. O resultado da superamostragem é mostrado na figura 31 que apresenta em detalhe a criação das novas amostras. O gráfico do tipo *stem* (ramos) foi feito com o sinal superamostrado. As amostras originais foram sobrepostas ao gráfico empregando a marcação do tipo  $\times$  em vermelho em suas posições. Observe que uma de cada quatro amostras do sinal original coincide com o sinal superamostrado conforme esperado, o que equivale a considerar que acrescentamos três amostras entre duas amostras do sinal original.

Esta é a razão desta expressão *superamostragem*. Simplesmente ao aumentar a quantidade de componentes de frequência, é como se causássemos um aumento na taxa de amostragem e a criação de novas amostras entre as antigas<sup>11</sup>.

Como o áudio original contém muitas amostras, precisamos realizar a superamostragem em trechos de tamanho muito menor que o áudio completo. Como a SFTD é baseada em forçar a periodicidade do trecho limitado, a tendência do

<sup>11</sup>É uma forma de interpolação realizada no domínio da frequência.

sinal seria, após a última amostra, voltar para uma amostra igual a primeira amostra do mesmo trecho. No nosso caso, porém, o fim de um trecho está concatenado com o início do próximo trecho, cuja primeira amostra tenderá a não ter nenhuma relação com a primeira amostra do trecho anterior. A “criação” de novas amostras proporcionada pela superamostragem faz com que surjam algumas amostras que se direcionam para o valor da primeira amostra do trecho. Se a partir daí emendássemos a primeira amostra do próximo trecho, ocorreria uma sucessão de valores com descontinuidades (a tendência de continuidade do trecho anterior era para o primeiro valor do próprio trecho e não para a primeira amostra do próximo trecho) que soam no áudio como estalos.

Por esta razão, empregamos mais uma vez a técnica de fazer sobrepor o fim de um trecho com o início do outro e enquanto, o volume do trecho anterior cai, o volume do próximo trecho aumenta, como fizemos no problema da geração de áudio a partir de número aleatórios na seção 9.4.

### 11.3 Realização da modulação em amplitude

Para gerar o sinal modulado em AM empregamos o código 17. Nele, escolhemos para a frequência da portadora  $f_{c1} \approx 25\,000$  Hz. Não utilizamos este valor exato pois preferimos utilizar uma frequência fosse múltiplo inteiro da precisão  $\Delta f$  da medida de frequência da SFTD. Isto fará com que o espectro fique “bem comportado”<sup>12</sup>.

```

1 t = arange(0, len(m1))/fs
2 fc1 = int(25000/Deltaf)*Deltaf
3 p1 = cos(2*pi*fc1*t)
4 s1 = m1*p1

```

Código 17: Geração do sinal  $s_1[n]$  da modulação AM.

Variamos a frequência  $f_{c1}$  pelos valores de 20 kHz até 50 kHz em passos de 10 kHz e apresentamos os espectros de um trecho dos sinais na figura 32, em que o primeiro gráfico é o espectro do trecho em  $m_1[n]$  e os gráficos seguintes são gráficos de  $s_1[n]$  do trecho correspondente para os valores de  $f_{c1}$  que listamos.

Algumas características importantes podem ser extraídas dos gráficos:

- os espectros parecem figuras simétricas em torno de um eixo na vertical;  
e
- o eixo de simetria parece centrado em  $f_{c1}$ .

Para melhor observar outras características, ampliamos os gráficos da figura 32 na figura 33 nas regiões em torno dos seus eixos de simetria. No primeiro gráfico, do espectro de  $m_1[n]$ , acrescentamos em vermelho em valores negativos de frequência o próprio espectro espelhado. Com este artifício, vemos:

- os valores do espectro de  $m_1[n]$  aparecem no espectro de  $s_1[n]$  a partir da frequência  $f_{c1}$ ;

<sup>12</sup>Utilize uma frequência para a portadora que não seja múltiplo inteiro de  $\Delta f$  e observe o efeito sobre o espectro.



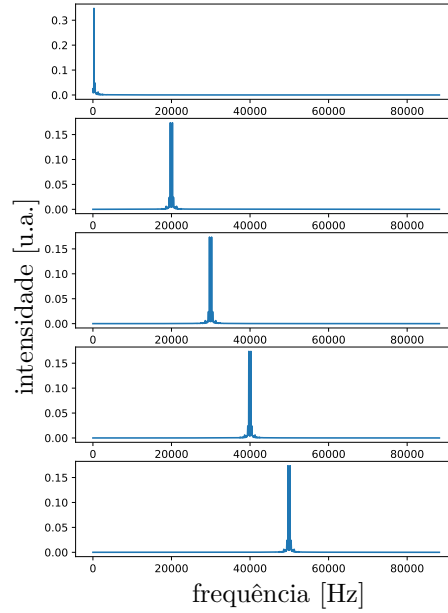


Figura 32: Espectro de um trecho de  $m_1[n]$  (superior) e do trecho correspondente de  $s_1[n]$  para  $f_{c1}$  variando de aproximadamente 20 kHz até 50 kHz em passos de 10 kHz (segundo ao último gráfico de cima para baixo).

