

MARCO AURÉLIO GRANATO

**Controle de sistemas lineares com saltos Markovianos  
e cadeia oculta usando desigualdades matriciais  
lineares**

São Paulo  
2025

MARCO AURÉLIO GRANATO

**Controle de sistemas lineares com saltos Markovianos  
e cadeia oculta usando desigualdades matriciais  
lineares**

**Versão Original**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:  
Engenharia de Sistemas

Orientador:  
Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

São Paulo  
2025

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

#### Catálogo-na-publicação

Granato, Marco Aurélio

Controle de sistemas lineares com saltos Markovianos e cadeia oculta usando desigualdades matriciais lineares / M. A. Granato – São Paulo, 2025.  
78 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1.Sistemas lineares 2.Cadeias de Markov 3.Controle estocástico  
4.Otimização convexa I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.  
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

*À minha esposa, Ana Paula,  
e às minhas filhas Isabel, Luiza e Teresa.*

# AGRADECIMENTOS

A Deus, razão de todas as coisas.

À minha esposa, cujo amor e carinho incondicionais me dão forças para continuar a jornada, e por sempre acreditar em mim.

Ao Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa, pela oportunidade, orientação e confiança depositada, as quais tornaram possível a realização deste trabalho.

À Marinha do Brasil, por permitir que eu me dedicasse exclusivamente ao curso.

À FUSP (Fundação de Apoio da Universidade de São Paulo), pelo apoio financeiro na participação do SBAI2025.

# RESUMO

GRANATO, M. A. **Controle de sistemas lineares com saltos Markovianos e cadeia oculta usando desigualdades matriciais lineares**. 2025. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2025.

Esta dissertação aborda o problema de projeto de controladores para sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto, em um cenário de informação parcial da cadeia de Markov. Consideramos um modelo oculto de Markov, para o qual assumimos que o modo de operação do sistema não está disponível para o controlador, mas somente uma estimativa fornecida por um detector. Neste contexto, investigamos inicialmente o problema de controle por realimentação de estados, e propomos condições suficientes para a síntese de controladores que asseguram limitantes para os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ . Num segundo momento, tratamos do problema de projeto de controladores por realimentação estática de saída, e propomos condições suficientes no contexto de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Considerando que as condições de síntese são propostas em termos de desigualdades matriciais bilineares, apresentamos uma abordagem iterativa baseada em um algoritmo de descida coordenada para a obtenção de soluções subótimas. As etapas do algoritmo são caracterizadas pela solução de desigualdades matriciais lineares que garantem uma sequência não-crescente para os limitantes superiores dos índices de desempenho tratados. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficácia dos resultados obtidos, comparando-os com métodos existentes na literatura.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares. Cadeias de Markov. Controle estocástico. Otimização convexa.

# ABSTRACT

GRANATO, M. A. **Control of hidden Markov jump linear systems using linear matrix inequalities**. 2025. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2025.

This dissertation addresses the problem of designing controllers for discrete-time Markov jump linear systems, in a scenario of partial information of the Markov chain. We consider a hidden Markov model, for which we assume that the mode of operation of the system is not available to the controller, but only an estimate provided by a detector. In this context, we initially investigate the state-feedback control problem and propose sufficient conditions for the synthesis of controllers that ensure upper bounds for the performance indices  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ , and  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ . In a second moment, we address the problem of designing static output feedback controllers, and propose sufficient conditions in the context of  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  and mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control. Considering that the synthesis conditions are proposed in terms of bilinear matrix inequalities, we present an iterative approach based on a coordinated descent algorithm to obtain suboptimal solutions. The steps of the algorithm are characterized by the solution of linear matrix inequalities that guarantee a non-increasing sequence for the upper bounds of the performance indices addressed. Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the results obtained, comparing them with existing methods in the literature.

**Keywords:** Linear systems. Markov chains. Stochastic control. Convex optimization.

# LISTA DE FIGURAS

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 | – Valores médios de $\ z_e(k)\ ^2$ e $u(k)$ ao longo do tempo (curvas em preto) obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 5000 realizações, considerando o caso de controle $\ell_2\text{--}\ell_\infty$ para o Exemplo 3.3. A região em cinza representa todas as trajetórias resultantes da simulação. . . .                                                                             | 45 |
| Figura 2 | – Comportamento dos custos garantidos $\gamma_\infty$ e $\gamma_e$ normalizados em função de $\delta_\infty, \delta_e \in [0.1, 0.9]$ adotando-se $\gamma_2 = 15$ para o Exemplo 3.4. . . . .                                                                                                                                                                                                         | 48 |
| Figura 3 | – Valores médios dos estados $x_1(k)$ , $x_2(k)$ , $x_3(k)$ , $x_4(k)$ , de $\ z_\infty(k)\ ^2$ e das entradas de controle $u_1(k)$ e $u_2(k)$ ao longo do tempo (curvas em preto), obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 1000 realizações, considerando o controlador projetado no Exemplo 3.4. A região em cinza indica o conjunto das trajetórias resultantes da simulação. . . . . | 49 |
| Figura 4 | – Valores médios de $\ z_2(k)\ ^2$ e $u(k)$ ao longo do tempo (curvas em preto) obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 500 realizações, considerando o caso de controle $\mathcal{H}_2$ para o Exemplo 4.1. A região em cinza representa todas as trajetórias resultantes da simulação. . . . .                                                                                         | 62 |
| Figura 5 | – Valores médios de $\ z_\infty(k)\ ^2$ e $u(k)$ ao longo do tempo (curvas em preto) obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 500 realizações, considerando o caso de controle $\mathcal{H}_\infty$ para o Exemplo 4.1. A região em cinza representa todas as trajetórias resultantes da simulação. . . . .                                                                               | 63 |
| Figura 6 | – Curvas <i>trade-off</i> de $\gamma_2^*$ em função de $\gamma_\infty$ do Exemplo 4.3 para $\rho = 0.5$ (cor preta), $\rho = 0.7$ (cor azul) e $\rho = 0.9$ (cor cinza), usando o Teorema 6 em de Oliveira e Costa (2018a) (linhas contínuas) e o Algoritmo 4.1 (linhas tracejadas). . . . .                                                                                                          | 68 |



# LISTA DE TABELAS

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 | – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ), norma real ( $\ \mathcal{G}_K\ _2$ ) e número de iterações ( $n_k$ ) para o caso de controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de estados do Exemplo 3.1 usando Costa, Fragoso e Todorov (2015), Lema 1 em de Oliveira e Costa (2018a), Proposição 3.1 e Algoritmo 3.1.                                                                                                                                                                                            | 43 |
| Tabela 2 | – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_\infty^*$ ), norma real ( $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ ) e número de iterações ( $n_k$ ) para o caso de controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados do Exemplo 3.2 usando Lema 2 em de Oliveira e Costa (2018a), Todorov, Fragoso e Costa (2018) e Algoritmo 3.1.                                                                                                                                                                                             | 44 |
| Tabela 3 | – Valores de custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*, \gamma_\infty^*, \gamma_e^*$ ), norma real ( $\ \mathcal{G}_K\ _2, \ \mathcal{G}_K\ _\infty$ ) e número de iterações ( $n_k$ ) para os casos de controle $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_\infty$ e $\ell_2\text{-}\ell_\infty$ por realimentação de estados do Exemplo 3.4 usando o Algoritmo 3.1.                                                                                                                                                                              | 47 |
| Tabela 4 | – Comparação entre custo garantido inicial ( $\gamma_2^{(0)}, \gamma_\infty^{(0)}$ ), custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*, \gamma_\infty^*$ ), norma real ( $\ \mathcal{G}_K\ _2, \ \mathcal{G}_K\ _\infty$ ), número de iterações ( $n_k$ ) e tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) para os casos de controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação estática de saída do Exemplo 4.1 considerando a inicialização do Algoritmo 4.1 para $\beta \in \{1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$ . | 61 |
| Tabela 5 | – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ), norma real ( $\ \mathcal{G}_K\ _2$ ), número de iterações ( $n_k$ ) e tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) para o caso de controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação estática de saída do Exemplo 4.2 usando de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) e Algoritmo 4.1.                                                                                                                                                                                       | 65 |
| Tabela 6 | – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_\infty^*$ ), norma real ( $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ ), número de iterações ( $n_k$ ) e tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) para o caso de controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação estática de saída do Exemplo 4.2 usando de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) e Algoritmo 4.1.                                                                                                                                                                        | 65 |
| Tabela 7 | – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ), normas reais ( $\ \mathcal{G}_K\ _2, \ \mathcal{G}_K\ _\infty$ ), número de iterações ( $n_k$ ) e tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) para o caso de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação estática de saída e $\gamma_\infty = 72$ do Exemplo 4.2 usando de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) e Algoritmo 4.1.                                                                                                           | 66 |
| Tabela 8 | – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ) e norma real ( $\ \mathcal{G}_K\ _2$ ) para o caso de controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de estados do Exemplo 4.3 usando Costa, Fragoso e Todorov (2015), Lema 1 em de Oliveira e Costa (2018a), Proposição 3.1 e Algoritmo 4.1.                                                                                                                                                                                                                           | 67 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 9 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_\infty^*$ ) e norma real ( $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ ) para o caso de controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados do Exemplo 4.3 usando Todorov, Fragoso e Costa (2018), Lema 2 em de Oliveira e Costa (2018a) e Algoritmo 4.1. . . . .                                    | 67 |
| Tabela 10 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ) e normas reais ( $\ \mathcal{G}_K\ _2$ , $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ ) para o caso de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados e $\gamma_\infty = 80$ do Exemplo 4.3 usando Teorema 6 em de Oliveira e Costa (2018a) e Algoritmo 4.1. . . . . | 68 |
| Tabela 11 – Comparação dos intervalos de valores factíveis de $\lambda$ para o Exemplo 4.4 usando de Oliveira, Costa e Daafouz (2020), Tao e Wu (2024) e Algoritmo 4.1. . . . .                                                                                                                                                                         | 69 |

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|       |                                          |
|-------|------------------------------------------|
| AFTCS | Active Fault-Tolerant Control System     |
| BMI   | Bilinear Matrix Inequality               |
| HMM   | Hidden Markov Model                      |
| LMI   | Linear Matrix Inequality                 |
| MJLS  | Markov Jump Linear System                |
| NCS   | Networked Control System                 |
| SFDC  | Simultaneous Fault Detection and Control |
| SS    | Stochastically Stable                    |

# SUMÁRIO

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                  | <b>13</b> |
| 1.1      | Revisão da literatura . . . . .                                    | 13        |
| 1.1.1    | Controle por realimentação de estados . . . . .                    | 14        |
| 1.1.2    | Controle por realimentação estática de saída . . . . .             | 15        |
| 1.2      | Contribuições do trabalho . . . . .                                | 16        |
| 1.3      | Organização do documento . . . . .                                 | 17        |
| 1.4      | Trabalhos publicados . . . . .                                     | 18        |
| <b>2</b> | <b>Conceitos Preliminares</b>                                      | <b>19</b> |
| 2.1      | Notação . . . . .                                                  | 19        |
| 2.2      | Sistemas lineares com saltos Markovianos e cadeia oculta . . . . . | 20        |
| 2.2.1    | Estabilidade . . . . .                                             | 21        |
| 2.2.2    | Norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .                                    | 22        |
| 2.2.3    | Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .                               | 24        |
| 2.2.4    | Índice $\ell_2$ - $\ell_\infty$ . . . . .                          | 25        |
| 2.3      | Resultados auxiliares . . . . .                                    | 26        |
| <b>3</b> | <b>Controle por Realimentação de Estados</b>                       | <b>27</b> |
| 3.1      | Formulação do problema . . . . .                                   | 27        |
| 3.2      | Controle $\mathcal{H}_2$ . . . . .                                 | 30        |
| 3.3      | Controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .                            | 33        |
| 3.4      | Controle $\ell_2$ - $\ell_\infty$ . . . . .                        | 36        |
| 3.5      | Controle multiobjetivo . . . . .                                   | 39        |
| 3.6      | Algoritmo iterativo . . . . .                                      | 39        |
| 3.7      | Exemplos numéricos . . . . .                                       | 41        |

|          |                                                             |           |
|----------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Controle por Realimentação Estática de Saída</b>         | <b>50</b> |
| 4.1      | Formulação do problema . . . . .                            | 50        |
| 4.2      | Controle $\mathcal{H}_2$ . . . . .                          | 52        |
| 4.3      | Controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .                     | 55        |
| 4.4      | Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . . . . . | 58        |
| 4.5      | Algoritmo iterativo . . . . .                               | 58        |
| 4.6      | Exemplos numéricos . . . . .                                | 60        |
| <b>5</b> | <b>Conclusão</b>                                            | <b>70</b> |
|          | <b>Referências</b>                                          | <b>72</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Revisão da literatura

O estudo de sistemas cuja dinâmica está sujeita a mudanças abruptas tem sido amplamente explorado na literatura nas últimas décadas. Estas mudanças abruptas, sejam elas causadas por distúrbios ambientais, falhas de componentes ou variações no ponto de operação, desafiam o projeto de sistemas de controle capazes de garantir um desempenho adequado. Neste contexto, a abordagem por sistemas lineares com saltos Markovianos (do inglês, *Markov jump linear systems*, MJLS), na qual as variações abruptas na dinâmica do sistema são modeladas de acordo com uma cadeia de Markov, se tornou uma ferramenta extensivamente utilizada em diversas aplicações, tais como Controle Através da Rede (do inglês, *Networked Control Systems*, NCS) em Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2010, 2012), Sistemas de Controle Tolerante a Falhas Ativo (do inglês, *Active Fault-Tolerant Control Systems*, AFTCS) em Zhang e Jiang (2002) e Aberkane *et al.* (2008), Detecção e Controle Simultâneos de Falhas (do inglês, *Simultaneous Fault Detection and Control*, SFDC) em Carvalho, de Oliveira e Costa (2020), entre outros, e consolidada na literatura como evidenciado em Costa, Fragoso e Marques (2005), Boukas (2006) e Dragan, Morozan e Stoica (2013), e suas referências.

Um aspecto fundamental em MJLS é importante a ser considerado no projeto de controladores é a disponibilidade do estado da cadeia de Markov (modo de operação), denotado por  $\theta(k)$ . Uma suposição bem-establishada sobre a observação de  $\theta(k)$  é o *caso dependente do modo* (também conhecido como *observação completa* ou *caso síncrono*), no qual  $\theta(k)$  é considerado perfeitamente observável e, portanto, disponível para o controlador. Entretanto, é razoável considerar que  $\theta(k)$  não pode ser perfeitamente medido. Uma primeira abordagem, porém mais conservadora, é o *caso independente do modo*, no qual é considerado que não há informações sobre o processo de saltos, de modo que busca-se projetar um único controlador para todos os modos de operação do sistema. Uma alternativa introduzida em do Val, Geromel e Gonçalves (2002) é o *caso de agrupamento em clusters* (ou *caso parcialmente dependente do modo*), no qual é considerado que uma parte ou a totalidade dos estados de Markov não é acessível, de modo que a parte não observável é agrupada em conjuntos disjuntos chamados *clusters*. Uma abordagem recentemente proposta por Costa, Fragoso e Todorov (2015) e que surgiu como um tema de interesse na literatura é a denominada *abordagem baseada em detector*. Esta formulação, a qual

abrange os casos mencionados anteriormente (dependente do modo, independente do modo e agrupamento em *clusters*), considera que  $\theta(k)$  não é diretamente observável, e a única informação disponível para o controlador é fornecida por um detector, denotada por  $\hat{\theta}(k)$ , tal que o processo conjunto  $(\theta(k), \hat{\theta}(k))$  é abordado como um modelo oculto de Markov (do inglês, *hidden Markov model*, HMM), ver, por exemplo, Ross (2010).

### 1.1.1 Controle por realimentação de estados

Para o caso dependente do modo, soluções ótimas para o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estados em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *linear matrix inequalities*, LMIs) já estão bem estabelecidas na literatura (Gonçalves; Fioravanti; Geromel, 2012). Em Costa e Marques (1998) é estudado o controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  considerando incertezas na matriz de probabilidades de transição, e abordagens para o controle robusto  $\mathcal{H}_2$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  foram apresentadas em Todorov e Fragoso (2016a).

Por outro lado, para os casos de informação parcial de  $\theta(k)$ , diversas abordagens e soluções subótimas para o controle por realimentação de estados, geralmente em termos de LMIs, tem sido apresentadas na literatura. Para o caso independente do modo podemos citar Todorov e Fragoso (2016b), que introduziram novas condições em termos de LMIs para o controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ; e Oliveira *et al.* (2014), os quais propoem o projeto de um controlador  $\mathcal{H}_2$  independente do modo a partir de um controlador dependente do modo em um procedimento de duas etapas. Para o caso de agrupamento em *clusters*, temos, por exemplo, do Val, Geromel e Gonçalves (2002), que introduziram o conceito de *clusters* abordando o caso de controle  $\mathcal{H}_2$  e Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012), os quais abordaram o controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$ .

No âmbito da abordagem baseada em detector, podemos mencionar Costa, Fragoso e Todorov (2015), o qual introduziu este conceito e apresentou resultados para o projeto de controladores  $\mathcal{H}_2$ . Em Todorov, Fragoso e Costa (2018), foi abordado o projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  e proposto um *Bounded Real Lemma*, e em de Oliveira e Costa (2018a) foram apresentados resultados para o controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , estendendo o estudo para os casos de incertezas politópicas nas matrizes de probabilidades de transição e detecção.