- os valores do espectro de  $m_1[n]$  aparecem no espectro de  $s_1[n]$  espelhados antes da frequência  $f_{c1}$ ; e
- as intensidades dos componentes de  $m_1[n]$  parecem estar no espectro de  $s_1[n]$  com metade da intensidade.

Como o espectro de  $m_1[n]$  vai até  $f_{\text{máx1}}$  e ele aparece no espectro de  $s_1[n]$  a partir de  $f_{c1}$ , isto significa que o espectro total de  $s_1[n]$  terá componente de frequência máximo em  $f_{c1} + f_{\text{máx1}}$ .

#### 11.4 Justificativa para o espectro do sinal AM

Ora, obtivemos o sinal  $s_1[n]$  por meio do produto entre um sinal original  $m_1[n]$  e um sinal senoidal de frequência  $f_{c1}$  que chamamos de portadora. Vamos agora esquecer brevemente o índice 1 (ou 2) pois numeramos os sinais apenas para caracterizar o efeito da transmissão simultânea e vamos considerar o caso geral. Se descrevermos  $m[n]$  por meio de sua série de Fourier de tempo discreto, ele será

$$m[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_n \cos(w_k n + \phi_k) \quad (30)$$

e a portadora

$$p[n] = \cos(2\pi f_c T_s n) = \cos(w_c n), \quad (31)$$

o sinal  $s[n]$  será

$$s[n] = p[n]m[n]$$

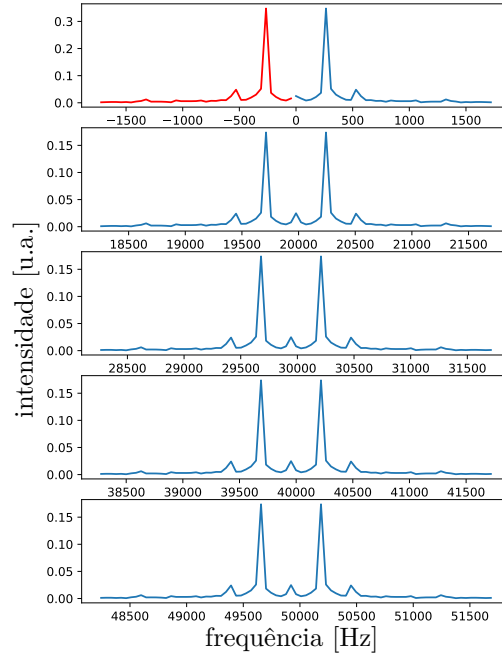


Figura 33: Ampliação dos gráficos das figuras 32 nas proximidades do eixo de simetria. No gráfico superior do espectro de  $m_1[n]$ , o gráfico vermelho posto nas “frequências negativas” é o próprio espectro positivo espelhado.

$$\begin{aligned}
&= \cos(w_c n) \left[ a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \cos(w_k n + \phi_k) \right] \\
&= a_0 \cos(w_c n) + \cos(w_c n) \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \cos(w_k n + \phi_k) \\
&= a_0 \cos(w_c n) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \cos(w_c n) \cos(w_k n + \phi_k) \\
&= a_0 \cos(w_c n) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \{ \cos[(w_c + w_k)n + \phi_k] + \cos[(w_c - w_k)n - \phi_k] \} \\
&= a_0 \cos(w_c n) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \cos[(w_c + w_k)n + \phi_k]}_{\text{componentes simétricos à direita de } f_c} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \cos[(w_c - w_k)n - \phi_k]}_{\text{componentes simétricos à esquerda de } f_c} .
\end{aligned}$$

Vemos que nas frequências  $f_{c1} + f_k$ , ou seja, distantes  $f_k$  da frequência  $f_{c1}$  e à sua direita, aparecem componentes de intensidade  $c_k/2$ . Ora, em  $m_1[n]$ , a

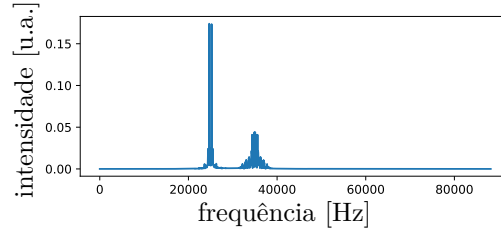


Figura 34: Espectro do sinal  $s[n]$  dado pela superposição dos espectros de  $s_1[n]$  e  $s_2[n]$ .

componente  $c_k$  aparece  $f_k$  à direita da origem. Isto significa que veremos no espectro de  $s_1[n]$  uma cópia do espectro de  $m_1[n]$  deslocado para  $f_{c1}$  e com metade da amplitude.

Ocorre o mesmo à esquerda de  $f_{c1}$  nas frequências  $f_{c1} - f_k$ , razão pela qual surge a imagem simétrica dos dois lados de  $f_{c1}$  no espectro de  $s_1[n]$ . A única assimetria é que a frequência central que fica com o componente  $a_0$  na frequência  $f_{c1}$ , sem o multiplicador de um meio.