No que se refere ao índice de desempenho  $\ell_2-\ell_\infty$ , também conhecido na literatura pelo termo em inglês *energy-to-peak*, observa-se que os trabalhos disponiveis são relativamente mais escassos. Em particular, para MJLS a tempo contínuo, destacam-se os estudos de Todorov (2024), que propôs uma nova formulação para a análise do ganho  $\ell_2-\ell_\infty$ ; de de Oliveira, Costa, Gabriel e dos Santos (2022), que investigaram o problema de filtragem de ordem reduzida; e de Costa, de Oliveira *et al.* (2023), que abordaram o projeto de controladores por realimentação estática de saída. Para sistemas semimarkovianos a

tempo contínuo, os trabalhos de Xu *et al.* (2020) e Costa e de Oliveira (2024) trataram, respectivamente, os problemas de filtragem e de controle por realimentação estática de saída, e dos Santos *et al.* (2025) incorporaram o ganho  $\ell_2$ – $\ell_\infty$  em uma estratégia de controle multiobjetivo. Já no contexto de MJLS a tempo discreto, Zhang, Zhang e Yang (2015) estudaram filtros de ordem reduzida dependentes do modo aplicados a sistemas em rede com atrasos modelados por uma cadeia de Markov; Lin e Shi (2022) e Liu *et al.* (2024) analisaram problemas de controle por realimentação estática de saída e de estados, respectivamente, empregando estratégias de controle baseadas em eventos (do inglês, *event-triggered control*); e, considerando a abordagem HMM, destacam-se Wang e Wu (2024), que trataram o projeto de filtros de ordem completa considerando uma cadeia de Markov não-homogênea, e de Oliveira, Costa, dos Santos *et al.* (2023), que estudaram o problema de filtragem de ordem reduzida.

### 1.1.2 Controle por realimentação estática de saída

Em um cenário prático, uma suposição mais realista é considerar que os estados do sistema não são totalmente acessíveis. Esta situação levou a um interesse crescente em estratégias de controle que dependem de informações parciais das variáveis de estado. Em particular, o controle por realimentação estática de saída surgiu como uma abordagem atraente devido à sua simplicidade prática e facilidade de implementação, apesar dos desafios impostos por sua natureza inerentemente não convexa, o que incentivou na literatura diversos trabalhos propondo soluções subótimas e abordagens numéricas, tais como o algoritmo de linearização de complementaridade cônica (do inglês, *cone complementarity linearization algorithm*) em El Ghaoui, Oustry e AitRami (1997), o procedimento de duas etapas (do inglês, *two steps procedure*) em Peaucelle e Arzelier (2001), e outros resultados, ver, por exemplo, Chang e Yang (2014), Chang, Liu e Park (2020), Goyal, Ghosh e Kamal (2021) e Goyal, Aggarwal *et al.* (2023).

No contexto de MJLS, para o caso dependente do modo, podemos mencionar Che e Wang (2010), que estudou o controle  $\mathcal{H}_\infty$  considerando a matriz de probabilidades de transição parcialmente conhecida e Shu, Lam e Xiong (2010), que tratou do problema de estabilização através da abordagem por aumento de ordem do sistema. Em Shen, Ye e Fei (2014), foi abordado o controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  considerando incertezas limitadas em norma nas matrizes do sistema; em Morais *et al.* (2014), foram apresentados resultados mais relaxados para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  com incertezas na matriz de probabilidades de transição; em Morais *et al.* (2016), o problema de controle  $\mathcal{H}_2$  por realimentação dinâmica de saída é reescrito como um problema de realimentação estática de saída, e em Liang e Zhang (2019), o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  com incertezas na matriz de probabilidades de transição é revisitado.

Para o caso independente do modo, podemos mencionar Dolgov e Hanebeck (2017),



que aborda o problema de estabilização. No caso de agrupamento em *clusters*, o trabalho em Morais *et al.* (2017) pode ser empregado para o problema de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação dinâmica de saída com ordem reduzida, o qual é reescrito como um problema de realimentação estática de saída.

Referente à abordagem por detector, em relação ao problema de controle por realimentação estática de saída para MJLS a tempo discreto e cadeia oculta, podemos mencionar Su e Ye (2019), o qual investiga o problema de estabilização considerando ataques de engano (do inglês, *deception attacks*) na medição da saída, Tao e Wu (2024) que também lida com o problema de estabilização, porém utilizando uma abordagem de aumento do sistema, onde o sistema em malha fechada é modelado como um MJLS singular. Zabala e Costa (2020) aborda o controle por realimentação estática de saída com restrições usando uma formulação LMI para os casos de horizonte finito e infinito, de Oliveira e Costa (2020b) trata o problema de controle  $\mathcal{H}_2$  propondo uma condição de projeto em termos de LMIs e impondo restrições de posto sobre as matrizes de saída do sistema, de Oliveira, Costa e Gabriel (2022) lida com os problemas de controle  $\mathcal{H}_2$  robusto e de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , e propõe uma formulação LMI considerando incertezas paramétricas limitadas em norma para as matrizes de estado (somente para o caso  $\mathcal{H}_2$ ) e impondo restrições de posto sobre as matrizes de saída do sistema. Por fim, de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) estudou os problemas de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  propondo novas condições de síntese combinadas com o procedimento de duas etapas anteriormente citado. Nesta abordagem, o cálculo de ganhos de realimentação de estados estabilizantes é necessário como uma etapa preliminar do algoritmo iterativo proposto. Entretanto, esta característica introduz uma dependência de técnicas externas e restringe as possibilidades de se obter uma solução inicial factível, devido à escassez de métodos existentes na literatura capazes de calcular tais ganhos no cenário considerado.

## 1.2 Contribuições do trabalho

No que tange ao problema de controle por realimentação de estados, esta dissertação estabelece novos resultados para o projeto de controladores  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\ell_2$ – $\ell_\infty$  e multiobjetivo para MJLS a tempo discreto, em um cenário de observação parcial da cadeia de Markov, considerando a abordagem baseada em detector. Neste contexto, propomos condições suficientes em termos de desigualdades matriciais bilineares (do inglês, *bilinear matrix inequalities*, BMIs) e apresentamos uma abordagem iterativa baseada em um algoritmo de descida coordenada para lidar com as bilinearidades e buscar uma solução subótima. A abordagem proposta apresenta-se como uma alternativa com potencial, capaz de produzir melhores resultados quando comparada com os métodos existentes na literatura.

As principais contribuições desta dissertação referentes ao problema de controle por realimentação estática de saída são descritas a seguir:

- Apresentamos novos resultados para a síntese de controladores por realimentação estática de saída para MJLS a tempo discreto e cadeia ocultas, abordando os problemas de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Em contraste com as abordagens em de Oliveira e Costa (2020b) e de Oliveira, Costa e Gabriel (2022), as condições propostas não impõem restrições de posto às matrizes do sistema. Uma vez que estas condições são formuladas como BMIs, propomos uma *abordagem iterativa* que é baseada em um *algoritmo de descida coordenada* que, a partir de uma solução inicial factível, gera uma sequência não crescente de custos garantidos que converge para um valor mínimo. Embora o uso do algoritmo de descida coordenada para resolver problemas em termos de BMIs esteja bem estabelecido na literatura (Carvalho; De Oliveira; Costa, 2020; Simon *et al.*, 2011; Wang; Zemouche; Rajamani, 2018; Carvalho; Palma *et al.*, 2023; Costa; De Oliveira, 2024), sua aplicação às condições propostas é nova.
- Os resultados mais recentes que abordam o problema de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para MJLS a tempo discreto e cadeia oculta no contexto de projeto por realimentação estática de saída são apresentados por de Oliveira, Costa e Daafouz (2020). Em comparação, a abordagem proposta não requer o cálculo de ganhos de realimentação de estados estabilizantes como etapa preliminar para a inicialização do algoritmo, eliminando assim a dependência de métodos externos. Além disso, constitui uma alternativa competitiva com forte potencial, capaz de alcançar melhores índices de desempenho em um número reduzido de iterações.
- Como a abordagem proposta não depende do cálculo prévio de ganhos de realimentação de estados estabilizantes, ela também pode ser aplicada como um novo método para o projeto de controladores por realimentação de estados.

### 1.3 Organização do documento

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

- No Capítulo 2, apresentamos a notação utilizada no trabalho e os conceitos básicos sobre sistemas lineares com saltos Markovianos e cadeia oculta. Introduzimos as definições de estabilidade estocástica e normas  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2$ – $\ell_\infty$ , assim como resultados da literatura empregados ao longo do trabalho;

- No Capítulo 3, formulamos o problema de controle multiobjetivo por realimentação de estados e propomos novas condições suficientes para a síntese de controladores com restrições nos índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$ . Introduzimos uma abordagem iterativa para a obtenção de soluções subótimas para o problema de controle multiobjetivo a partir das condições propostas. Exemplos numéricos ilustram os resultados obtidos, comparando-os com métodos existentes na literatura;
- No Capítulo 4, estudamos os problemas de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  por realimentação estática de saída e propomos novas condições suficientes para a síntese de controladores. Apresentamos uma abordagem iterativa para a obtenção de soluções subótimas para os problemas de controle estudados a partir das condições propostas. Através de exemplos numéricos, ilustramos a eficácia da abordagem proposta e a comparamos com métodos disponíveis na literatura; e
- No Capítulo 5, apresentamos a conclusão da dissertação e perspectivas futuras de trabalho.

## 1.4 Trabalhos publicados

- Os resultados do Capítulo 3 foram parcialmente apresentados no *XVII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI) 2025* (Granato; Costa, 2025b).
- Os resultados do Capítulo 4 foram publicados no periódico *IEEE Access* (Granato; Costa, 2025a)

## 2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos a notação utilizada no trabalho e os conceitos básicos sobre MJLS a tempo discreto e cadeia oculta. Introduzimos as definições de estabilidade estocástica, norma  $\mathcal{H}_2$ , norma  $\mathcal{H}_\infty$  e índice  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ , assim como resultados da literatura empregados ao longo do trabalho.

### 2.1 Notação

Para espaços de Banach reais  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$ , definimos  $\mathbb{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  como o espaço de Banach de todos os operadores limitados de  $\mathbb{X}$  em  $\mathbb{Y}$ , cuja norma induzida é representada por  $\|\cdot\|$ , e por simplicidade, adotamos  $\mathbb{B}(\mathbb{X}) \triangleq \mathbb{B}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ .  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^{++}$  denotam, respectivamente, o conjunto dos números reais e o conjunto dos números reais estritamente positivos. O espaço Euclidiano de dimensão  $n$  é representado por  $\mathbb{R}^n$ , e o espaço das matrizes reais de dimensão  $m \times n$  é representado por  $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , com  $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \triangleq \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

A transposição de uma matriz é denotada pelo uso do apóstrofo ( $'$ ). Para matrizes quadradas, o operador traço é representado por  $\text{Tr}(\cdot)$ . A matriz identidade de dimensão  $n$  e a matriz nula de dimensão  $m \times n$  são representadas, respectivamente, por  $I_n$  e  $0_{m \times n}$  (ou somente por  $I$  e  $0$ , respectivamente, por simplicidade). A matriz composta por blocos diagonais é representada por **diag**( $\cdot$ ). Um bloco simétrico em uma matriz simétrica é denotado pelo símbolo  $\bullet$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} A & \bullet \\ B & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Dada uma matriz quadrada  $G$ , a soma simétrica é definida por  $\text{Her}(G) \triangleq G + G'$ . Para inteiros positivos  $N$  e  $M$ , os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{M}$  são definidos por  $\mathbb{N} \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$  e  $\mathbb{M} \triangleq \{1, 2, \dots, M\}$ , respectivamente. Adicionalmente, para um inteiro positivo  $\kappa$ , o conjunto  $\mathbb{H}_\kappa^{n,m}$  representa o espaço linear de todas as sequências de  $\kappa$  matrizes reais  $V = (V_1, V_2, \dots, V_\kappa)$ , tais que  $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  para  $i = 1, 2, \dots, \kappa$ . Por simplicidade, adotamos  $\mathbb{H}_\kappa^n \triangleq \mathbb{H}_\kappa^{n,n}$  e  $\mathbb{H}_\kappa^{n++} \triangleq \{V = V' \in \mathbb{H}_\kappa^n \text{ tais que } V_i > 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, \kappa\}$ . Para  $P, V \in \mathbb{H}_\kappa^{n++}$ , escrevemos  $P > V$  ( $P \geq V$ ) sempre que  $P_i > V_i$  ( $P_i \geq V_i$ ) para cada  $i = 1, 2, \dots, \kappa$ .

Em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  com filtração  $\{\mathfrak{F}_k\}$ ,  $\mathbf{E}(\cdot)$  denota o operador

valor esperado. A notação  $l_2^r(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_k\}, \mathbb{P})$  (ou somente  $l_2^r$ ) representa o espaço de todos os processos a tempo discreto  $w = \{w(k) \in \mathbb{R}^r; k = 0, 1, 2, \dots\}$  adaptados em  $\mathfrak{F}_k$  tais que

$$\|w\|_2^2 \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\|w(k)\|^2) < \infty.$$

Por fim, a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  é representada por  $\sigma(\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$ .

## 2.2 Sistemas lineares com saltos Markovianos e cadeia oculta

Nesta seção apresentamos os conceitos básicos sobre MJLS a tempo discreto e cadeia oculta utilizados neste trabalho e obtidos a partir de Costa, Fragoso e Todorov (2015) e Todorov, Fragoso e Costa (2018).

Em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  com filtração  $\{\mathfrak{F}_k\}$ , consideramos o seguinte MJLS a tempo discreto:

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}x(k) + J_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}w(k), \\ z(k) = C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}x(k) + E_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}w(k), \\ x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $w(\cdot) \in \mathbb{R}^r$  é a entrada exógena e  $z(\cdot) \in \mathbb{R}^q$  é a saída controlada ou a ser estimada.

O processo  $\theta(k)$  é uma cadeia de Markov a tempo discreto homogênea tomando valores no conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  com matriz de probabilidade de transição  $\mathcal{P} \triangleq [p_{ij}]$  e distribuição inicial  $\mu_i = \mathbb{P}(\theta_0 = i)$ , onde  $p_{ij} = \mathbb{P}(\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i)$ , para todo  $i, j \in \mathbb{N}$ , satisfazendo as restrições normalizadas  $p_{ij} \geq 0$  e  $\sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij} = 1$ . Adicionalmente, assumimos que a entrada exógena é um ruído estocástico com energia finita, isto é,  $w \in l_2^r$ .

Adotamos neste trabalho a mesma abordagem desenvolvida em Costa, Fragoso e Todorov (2015), denominada de *abordagem baseada em detector*, a qual considera que  $\theta(k)$  não pode ser diretamente observado. Em seu lugar, assumimos que há um detector cuja saída é um sinal  $\hat{\theta}(k)$ , o qual é uma estimativa de  $\theta(k)$ . Consideramos que há um conjunto finito  $\mathbb{M} \triangleq \{1, 2, \dots, M\}$  e subconjuntos  $\mathbb{M}_i \subseteq \mathbb{M}$ , com  $\bigcup_{i=1}^N \mathbb{M}_i = \mathbb{M}$ , tais que  $\hat{\theta}(k) \in \mathbb{M}_i$  é emitido sempre que a cadeia de Markov  $\theta(k) = i$ , independentemente de todos os valores anteriores e atuais de outros processos. Definindo  $\hat{\mathfrak{F}}_0 = \sigma(\{x(0), w(0), \theta(0)\})$  e  $\hat{\mathfrak{F}}_k = \sigma(\{x(0), w(0), \theta(0), \hat{\theta}(0), u(0)\} \cup \{x(s), w(s), \theta(s), \hat{\theta}(s), u(s); 0 < s < k\} \cup \{x(k), w(k), \theta(k)\})$ , e notando que  $\hat{\theta}(k)$  não pertence ao conjunto de variáveis aleatórias que

geram  $\hat{\mathfrak{F}}_k$ , assumimos que

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}(k) = \ell \mid \hat{\mathfrak{F}}_k) = \mathbb{P}(\hat{\theta}(k) = \ell \mid \theta(k)) = \alpha_{\theta(k)\ell},$$

com  $\sum_{\ell \in \mathbb{M}} \alpha_{i\ell} = 1$ . Assim, podemos escrever que  $\mathbb{M}_i = \{\ell \in \mathbb{M}; \alpha_{i\ell} > 0\}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Adicionalmente, definimos a matriz de probabilidade de detecção como sendo dada por  $\Upsilon \triangleq [\alpha_{i\ell}]$ , para todo  $(i, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{M}$ .

**Comentário 2.1.** *Nota-se que, com o objetivo de simplificar a notação, sempre que possível,  $\theta(k)$  e  $\hat{\theta}(k)$  serão substituídos por  $i$  e  $\ell$ , respectivamente, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}$ .*

O processo conjunto  $(\theta(k), \hat{\theta}(k))$  pode ser visto como um HMM, onde  $\theta(k)$  representa o processo não observável (cadeia oculta de Markov), ao passo que  $\hat{\theta}(k)$  é o processo observável. Desse modo, os sistemas descritos por (2.1) são denominados de *sistemas lineares com saltos Markovianos e cadeia oculta*.