Em geral, isto mostra que a multiplicação por uma portadora de frequência  $f_c$ , é capaz de deslocar o espectro de  $m[n]$  que se encontrava na origem para o entorno de  $f_c$ . Enquanto  $m[n]$  ocupa frequências de 0 até  $f_{\text{máx}}$ ,  $s[n]$  ocupa frequências de  $f_c - f_{\text{máx}}$  até  $f_c + f_{\text{máx}}$ .

### 11.5 Modulando um segundo sinal

Já no código 15, havíamos reservado um segundo áudio na variável `audio2`. Aplicamos códigos similares aos códigos 16 e 17 para gerar as variáveis  $m_2[n]$ ,  $p_2[n]$  e  $s_2[n]$ . Também filtramos o segundo áudio em  $f_{\text{máx}1} = 5$  kHz. Por esta razão, o sinal  $s_2[n]$  ocupará no espectro uma região entre  $f_{c2} - f_{\text{máx}2}$  e  $f_{c2} + f_{\text{máx}2}$ . Para que esta região não se sobreponha à região ocupada no espectro por  $s_1[n]$ , escolhemos  $f_{c2} \approx 35$  kHz.

Criamos, por fim, a variável  $s[n] = s_1[n] + s_2[n]$ . Se  $s_1[n]$  e  $s_2[n]$  são sinais oriundos de ondas eletromagnéticas transmitidas por estações de rádio,  $s[n]$  pode ser o efeito da superposição das ondas no espaço. O espectro de um trecho de  $s[n]$  é mostrado na figura 34. Nela, vemos o espectro de  $s_1[n]$  que já estudamos nas figuras 32 e 33, desta vez centrado em 25 kHz. O que vemos centrado em  $f_{c2} \approx 35$  kHz é o espectro de  $s_2[n]$  no mesmo trecho. Veja que ele também é simétrico com relação à frequência de sua portadora e que eles ocupam “espaços” distintos no espectro devido a nossas escolhas para  $f_{c1}$  e  $f_{c2}$  e pelos valores de  $f_{\text{máx}1}$  e  $f_{\text{máx}2}$ .

É importante destacar que no domínio do tempo – em  $s[n]$  – estes sinais estão unidos de tal forma que é impossível observar a distinção entre eles. Já no domínio da frequência é fácil ver onde cada sinal começa e termina, principalmente pois tomamos o cuidado de não deixar os espectros se sobreporem. O sinal  $s_1$  está entre  $f_{c1} - f_{\text{máx}1}$  e  $f_{c1} + f_{\text{máx}1}$ , ou seja, entre 20 kHz e 30 kHz enquanto  $f_{c2} - f_{\text{máx}2}$  e  $f_{c2} + f_{\text{máx}2}$ , ou seja, entre 30 kHz e 40 kHz.

## 12 Separação de sinais AM

Já vimos nas seções 8, 9 e 10 como podemos trabalhar filtros no domínio da frequência. Ora, se podemos ver claramente no espectro de  $s[n]$  na figura 34 que, na frequência,  $s_1[n]$  e  $s_2[n]$  se encontram separados, podemos utilizar ambas as máscaras propostas na filtragem 8 para separar  $s_1[n]$  de  $s_2[n]$  no domínio da frequência empregando uma máscara

$$h[k] = \frac{1}{1 + e^{-\frac{k - k_{\text{início}}}{L}}} \frac{1}{1 + e^{\frac{k - k_{\text{fim}}}{L}}} \quad (32)$$

que vale 1 apenas quando  $k_{\text{início}} < k < k_{\text{fim}}$  quando  $k < k_{\text{início}}$  e  $k > k_{\text{fim}}$ , o valor de  $h[k]$  tende rapidamente à 0. Isto gera um filtro que chamamos de passa-banda. O número inteiro  $k$  está associado à frequência  $f_k$  e devemos fazer os valores de  $k_{\text{início}}$  e  $k_{\text{fim}}$  coincidirem aproximadamente com as regiões dos espectros correspondentes às frequências  $f_{c1} - f_{\text{máx1}}$  e  $f_{c1} + f_{\text{máx1}}$ , respectivamente, para separar  $s_1[n]$  e aos valores análogos para separar  $s_2[n]$ .

O código 18 cria estas máscaras. Elaboramos os gráficos das máscaras e os apresentamos na figura 35. A máscara azul é aproximadamente unitária na região entre 20 kHz e 30 kHz já que  $s_1[n]$  está centrado em 25 kHz e se estende  $f_{\text{máx1}} = 5$  kHz para a esquerda e para a direita no espectro. Fora desta região ela cai rapidamente para aproximadamente nula. Ela é, portanto, capaz de isolar o espectro de  $s_1[n]$ . A máscara vermelha da figura 35, por sua vez, tal como a azul isola  $s_1[n]$ , é capaz de isolar  $s_2[n]$ .

```

1 k = arange(int(N/2) + 1)
2 L = 5
3 kInicio = int((fc1 - 5000)/Deltaf)
4 kFim = int((fc1 + 5000)/Deltaf)
5 mascara1 = (1/(1 + exp((k-kFim)/L))) * (1/(1 + exp(-(k-
    kInicio)/L)))
6 kInicio = int((fc2 - 5000)/Deltaf)
7 kFim = int((fc2 + 5000)/Deltaf)
8 mascara2 = (1/(1 + exp((k-kFim)/L))) * (1/(1 + exp(-(k-
    kInicio)/L)))

```

Código 18: Criação das máscaras que separam os espectros  $s_1[n]$  e  $s_2[n]$  na frequência.

A aplicação destas máscaras sobre os sinais correspondentes gera os dois espectros dos gráficos nas figuras 34. O superior é o espectro de  $s_1[n]$  obtido empregando a máscara azul da figura 35 sobre o espectro de  $s[n]$ . O inferior é o espectro de  $s_2[n]$  obtida da mesma forma mas com a máscara vermelha. Ou seja, o sinal superior é o espectro do sinal recebido pela estação 1,  $r_1[n]$ , e o inferior o sinal recebido pela estação 2,  $r_2[n]$ .

## 13 Demodulação AM

Empregamos o código 19 para, a partir do espectro de  $s[n]$ , obter os componentes de frequência  $\mathbf{a}_{r1}$  e  $\mathbf{b}_{r1}$  de  $r_1[n]$  através da filtragem. Com os componentes de

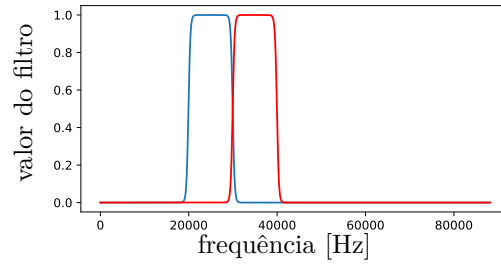


Figura 35: Máscaras empregadas para separar  $s_1[n]$  (azul) e  $s_2[n]$  (vermelho) em  $s[n]$ .

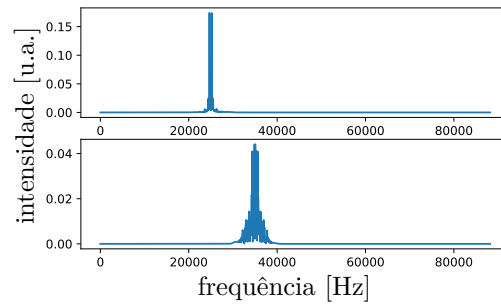


Figura 36: Espectros obtidos pela aplicação das máscaras da figura 35 sobre o espectro de  $s[n]$  mostrado na figura 34.

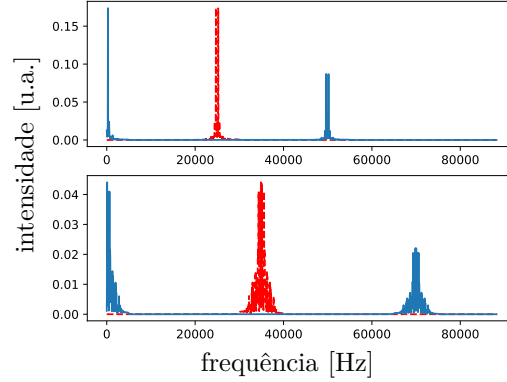


Figura 37: Espectros de  $r_1[n]$  (em vermelho tracejado) e  $m'_1[n]$  (superior) e  $r_2[n]$  (em vermelho tracejado) e  $m'_2[n]$  (inferior).

frequência, recuperamos  $r_1[n]$  no domínio do tempo e realizamos o produto com  $p_1[n]$  novamente obtendo  $m'_1[n]$ .

```

1 ar1 = (Ca@s[inicio:fim])*mascara1
2 br1 = (Sa@s[inicio:fim])*mascara1
3 cr1 = sqrt(ar1**2 + br1**2)
4 r1 = Cs@ar1 + Ss@br1
5 m1linha = r1 * cos(2*pi*fc1*t[inicio:fim])
6 c1linha = sqrt((Ca@m1linha)**2 + (Sa@m1linha)**2 )

```

Código 19: Geração do sinal  $m'_1[n]$  da demodulação AM.

Código análogo ao código 19 também é aplicado para gerar  $r_2[n]$  e  $m'_2[n]$ . Com os sinais  $m'_1[n]$  e  $r_1[n]$  (com ambos os índices), montamos o gráfico de seus espectros na figura 37. Notamos que enquanto os gráficos de  $r[n]$  se encontram centrados em  $f_c$ , o gráfico de  $m'_1[n]$  apresenta dois agrupamentos. O primeiro parece uma versão de  $r[n]$  com amplitude reduzida pela metade e centrada em  $2f_c$ . A outra está centrada na origem do eixo de frequências.