**Comentário 2.2.** *Como destacado em Costa, Fragoso e Todorov (2015), de Oliveira e Costa (2020b) e de Oliveira, Costa e Gabriel (2022), o processo conjunto  $(\theta(k), \hat{\theta}(k))$  empregado na abordagem por detector generaliza os casos de observação dependente do modo, independente do modo e em “clusters”, os quais podem ser vistos então como casos particulares da referida abordagem, como se segue:*

- *Para o caso de observação dependente do modo, no qual  $\hat{\theta}(k) = \theta(k)$  com  $\theta(k)$  totalmente conhecido, impomos  $M = N$  e  $\alpha_{ii} = 1$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ ;*
- *Para o caso de observação independente do modo, no qual  $\hat{\theta}(k)$  não fornece qualquer informação em relação a  $\theta(k)$ , impomos  $M = 1$  e  $\alpha_{i1} = 1$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ ; e*
- *Para o caso de observação em “clusters”, considerando  $M \leq N$ , o conjunto  $\mathbb{N}$  pode ser escrito como a união de  $M$  conjuntos disjuntos  $\mathbb{N}_i$ , denominados de “clusters”, de forma que  $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^M \mathbb{N}_i$ , e podemos definir uma função  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M}$  tal que  $g(i) = j$  para todo  $i \in \mathbb{N}_j$ , com  $g(i)$  representando o “cluster” ao qual o modo  $i$  pertence.*

Referente à notação, adotamos também o conjunto  $\mathbb{W}^{n,m} \triangleq (W_{i\ell} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ , e, por simplicidade,  $\mathbb{W}^n \triangleq \mathbb{W}^{n,n}$ . Adicionalmente, definimos  $\mathbb{W}^{n++} \triangleq (V = V' \in \mathbb{W}^n)$ , tais que  $V_{i\ell} > 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ .

### 2.2.1 Estabilidade

A análise de estabilidade é um aspecto fundamental no estudo de sistemas dinâmicos. No contexto de sistemas com saltos Markovianos, a estabilidade deve ser entendida em um sentido estocástico, uma vez que o comportamento do sistema depende de variáveis aleatórias associadas aos modos de operação. Desse modo, busca-se garantir que as

trajetórias do sistema permaneçam limitadas, em média, mesmo diante das transições entre modos.

Considerando o sistema (2.1) para  $w \equiv 0$ , introduzimos a seguir o conceito de estabilidade estocástica, retirado de Costa, Fragoso e Todorov (2015).

**Definição 2.1** (Estabilidade estocástica). *O sistema (2.1) é dito estocasticamente estável (do inglês, “stochastically stable”, SS) se, considerando  $w \equiv 0$ , temos que*

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\|x(k)\|^2) < \infty,$$

para todo modo inicial  $\theta_0$  e toda condição inicial  $x_0$  com segundo momento finito, isto é,  $\mathbf{E}(\|x_0\|^2) < \infty$ .

Essa definição indica que, sob excitação nula, a energia esperada do estado ao longo do tempo é finita, o que implica que o sistema não apresenta crescimento ilimitado, em média. Assim, mesmo que os modos de operação mudem de forma aleatória, a dinâmica global tende à origem com probabilidade unitária.

Definindo o operador  $\mathcal{E}(\cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_N^n)$  como

$$\mathcal{E}_i(V) \triangleq \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij} V_j, \quad (2.2)$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ , com  $V \in \mathbb{H}_N^n$ , apresentamos o resultado a seguir, adaptado de Costa, Fragoso e Todorov (2015), o qual permite verificar a estabilidade estocástica do sistema (2.1) através de um conjunto de desigualdades matriciais.

**Lema 2.1.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O sistema (2.1) é SS.*

(ii) *Existem matrizes  $P \in \mathbb{H}_N^{n++}$  tal que*

$$P_i > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} A'_{i\ell} \mathcal{E}_i(P) A_{i\ell},$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

## 2.2.2 Norma $\mathcal{H}_2$

A norma  $\mathcal{H}_2$  constitui uma medida fundamental de desempenho em sistemas lineares e estocásticos, pois quantifica a energia média da saída em resposta a uma excitação de energia unitária. No contexto de sistemas lineares com saltos markovianos, essa norma avalia o efeito médio das perturbações sobre o desempenho do sistema, levando em conta as transições aleatórias entre modos de operação.

Apresentamos a definição de norma  $\mathcal{H}_2$  para MJLS conforme de Oliveira e Costa (2018a).

**Definição 2.2** (Norma  $\mathcal{H}_2$ ). *Considere que o sistema (2.1) seja SS. Para  $x_0 = 0$  e a entrada exógena  $w(k)$  dada por*

$$w(k) = \begin{cases} v_s, & k = 0, \\ 0, & k > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $v_s$  é o  $s$ -ésimo elemento da base canônica de  $\mathbb{R}^r$ , definimos a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (2.1) como

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 \triangleq \sum_{s=1}^r \|z_s\|_2^2,$$

onde  $\|z_s\|_2^2 \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\|z_s(k)\|^2)$  e  $z_s(k)$  é a saída  $z(k)$  de (2.1) para  $w(k)$  dado por (2.3).

Considerando a Definição 2.2, e recordando que  $\mu_i = \mathbb{P}(\theta_0 = i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , apresentamos o lema a seguir, com base em de Oliveira e Costa (2018b), o qual fornece um conjunto de desigualdades matriciais que permite verificar um limitante superior  $\gamma_2$  para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (2.1).

**Lema 2.2.** *Dado  $\gamma_2 > 0$ , se existirem matrizes  $P \in \mathbb{H}_N^{n++}$ ,  $W \in \mathbb{W}^{r++}$  e  $R \in \mathbb{W}^{n++}$  satisfazendo, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ , as desigualdades*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \mu_i \alpha_{i\ell} \text{Tr}(W_{i\ell}) < \gamma_2^2, \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} W_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ J_{i\ell} & \mathcal{E}_i(P)^{-1} & \bullet \\ E_{i\ell} & 0 & I_q \end{bmatrix} > 0, \quad (2.5)$$

$$P_i > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} R_{i\ell}, \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} R_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ A_{i\ell} & \mathcal{E}_i(P)^{-1} & \bullet \\ C_{i\ell} & 0 & I_q \end{bmatrix} > 0, \quad (2.7)$$

então o sistema (2.1) é SS com  $\|\mathcal{G}\|_2 < \gamma_2$ .

Para o caso em que as matrizes  $J_{i\ell}$  e  $E_{i\ell}$  não dependem de  $\hat{\theta}(k)$ , isto é,  $J_{i\ell} = J_i$  e  $E_{i\ell} = E_i$ , o resultado do Lema 2.2 produz o seguinte corolário presente em de Oliveira e Costa (2018a).



**Corolário 2.1.** Dado  $\gamma_2 > 0$ , se existirem matrizes  $P \in \mathbb{H}_N^{r++}$ ,  $W \in \mathbb{H}_N^{r++}$  e  $R \in \mathbb{W}^{n++}$  satisfazendo, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ , as desigualdades

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \text{Tr}(W_i) < \gamma_2^2, \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ J_i & \mathcal{E}_i(P)^{-1} & \bullet \\ E_i & 0 & I_q \end{bmatrix} > 0, \quad (2.9)$$

$$P_i > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} R_{i\ell}, \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} R_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ A_{i\ell} & \mathcal{E}_i(P)^{-1} & \bullet \\ C_{i\ell} & 0 & I_q \end{bmatrix} > 0, \quad (2.11)$$

então o sistema (2.1) é SS com  $\|\mathcal{G}\|_2 < \gamma_2$ .

### 2.2.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é amplamente utilizada como medida de robustez em sistemas lineares e estocásticos, pois caracteriza o pior caso de ganho de energia entre o distúrbio de entrada e a saída do sistema. No caso de sistemas lineares com saltos markovianos, essa norma quantifica o máximo ganho de energia que pode ocorrer em virtude das variações nos modos de operação. Diferentemente da norma  $\mathcal{H}_2$ , que avalia o comportamento médio do sistema em termos de energia, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  fornece um limite superior de ganho, garantindo que o sistema atenuar distúrbios de energia limitada. Assim, a análise  $\mathcal{H}_\infty$  fornece uma ferramenta essencial para o projeto de controladores robustos, onde o objetivo é minimizar o valor dessa norma, ou seja, atenuar o efeito do distúrbio sobre a saída do sistema.

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida da seguinte forma, como apresentado em de Oliveira e Costa (2017):

**Definição 2.3** (Norma  $\mathcal{H}_\infty$ ). Considere que o sistema (2.1) seja SS. Para  $x_0 = 0$ , definimos a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (2.1) como

$$\|\mathcal{G}\|_\infty \triangleq \sup_{w \in \mathcal{W}, \theta_0 \in \mathbb{N}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2},$$

onde  $\|z\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}(\|z(k)\|^2)$  e  $\mathcal{W} = \{w \in l_2^r; \|w\|_2 > 0\}$ .

O lema a seguir, com base em de Oliveira e Costa (2017), apresenta uma formulação baseada em desigualdades matriciais que possibilita verificar um limitante superior  $\gamma_\infty$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (2.1).

**Lema 2.3.** Dado  $\gamma_\infty > 0$ , se existirem matrizes  $Q \in \mathbb{H}_N^{n++}$ ,  $M \in \mathbb{W}^{n++}$ ,  $N \in \mathbb{W}^{n,r}$  e  $S \in \mathbb{W}^{r++}$  satisfazendo, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ , as desigualdades

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ 0 & \gamma_\infty^2 I_r \end{bmatrix} > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} \begin{bmatrix} M_{i\ell} & \bullet \\ N_{i\ell} & S_{i\ell} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} M_{i\ell} & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{i\ell} & S_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ A_{i\ell} & J_{i\ell} & \mathcal{E}_i(Q)^{-1} & \bullet \\ C_{i\ell} & E_{i\ell} & 0 & I_q \end{bmatrix} > 0, \quad (2.13)$$

então o sistema (2.1) é SS com  $\|\mathcal{G}\|_\infty < \gamma_\infty$ .