Para melhor visualização do agrupamento na origem do eixo de frequência, elaboramos o gráfico da figura 38 que amplia a região próxima à origem. Nela, fica claro que, nesta região,  $m'_1[n]$  é muito similar a  $m[n]$ , com exceção de uma redução pela metade na amplitude. Isto significa que podemos recuperar o espectro de  $m[n]$  filtrando o agrupamento nas proximidades de  $2f_c$  e multiplicando o restante por 2. Após estas operações, realizadas no domínio da frequência, podemos voltar para o domínio do tempo pelas operações de síntese e recuperar  $m[n]$ .

O código 20 recupera os sinais  $m_1[n]$  e  $m_2[n]$  a partir do sinal  $s[n]$  que simula os sinais modulados e superpostos. Após a execução deste trecho, não é possível distinguir **m1** e **m2** dos sinais recuperados **m1Rec** e **m2Rec** quando ouvimos suas reproduções utilizando a função `sounddevice.play`. Um segundo indicativo da qualidade da recuperação do sinal é a energia contida na diferença entre os

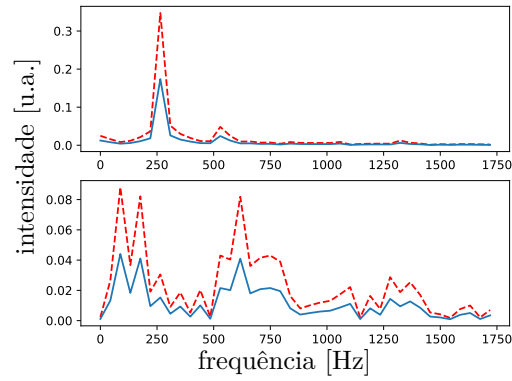


Figura 38: Detalhe dos espectros de  $m_1[n]$  (em vermelho tracejado)  $m_1'[n]$  e (superior) e  $m_2[n]$  (em vermelho tracejado)  $m_2'[n]$  e (inferior) próximo à origem.

sinais com relação ao sinal original, que podemos calcular executando

$$\text{sum}((m1-m1\text{Rec})^2)/\text{sum}(m1^2).$$

Este parâmetro resulta em menos de 0,003% para ambos os áudios, ou seja, quase não há diferenças entre os áudios recuperados e os originais.

```

1  m1Rec = zeros(m1.shape) ; m2Rec = zeros(m2.shape)
2  kCorte = int(6000/Deltaf)
3  mascara = 1/(1 + exp( (k-kCorte)/L ))
4  i = 0 ; terminar = False ; ultimo = False
5  inicio = 0 ; fim = N
6  while not terminar:
7      if ultimo == True:
8          x = concatenate((s[inicio:], zeros(N-len(s[inicio:])))
9          p1 = cos(2*pi*fc1*concatenate((t[inicio:], t[-1]*ones(
10             N-len(t[inicio:])))
11             p2 = cos(2*pi*fc2*concatenate((t[inicio:], t[-1]*ones(
12                 N-len(t[inicio:])))
13         else:
14             x = s[inicio:fim]
15             p1 = cos(2*pi*fc1*t[inicio:fim])
16             p2 = cos(2*pi*fc2*t[inicio:fim])
17         ar1 = (Ca@x)*mascara1 ; br1 = (Sa@x)*mascara1
18         ar2 = (Ca@x)*mascara2 ; br2 = (Sa@x)*mascara2
19         r1 = Cs@ar1 + Ss@br1 ; r2 = Cs@ar2 + Ss@br2
20         m1linha = r1 * p1 ; m2linha = r2 * p2
21         a1Rec = (Ca@m1linha)*mascara ; b1Rec = (Sa@m1linha)*
22             mascara
23         a2Rec = (Ca@m2linha)*mascara ; b2Rec = (Sa@m2linha)*
24             mascara
25         trecho1 = Cs@a1Rec + Ss@b1Rec ; trecho2 = Cs@a2Rec +
26             Ss@b2Rec
27         if i == 0:
28             m1Rec[inicio:fim] = volume1*trecho1
29             m2Rec[inicio:fim] = volume1*trecho2
30         elif ultimo == True:
31             m1Rec[inicio:] = m1Rec[inicio:] + (volumeUltimo*
32                 trecho1)[0:len(m1Rec[inicio:])]
33             m2Rec[inicio:] = m2Rec[inicio:] + (volumeUltimo*
34                 trecho2)[0:len(m2Rec[inicio:])]
35         else:
36             m1Rec[inicio:fim] = m1Rec[inicio:fim] + volume*trecho1
37             m2Rec[inicio:fim] = m2Rec[inicio:fim] + volume*trecho2
38         i = i+1
39         inicio = i*(N-intervalo*M)
40         fim = i*(N-intervalo*M) + N
41         if ultimo == True:
42             terminar = True
43         if fim >= len(m1):
44             ultimo = True
45     m1Rec = m1Rec * 2
46     m2Rec = m2Rec * 2

```

Código 20: Recuperação dos sinais  $m_1[n]$  e  $m_2[n]$  a partir dos sinais modulados e superpostos em  $s[n]$ .



### 13.1 Justificativa para a recuperação do sinal na demodulação AM

Vimos na seção 11.4 que o sinal  $m[n]$  quando modulado em AM com a portadora senoidal  $p[n]$ , resulta em  $s[n]$  que pode ser escrito como

$$s[n] = a_0 \cos(w_c n) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \cos[(w_c + w_k)n + \phi_k] + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \cos[(w_c - w_k)n - \phi_k].$$

Com esta expressão,  $m'[n]$  será dado por

$$\begin{aligned} m'[n] &= p[n]s[n] \\ &= \cos(w_c n) \left\{ a_0 \cos(w_c n) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \cos[(w_c + w_k)n + \phi_k] + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \cos[(w_c - w_k)n - \phi_k] \right\} \\ &= a_0 \cos^2(w_c n) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \cos(w_c n) \cos[(w_c + w_k)n + \phi_k] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{2} \cos(w_c n) \cos[(w_c - w_k)n - \phi_k] \\ &= a_0 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2w_c n) \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{4} \{ \cos[(2w_c + w_k)n + \phi_k] + \cos(w_k n + \phi_k) \} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{4} \{ \cos[(2w_c - w_k)n - \phi_k] + \cos(-w_k n - \phi_k) \} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{4} \cos(w_k n + \phi_k) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{4} \cos(-w_k n - \phi_k) \\ &\quad + \frac{a_0}{2} \cos(2w_c n) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{4} \cos[(2w_c + w_k)n + \phi_k] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{c_k}{4} \cos[(2w_c - w_k)n - \phi_k] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \cos(w_k n + \phi_k)}_{m[n]} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_0}{2} \cos(2w_c n) + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \cos[(2w_c + w_k)n + \phi_k]}_{\text{componentes de } m[n] \text{ centrados em } 2f_c} \\
& + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} c_k \cos[(2w_c - w_k)n - \phi_k]}_{\text{componentes espelhados de } m[n] \text{ centrados em } 2f_c} .
\end{aligned}$$

Vemos, então, que os componentes de  $m[n]$  voltam para a origem do eixo das frequências multiplicado por  $1/2$  e que ainda há duas cópias de  $m[n]$  centradas em  $2f_c$ , uma com frequências  $w_k$  positivo, formando um espectro direito, e uma com  $w_k$  negativo, formando o espectro invertido, ambos multiplicados por  $1/4$ . O componente constante  $a_0$  aparece multiplicado por  $1/2$  exatamente no eixo de simetria em  $2f_c$ . Estas características que obtivemos analiticamente explicam o que observamos nos gráficos da figura 37.

## 14 Amortecedor massa-mola com atrito viscoso

### 14.1 Resposta em frequência por simulações no domínio do tempo

O movimento do bloco depende apenas da atuação das forças horizontais. São três as forças horizontais, a força externa  $F(t)$ , a força elástica  $-kx$ , em o sinal significa que a força atua no sentido oposto de sua posição, e a força de atrito viscoso de intensidade  $-\beta v$ , em que o sinal significa que ela atua no sentido oposto ao da velocidade. A soma destas forças totaliza a força resultante, já que a resultante na vertical é nula. Assim,

$$F - kx - \beta v = ma, \quad (33)$$

que, empregando as relações das equações 23 e 24, resulta na relação

$$x[n] = \frac{(\beta T_s + 2m)x[n-1] - mx[n-2] + T_s^2 F[n]}{kT_s^2 + \beta T_s + m} \quad (34)$$

para a posição da massa ao longo do tempo.

Vamos tomar a expressão teórica fornecida como referência para determinar que frequências estudaremos. Vemos que

$$H(\omega) = \frac{X_m}{F_m} = \frac{1}{\sqrt{m^2\omega^4 + (\beta^2 - 2mk)\omega^2 + k^2}} \approx \frac{1}{m\omega^2} \quad (35)$$

quando a frequência  $\omega$  cresce, já que  $m^2\omega^4$  cresce muito mais rapidamente do que  $(\beta^2 - 2mk)\omega^2$  e o termo  $k^2$  é fixo. Ou seja, sabemos que, pela teoria, a resposta em frequência vai tender a 0 a medida que  $\omega$  cresce. Vamos estudar, apenas até  $H(\omega) = 0,01$ , ou seja, até

$$\frac{1}{\sqrt{m^2\omega^4 + (\beta^2 - 2mk)\omega^2 + k^2}} = \frac{1}{100} \quad (36)$$

que implica determinar o valor de  $\omega$  que resolve a equação biquadrada

$$m^2\omega^4 + (\beta^2 - 2mk)\omega^2 + k^2 - 10000 = 0. \quad (37)$$

No código 22, calculamos este valor para  $\omega$  considerando que ele é a maior raiz e empregando a função `numpy.roots` para calculá-lo. Neste script, determinamos os parâmetros do problema, escolhemos  $N = 2000$  para a quantidade de amostras da análise no domínio da frequência que faremos na seção 14.2. Isto implica nos valores para  $k$  de 0 até  $\lfloor N/2 \rfloor$  para os harmônicos da SFTD nas frequências angulares  $\omega_k$ . Estes valores sugerem que empreguemos os valores de  $\omega_k$  como as amostras para o eixo  $\omega$  da análise em frequência.