## 2.2.4 Índice $\ell_2$ - $\ell_\infty$

O índice  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ , também conhecido na literatura pelo termo em inglês *energy-to-peak index*, constitui uma medida alternativa de robustez que relaciona a energia do sinal de entrada com o valor máximo (pico) da saída. Diferentemente da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , que considera o pior caso do ganho de energia entre entrada e saída em todo o horizonte temporal, o índice  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  concentra-se no pico máximo da resposta, fornecendo uma noção mais conservadora e, em muitos casos, mais adequada para aplicações nas quais é essencial limitar amplitudes instantâneas—como em sistemas sujeitos a saturação, restrições físicas ou requisitos de segurança. No contexto de sistemas lineares com saltos markovianos, a análise do ganho  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  permite avaliar o impacto máximo de distúrbios sobre a saída, dadas as transições estocásticas dos modos de operação, fornecendo uma base teórica para o projeto de controladores capazes de atenuar picos de resposta sob incertezas e variações no modo de operação.

Apresentamos a seguir a definição de índice  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ , formulada em de Oliveira, Costa, dos Santos *et al.* (2023) e Xu *et al.* (2020).

**Definição 2.4** (Índice  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ ). Considere que o sistema (2.1) seja SS. Para  $x_0 = 0$ , dizemos que o sistema (2.1) apresenta um índice de desempenho  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ , denotado por  $\gamma_p$ , se for observado que

$$\|z\|_\infty < \gamma_p \|w\|_2,$$

para  $w \in l_2^r$ ,  $w \neq 0$ , onde  $\|z\|_\infty = \sup_{k \geq 0} \|z\|$ .

O lema a seguir, com base em de Oliveira, Costa, dos Santos *et al.* (2023), apresenta uma formulação baseada em desigualdades matriciais que possibilita verificar um limitante superior  $\gamma_p$  para o índice  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  do sistema (2.1).

**Lema 2.4.** *Dado  $\gamma_p > 0$ , se existirem matrizes  $L \in \mathbb{H}_N^{n++}$  satisfazendo, para todo  $i \in \mathbb{N}$ , as desigualdades*

$$\begin{bmatrix} L_i & \bullet \\ 0 & \gamma_p^2 I_r \end{bmatrix} > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} \begin{bmatrix} A'_{i\ell} \\ J'_{i\ell} \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(L) \begin{bmatrix} A_{i\ell} & J_{i\ell} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} L_i & \bullet \\ 0 & \gamma_p^2 I_r \end{bmatrix} > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} \begin{bmatrix} C'_{i\ell} \\ E'_{i\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{i\ell} & E_{i\ell} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

então o sistema (2.1) é SS e  $\|z\|_\infty < \gamma_p \|w\|_2$ , para  $w \in l_2^r$ ,  $w \neq 0$ , com  $x_0 = 0$ .

## 2.3 Resultados auxiliares

Nesta seção, são apresentados resultados auxiliares que serão úteis ao longo do trabalho.

**Lema 2.5** ((Goyal; Ghosh; Kamal, 2021)). *Para matrizes  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{Y}$  e  $\mathbb{Z} > 0$  de dimensões adequadas, a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$\text{Her}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) \leq \mathbb{X}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{X}' + \mathbb{Y}'\mathbb{Z}\mathbb{Y}. \quad (2.16)$$

*Prova.* Dado que  $\mathbb{Z} > 0$  por hipótese, a desigualdade (2.16) é uma consequência direta de  $(\mathbb{X}' - \mathbb{Z}\mathbb{Y})'\mathbb{Z}^{-1}(\mathbb{X}' - \mathbb{Z}\mathbb{Y}) \geq 0$ .  $\square$

**Lema 2.6** (adaptado de Chang, Li e Park (2018)). *Seja  $\mathbb{T}$  uma matriz simétrica. Para matrizes  $\mathbb{F}$  e  $\mathbb{G}$  de dimensões adequadas, se existir uma matriz  $\mathbb{X}$  tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{T} & \bullet \\ \mathbb{F}' + \mathbb{X}\mathbb{G} & \text{Her}(\mathbb{X}) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.17)$$

então, temos que

$$\mathbb{T} - \text{Her}(\mathbb{F}\mathbb{G}) > 0. \quad (2.18)$$

*Prova.* Assuma que (2.17) seja válida. Multiplicando à esquerda e à direita de (2.17) por  $\begin{bmatrix} I & -\mathbb{G}' \end{bmatrix}$  e sua transposta, respectivamente, obtemos (2.18), completando assim a prova.  $\square$

### 3 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Neste capítulo, estudamos o problema de controle multiobjetivo por realimentação de estados de sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto, em um cenário de informação parcial da cadeia de Markov, e adotando os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2-\ell_\infty$ . Consideramos um modelo oculto de Markov, para o qual assumimos que o modo de operação  $\theta(k)$  do sistema não está disponível para o controlador, mas somente uma estimativa  $\hat{\theta}(k)$  fornecida por um detector. Neste contexto, propomos novas condições suficientes para a síntese de controladores  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\ell_2-\ell_\infty$  e multiobjetivo em termos de desigualdades matriciais bilineares e apresentamos uma abordagem iterativa baseada em um algoritmo de descida coordenada para a obtenção de uma solução subótima para as condições propostas. Exemplos numéricos são apresentados a fim de ilustrar a eficácia da abordagem proposta e compará-la com métodos existentes na literatura.

#### 3.1 Formulação do problema

Em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  com filtração  $\{\mathfrak{F}_k\}$ , consideremos o seguinte MJLS a tempo discreto:

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + J_{\theta(k)}^{(2)}w_2(k) + J_{\theta(k)}^{(\infty)}w_\infty(k) + J_{\theta(k)}^{(e)}w_e(k), \\ z_2(k) = C_{\theta(k)}^{(2)}x(k) + D_{\theta(k)}^{(2)}u(k) + E_{\theta(k)}^{(2)}w_2(k), \\ z_\infty(k) = C_{\theta(k)}^{(\infty)}x(k) + D_{\theta(k)}^{(\infty)}u(k) + E_{\theta(k)}^{(\infty)}w_\infty(k), \\ z_e(k) = C_{\theta(k)}^{(e)}x(k) + D_{\theta(k)}^{(e)}u(k) + E_{\theta(k)}^{(e)}w_e(k), \\ x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  é o estado e  $u(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle adaptada em  $\mathfrak{F}_k$ . As variáveis  $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^{r_2}$ ,  $w_\infty(\cdot) \in \mathbb{R}^{r_\infty}$  e  $w_e(\cdot) \in \mathbb{R}^{r_e}$  correspondem às entradas exógenas associadas aos índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2-\ell_\infty$ , respectivamente. Adicionalmente, as variáveis  $z_2(\cdot) \in \mathbb{R}^{q_2}$ ,  $z_\infty(\cdot) \in \mathbb{R}^{q_\infty}$  e  $z_e(\cdot) \in \mathbb{R}^{q_e}$  denotam as saídas controladas relacionadas, respectivamente, aos problemas de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2-\ell_\infty$ .

Associado a (3.1), consideramos o controlador por realimentação de estados, dependente somente de  $\hat{\theta}(k)$ , dado por

$$u(k) = K_{\hat{\theta}(k)}x(k). \quad (3.2)$$

Combinando (3.1) e (3.2), obtemos o seguinte sistema em malha fechada:

$$\mathcal{G}_K : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}x(k) + J_{\theta(k)}^{(2)}w_2(k) + J_{\theta(k)}^{(\infty)}w_\infty(k) + J_{\theta(k)}^{(e)}w_e(k), \\ z_2(k) = C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}^{(2)}x(k) + E_{\theta(k)}^{(2)}w_2(k), \\ z_\infty(k) = C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}^{(\infty)}x(k) + E_{\theta(k)}^{(\infty)}w_\infty(k), \\ z_e(k) = C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}^{(e)}x(k) + E_{\theta(k)}^{(e)}w_e(k), \\ x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde as matrizes  $A_{i\ell}$ ,  $C_{i\ell}^{(2)}$ ,  $C_{i\ell}^{(\infty)}$  e  $C_{i\ell}^{(e)}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{M}$ , são definidas como

$$A_{i\ell} \triangleq A_i + B_i K_\ell, \quad (3.4)$$

$$C_{i\ell}^{(2)} \triangleq C_i^{(2)} + D_i^{(2)} K_\ell, \quad (3.5)$$

$$C_{i\ell}^{(\infty)} \triangleq C_i^{(\infty)} + D_i^{(\infty)} K_\ell, \quad (3.6)$$

$$C_{i\ell}^{(e)} \triangleq C_i^{(e)} + D_i^{(e)} K_\ell. \quad (3.7)$$

Considerando a Definição 2.1 e a lei de controle dada por (3.2), definimos o conjunto  $\mathbb{K}$  por

$$\mathbb{K} \triangleq \{K = (K_1, K_2, \dots, K_M) \in \mathbb{H}_M^{n, n_u} : \mathcal{G}_K \text{ é SS}\},$$

ou seja,  $\mathbb{K}$  caracteriza o conjunto de todos os controladores por realimentação de estados admissíveis que estabilizam estocasticamente o sistema (3.3).