Por esta razão, no trecho de código que se segue, realizamos dois laços aninhados. No laço mais externo, escolhemos um valor para  $\omega_k$  e no interno percorremos vários valores de  $n$  para determinar  $x[n]$  pela equação 34 para  $F(t) = F_m \sin(\omega_k t)$ . A princípio tentamos resolver com 15 períodos de  $F(t)$ , mas caso  $x[n]$  ainda não tenha se acomodado para a oscilação estável final, acrescentamos mais um período à simulação. Utilizamos como critério para a acomodação, se no período anterior, a amplitude dos valores de  $x[n]$  não difere da amplitude de seus valores no último período em mais do que 0,01%.

Por fim, tomamos como amplitude da oscilação de  $x$  a metade da diferença entre os valores de máximo e mínimo nos últimos dois períodos e meio da simulação, o que é uma estimativa da amplitude. Ao fim do percurso por todos os valores de  $\omega_k$ , ao registrar as amplitudes a cada valor de  $\omega_k$  e empregando um valor conhecido de  $F_m$ , podemos calcular a razão  $X_m/F_m$  em termos de  $\omega$ , que exibimos no gráfico da figura 39.

```

1  from numpy import *
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  m = 1 ; kEl = 1 ; beta = 1 ; Fm = 1
4  omegaMax = max(real(roots(
5      [m**2, 0, (beta**2-2*m*kEl), 0, kEl**2-10000]))))
6  fs = omegaMax*2/(2*pi)
7  N = 2000 ; ppT = 1000
8  k = arange(0, int(N/2)+1) ; omega = k*2*pi*fs/N
9  HsimT = empty(omega.shape) ; HsimT[0] = Fm/kEl
10 for i in range(1, len(omega)):
11     omegak = omega[i] ; T = 2*pi/omegak
12     Tssim = T/ppT
13     c1 = (beta*Tssim + 2*m)/(kEl*(Tssim**2) + beta*Tssim + m)
14     c2 = (-m)/(kEl*(Tssim**2) + beta*Tssim + m)
15     cf = (Tssim**2)/(kEl*(Tssim**2) + beta*Tssim + m)
16     x = empty(ppT*15) ; F = empty(ppT*15)
17     F[0] = 0 ; F[1] = Fm * sin(omegak*Tssim)
18     x[0] = 0 ; x[1] = 0
19     acomodado = False ; n = 2
20     while n != len(x):
21         F[n] = Fm * sin(omegak*n*Tssim)
22         x[n] = c1*x[n-1] + c2*x[n-2] + cf*F[n]
23         if (n%ppT == 0) and (n > 3*ppT):
24             acomodado = ((max(x[n-2*ppT:n-ppT]) - min(x[n-2*
25                 ppT:n-ppT])) >
26                 0.9999*(max(x[n-ppT:n]) - min(x[n-ppT:n])) and (
27                     max(x[n-2*ppT:n-ppT]) - min(x[n-2*ppT:n-ppT]))
28                     <
29                     1.0001*(max(x[n-ppT:n]) - min(x[n-ppT:n]))))
30             if (not acomodado) and (n == len(x) - 1):
31                 x = append(x, empty(ppT))
32                 F = append(F, empty(ppT))
33                 n = n+1
34             HsimT[i] = (max(x[len(x)-int(2.5*ppT):]) - min(x[len(x)-
35                 int(2.5*ppT):]))*0.5/Fm
36 plt.plot(omega, HsimT)
37 plt.show()

```

Código 21: Simulação da oscilação do sistema massa-mola com atrito viscoso para muitos valores da frequência do estímulo.

## 14.2 Análise da resposta ao impulso na frequência

Repetimos a simulação da equação 34 mas agora com a função

$$F[n] = \begin{cases} 1, & n = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (38)$$

em que há um único impulso em  $F[2]$ . Para qualquer outro valor de  $n$ ,  $F[n] = 0$ . Usamos um período de amostragem na simulação 20 vezes menor do que o período de amostragem final que desejamos apenas para ter uma melhor precisão

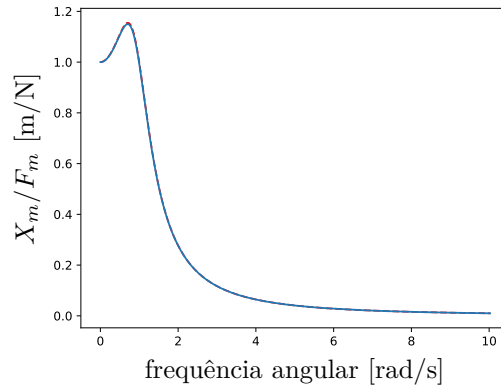


Figura 39: Resposta em frequência para o sistema massa-mola com atrito viscoso obtido pela simulação no tempo do código 22.

na simulação no tempo. Retomamos para o período desejado por meio da diminuição antes de obter o espectro. O espectro de  $x[n]$  obtido pelo estímulo impulsivo de  $F$  é mostrado na figura 40. Vemos que a forma do espectro de  $x[n]$  é muito similar à resposta em frequência do sistema<sup>13</sup> exceto por uma proporção, já que os valores da resposta em frequência estão na ordem da unidade e os valores da resposta ao impulso estão na ordem de  $10^{-5}$ .

<sup>13</sup>Aqui, este fato pode ficar como mera coincidência ou pode-se mostrar que um impulso contém todas as frequências, razão pela qual a resposta de um estímulo impulsivo em um sistema linear tem a configuração da resposta em frequência.

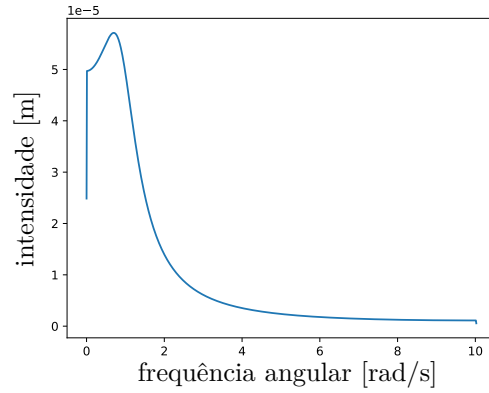


Figura 40: Espectro de  $x[n]$  para um estímulo impulsivo  $F[n]$ .

```

1  x = zeros(20*N)
2  F = zeros(20*N)
3  F[2] = 1
4  Tssim = 1/(20*fs)
5  c1 = (beta*Tssim + 2*m)/(kEl*(Tssim**2) + beta*Tssim + m)
6  c2 = (-m)/(kEl*(Tssim**2) + beta*Tssim + m)
7  cf = (Tssim**2)/(kEl*(Tssim**2) + beta*Tssim + m)
8  for n in range(2,20*N):
9      x[n] = c1*x[n-1] + c2*x[n-2] + cf*F[n]
10 x = x[0:len(x):20]
11 w0 = 2*pi/N
12 i = reshape(arange(int(N/2)+1),(int(N/2)+1,1))
13 j = reshape(arange(N),(1,N))
14 matrizIJ = i@j
15 Ca = (2/N)*cos(w0*matrizIJ)
16 Sa = (2/N)*sin(w0*matrizIJ)
17 Ca[0,:] = 0.5*Ca[0,:]
18 if N%2==0:
19     Ca[int(N/2),:] = 0.5*Ca[int(N/2),:]
20 H = sqrt((Ca@x)**2 + (Sa@x)**2)
21 #print(max(Hteo)/max(H))
22 #H = max(Hteo)*H/max(H)
23 #plt.plot(omega, Hteo, "r--")
24 plt.plot(omega, H)
25 plt.show()

```

Código 22: Recuperação dos sinais  $m_1[n]$  e  $m_2[n]$  a partir dos sinais modulados e superpostos em  $s[n]$ .

### 14.3 Comparação com resposta em frequência teórica

A figura 39 já mostra em tracejado vermelho a resposta em frequência teórica. Ela é tão próxima de nossa simulação que quase não é possível vê-la.

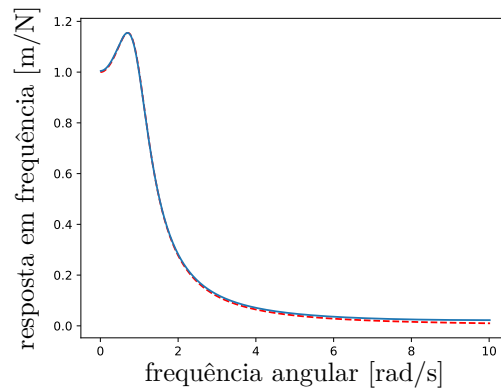


Figura 41: Comparação da resposta em frequência com a escala corrigida obtida pela resposta ao impulso e a expressão teórica.

Já a comparação da resposta em frequência obtida pelo espectro da resposta ao impulso com o valor teórico é mostrada na figura 41. Nela, corrigimos a escala pelo valor do máximo teórico. Por esta razão, os gráficos são coincidentes neste ponto, embora estejam efetivamente muito próximos por todo o gráfico. Além do ganho para ajustar a escala, apenas desprezamos o primeiro e o último valor que apresentavam descontinuidades.

## Referências

- [1] WARRICK, Douglas et al. **Hummingbird flight**. Current Biology. [S.l.], p. 472-477. jun. 2012.
- [2] TIPTON, Neil (ed.) **Spa-Francorchamps**. RacingCircuits.info, [s.l]. Disponível em: <https://www.racingcircuits.info/europe/belgium/spa-francorchamps.html>. Acesso em: 10 nov. 2024.
- [3] International Telecommunication Union. **ITU-T Rec. Q. 23**: Technical features of push-button telephone sets. [S.l.]: ITU, 1993.
- [4] BELÉNDEZ, Augusto et al. Approximate expressions for the period of a simple pendulum using a Taylor series expansion. **European Journal Of Physics**. [S.l.], p. 1303-1310. jul. 2011.
- [5] RAO, Singiresu S. **Mechanical Vibrations**. 6. ed. [S.l.]: Pearson, 2018.