Desse modo, podemos estabelecer o objetivo principal deste capítulo da seguinte forma: encontrar  $K \in \mathbb{K}$  que garanta limitantes superiores  $\gamma_2$ ,  $\gamma_\infty$  e  $\gamma_e$  para os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  do sistema (3.3), respectivamente. Temos assim um problema de controle multiobjetivo, o qual pode ser escrito como um problema de otimização da seguinte forma:

$$\inf_{K \in \mathbb{K}} \{f(\gamma_2^2, \gamma_\infty^2, \gamma_e^2) : \|\mathcal{G}_K\|_2 < \gamma_2, \|\mathcal{G}_K\|_\infty < \gamma_\infty, \|z_e\|_\infty < \gamma_e \|w_e\|_2\}, \quad (3.8)$$

onde a função objetivo  $f(\gamma_2^2, \gamma_\infty^2, \gamma_e^2)$  é definida por

$$f(\gamma_2^2, \gamma_\infty^2, \gamma_e^2) \triangleq \delta_2 \gamma_2^2 + \delta_\infty \gamma_\infty^2 + \delta_e \gamma_e^2, \quad (3.9)$$

com  $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\delta_\infty \in \mathbb{R}^+$  e  $\delta_e \in \mathbb{R}^+$  sendo parâmetros escalares pré-fixados pelo usuário.

Inicialmente, uma primeira abordagem para o problema (3.8) é reescrevê-lo da seguinte forma:

$$\inf_{K \in \mathbb{K}} \{f(\gamma_2^2, \gamma_\infty^2, \gamma_e^2) : (2.8)-(2.11), (2.12)-(2.13) \text{ e } (2.14)-(2.15) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (3.10)$$

No entanto, notamos que o problema de otimização (3.10) é de natureza não convexa, dadas as não linearidades envolvendo as desigualdades (2.9), (2.11), (2.13), (2.14) e (2.15). Portanto, o objetivo deste capítulo é buscar condições que permitam obter uma aproximação convexa para o problema (3.10).

**Comentário 3.1.** *O problema de otimização (3.8) para o contexto multiobjetivo pode ser reduzido a problemas de controle menos restritivos da seguinte forma:*

- **Problema de controle  $\mathcal{H}_2$ :** encontrar  $K \in \mathbb{K}$  a fim de obter um custo garantido mínimo  $\gamma_2$  para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (3.3).

Neste caso, basta impormos  $\delta_2 = 1$  e  $\delta_\infty = \delta_e = 0$ , tal que

$$\inf_{K \in \mathbb{K}} \{f(\gamma_2^2, \gamma_\infty^2, \gamma_e^2) = \gamma_2^2\}. \quad (3.11)$$

- **Problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ :** encontrar  $K \in \mathbb{K}$  a fim de obter um custo garantido mínimo  $\gamma_\infty$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (3.3).

Neste caso, fazemos  $\delta_\infty = 1$  e  $\delta_2 = \delta_e = 0$ , tal que

$$\inf_{K \in \mathbb{K}} \{f(\gamma_2^2, \gamma_\infty^2, \gamma_e^2) = \gamma_\infty^2\}. \quad (3.12)$$

- **Problema de controle  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ :** encontrar  $K \in \mathbb{K}$  a fim de obter um limitante superior mínimo  $\gamma_e$  para o índice  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  do sistema (3.3).

Neste caso, fixamos  $\delta_e = 1$  e  $\delta_2 = \delta_\infty = 0$ , tal que

$$\inf_{K \in \mathbb{K}} \{f(\gamma_2^2, \gamma_\infty^2, \gamma_e^2) = \gamma_e^2\}. \quad (3.13)$$

- **Problema de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ :** encontrar  $K \in \mathbb{K}$  a fim de obter um custo garantido mínimo  $\gamma_2$  para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (3.3), considerando um dado limitante superior  $\gamma_\infty > 0$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (3.3).

Neste caso, adotamos  $\delta_2 = 1$  e  $\delta_\infty = \delta_e = 0$ , e fixamos o valor de  $\gamma_\infty$  em (2.12)-(2.13), tal que

$$\inf_{\substack{K \in \mathbb{K} \\ \gamma_\infty > 0}} \{f(\gamma_2^2, \gamma_\infty^2, \gamma_e^2) = \gamma_2^2\}. \quad (3.14)$$

## 3.2 Controle $\mathcal{H}_2$

Nesta seção, abordamos o problema de controle  $\mathcal{H}_2$ . Inicialmente, consideramos as seguintes desigualdades, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ ,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \text{Tr}(W_i) < \zeta_2, \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ O_i J_i^{(2)} & \text{Her}(O_i) - \mathcal{E}_i(P) & \bullet \\ E_i^{(2)} & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.16)$$

$$P_i > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} R_{i\ell}, \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} R_{i\ell} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ G_{i\ell} A_i + T_{i\ell}^{(2)} Y_\ell & \Phi_{1i\ell} & \bullet & \bullet & \bullet \\ C_i^{(2)} + U_{i\ell}^{(2)} Y_\ell & 0 & I_{q_2} & \bullet & \bullet \\ 0 & \Phi_{2i\ell} & \Phi_{3i\ell} & Z_{i\ell}^{(2)} & \bullet \\ V_{i\ell}^{(2)} Y_\ell & 0 & 0 & 0 & \text{Her}(V_{i\ell}^{(2)} X_\ell) - Z_{i\ell}^{(2)} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.18)$$

onde

$$\Phi_{1i\ell} \triangleq \text{Her}(G_{i\ell}) - \mathcal{E}_i(P),$$

$$\Phi_{2i\ell} \triangleq (T_{i\ell}^{(2)} X_\ell - G_{i\ell} B_i)',$$

$$\Phi_{3i\ell} \triangleq (U_{i\ell}^{(2)} X_\ell - D_i^{(2)})',$$

e  $\mathcal{E}(\cdot)$  é dado por (2.2).

O conjunto de variáveis  $\xi_2$  de (3.15)-(3.18) é definido por

$$\xi_2 \triangleq (P, W, R, G, O, T^{(2)}, U^{(2)}, V^{(2)}, Z^{(2)}, X, Y, \zeta_2), \quad (3.19)$$

onde  $P \in \mathbb{H}_N^{n++}$ ,  $W \in \mathbb{H}_N^{r_2++}$ ,  $R \in \mathbb{W}^{n++}$ ,  $G \in \mathbb{W}^n$ ,  $T^{(2)} \in \mathbb{W}^{n_u, n}$ ,  $U^{(2)} \in \mathbb{W}^{n_u, q_2}$ ,  $V^{(2)} \in \mathbb{W}^{n_u}$ ,  $Z^{(2)} \in \mathbb{W}^{n_u++}$ ,  $X \in \mathbb{H}_M^{n_u}$ ,  $Y \in \mathbb{H}_M^{n, n_u}$  e  $\zeta_2 \in \mathbb{R}^{++}$ . Assim, podemos definir o conjunto de todas as soluções possíveis de (3.15)-(3.18) da seguinte forma:

$$\Xi_2 \triangleq \{\xi_2 : (3.15)-(3.18) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (3.20)$$

O teorema proposto a seguir apresenta uma condição suficiente para a síntese de um controlador  $\mathcal{H}_2$  com custo garantido  $\zeta_2^{1/2}$  para o sistema (3.3).

**Teorema 3.1.** *Se existir um  $\xi_2 \in \Xi_2$ , então definindo os ganhos do controlador (3.2) como  $K_\ell = X_\ell^{-1} Y_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_2 < \zeta_2^{1/2}$ .*

*Prova.* O objetivo é demonstrar que (3.15)-(3.18) implicam (2.8)-(2.11). Inicialmente, assumamos que (3.15)-(3.18) sejam válidas. Fazendo  $\zeta_2 = \gamma_2^2$ , notamos que (3.15) e (3.17) são iguais a (2.8) e (2.10), respectivamente. Como  $P > 0$  por hipótese, temos que  $\mathcal{E}_i(P) > 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Ademais, por hipótese temos que  $Z_{il}^{(2)} > 0$  e, portanto, não singular. Logo, aplicando o Lema 2.5, podemos escrever as seguintes desigualdades, uma vez que (3.16) e (3.18) são satisfeitas:

$$O_i \mathcal{E}_i(P)^{-1} O_i' \geq \text{Her}(O_i) - \mathcal{E}_i(P) > 0, \quad (3.21)$$

$$G_{il} \mathcal{E}_i(P)^{-1} G_{il}' \geq \Phi_{1il} = \text{Her}(G_{il}) - \mathcal{E}_i(P) > 0, \quad (3.22)$$

$$(V_{il}^{(2)} X_\ell) Z_{il}^{(2)-1} (V_{il}^{(2)} X_\ell)' \geq \text{Her}(V_{il}^{(2)} X_\ell) - Z_{il}^{(2)} > 0. \quad (3.23)$$

Assim, empregando (3.21), (3.22) e (3.23), temos que (3.16) e (3.18) implicam, respectivamente, em

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ O_i J_i^{(2)} & O_i \mathcal{E}_i(P)^{-1} O_i' & \bullet \\ E_i^{(2)} & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} R_{il} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ G_{il} A_i + T_{il}^{(2)} Y_\ell & G_{il} \mathcal{E}_i(P)^{-1} G_{il}' & \bullet & \bullet & \bullet \\ C_i^{(2)} + U_{il}^{(2)} Y_\ell & 0 & I_{q_2} & \bullet & \bullet \\ 0 & \Phi_{2il} & \Phi_{3il} & Z_{il}^{(2)} & \bullet \\ V_{il}^{(2)} Y_\ell & 0 & 0 & 0 & (V_{il}^{(2)} X_\ell) Z_{il}^{(2)-1} (V_{il}^{(2)} X_\ell)' \end{bmatrix} > 0. \quad (3.25)$$

A partir de (3.21) temos que  $O_i$  é não singular. Desse modo, aplicando a transformação de congruência  $\text{diag}(I_{r_2}, O_i^{-1}, I_{q_2})$  em (3.24) obtemos (2.9). Por outro lado, temos a partir de (3.23) que  $V_{il}^{(2)}$  e  $X_\ell$  são não singulares. Logo, aplicando a transformação de congruência  $\text{diag}(I_n, I_n, I_{q_2}, I_{n_u}, X_\ell^{-1} V_{il}^{(2)-1})$  em (3.25), e na sequência o complemento de Schur na desigualdade resultante, podemos reescrever o resultado como

$$\mathcal{L}_{il} - \mathcal{M}_{il} Z_{il}^{(2)-1} \mathcal{M}_{il}' - \mathcal{N}_\ell' Z_{il}^{(2)} \mathcal{N}_\ell > 0, \quad (3.26)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{il} &= \begin{bmatrix} R_{il} & \bullet & \bullet \\ G_{il} A_i + T_{il}^{(2)} Y_\ell & G_{il} \mathcal{E}_i(P)^{-1} G_{il}' & \bullet \\ C_i^{(2)} + U_{il}^{(2)} Y_\ell & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M}_{il} &= \begin{bmatrix} 0 \\ T_{il}^{(2)} X_\ell - G_{il} B_i \\ U_{il}^{(2)} X_\ell - D_i^{(2)} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{N}_\ell &= \begin{bmatrix} X_\ell^{-1} Y_\ell & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Logo, pelo Lema 2.5 temos que (3.26) implica em

$$\mathcal{L}_{i\ell} - \text{Her}(\mathcal{M}_{i\ell}\mathcal{N}_\ell) > 0. \quad (3.27)$$

Definindo  $K_\ell = X_\ell^{-1}Y_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , podemos escrever que

$$G_{i\ell}A_{i\ell} = G_{i\ell}(A_i + B_iK_\ell) = G_{i\ell}A_i + T_{i\ell}^{(2)}Y_\ell - (T_{i\ell}^{(2)}X_\ell - G_{i\ell}B_i)X_\ell^{-1}Y_\ell, \quad (3.28)$$

$$C_{i\ell}^{(2)} = C_i^{(2)} + D_i^{(2)}K_\ell = C_i^{(2)} + U_{i\ell}^{(2)}Y_\ell - (U_{i\ell}^{(2)}X_\ell - D_i^{(2)})X_\ell^{-1}Y_\ell, \quad (3.29)$$

onde as matrizes  $A_{i\ell}$  e  $C_{i\ell}^{(2)}$  são dadas por (3.4) e (3.5), respectivamente. Assim, a partir de (3.28) e (3.29), (3.27) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} R_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ G_{i\ell}A_{i\ell} & G_{i\ell}\mathcal{E}_i(P)^{-1}G_{i\ell}' & \bullet \\ C_{i\ell}^{(2)} & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.30)$$

Logo, aplicando a transformação de congruência  $\mathbf{diag}(I_n, G_{i\ell}^{-1}, I_{q_2})$  em (3.30) obtemos (2.11). Portanto, temos que (3.15)-(3.18) implicam (2.8)-(2.11), e assim, de acordo com o Corolário 2.1, temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_2 < \zeta_2^{1/2}$ .  $\square$

Com o objetivo de enriquecer os exemplos numéricos quando compararmos as condições propostas com os métodos existentes na literatura, apresentamos a proposição a seguir, a qual é uma extensão do Teorema 16(I) de Todorov, Fragoso e Costa (2018) para o caso de controle  $\mathcal{H}_2$ .

**Proposição 3.1.** *Dado  $\gamma_2 > 0$ , se existirem matrizes  $Y \in \mathbb{H}_N^{n++}$ ,  $W \in \mathbb{H}_N^{r_2++}$ ,  $M \in \mathbb{W}^{n++}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^n$  e  $L \in \mathbb{H}_M^{n,n_u}$ , tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas,*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \text{Tr}(W_i) < \gamma_2^2, \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ J_i^{(2)} & Z + Z' - \mathcal{E}_i(Y) & \bullet \\ E_i^{(2)} & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.32)$$

$$Y_i > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} M_{i\ell}, \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} M_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ A_i Z + B_i L_\ell & Z + Z' - \mathcal{E}_i(Y) & \bullet \\ C_i^{(2)} Z + D_i^{(2)} L_\ell & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.34)$$

então, definindo os ganhos do controlador (3.2) como  $K_\ell = L_\ell Z^{-1}$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_2 < \gamma_2$ .

*Prova.* É suficiente mostrarmos que (3.31)-(3.34) implicam (2.8)-(2.11). Desse modo, assumamos que (3.31)-(3.34) sejam válidas. Inicialmente notamos que (3.31) é equivalente a (2.8). A partir de (3.32) e (3.34), temos que  $Z + Z' - \mathcal{E}_i(Y) > 0$ , de modo que  $Z$  é não singular e, pelo Lema 2.5,

$$Z\mathcal{E}_i(Y)^{-1}Z' \geq Z + Z' - \mathcal{E}_i(Y) > 0, \quad (3.35)$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Multiplicando (3.33) à esquerda e à direita por  $(Z^{-1})'$  e  $Z^{-1}$ , respectivamente, e fazendo

$$P_i = (Z^{-1})'Y_iZ^{-1} \quad (3.36)$$

e

$$R_{i\ell} = (Z^{-1})'M_{i\ell}Z^{-1}, \quad (3.37)$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ , obtemos (2.10). Ademais, dado (3.36) obtemos

$$\mathcal{E}_i(P)^{-1} = Z\mathcal{E}_i(Y)^{-1}Z', \quad (3.38)$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, a partir de (3.35) temos que (3.32) e (3.34) implicam em

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ J_i^{(2)} & Z\mathcal{E}_i(Y)^{-1}Z' & \bullet \\ E_i^{(2)} & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} M_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ A_iZ + B_iL_\ell & Z\mathcal{E}_i(Y)^{-1}Z' & \bullet \\ C_i^{(2)}Z + D_i^{(2)}L_\ell & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.40)$$

Substituindo (3.38) em (3.39), obtemos (2.9). Aplicando a transformação de congruência  $\mathbf{diag}((Z^{-1})', I_n, I_{q_2})$  em (3.40) e fazendo  $K_\ell = L_\ell Z^{-1}$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , obtemos (2.11) a partir de (3.37), (3.38) e (3.40). Portanto, temos que (3.31)-(3.34) implicam (2.8)-(2.11), e assim, de acordo com o Corolário 2.1, temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_2 < \gamma_2$ .  $\square$

### 3.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção, tratamos o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Para isso, consideramos as seguintes desigualdades, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ ,

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ 0 & \zeta_\infty I_{r_\infty} \end{bmatrix} > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} \begin{bmatrix} M_{i\ell}^{(\infty)} & \bullet \\ N_{i\ell}^{(\infty)} & S_{i\ell}^{(\infty)} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} M_{il}^{(\infty)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{il}^{(\infty)} & S_{il}^{(\infty)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ F_{il}A_i + T_{il}^{(\infty)}Y_\ell & F_{il}J_i^{(\infty)} & \Psi_{1il} & \bullet & \bullet & \bullet \\ C_i^{(\infty)} + U_{il}^{(\infty)}Y_\ell & E_i^{(\infty)} & 0 & I_{q_\infty} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \Psi_{2il} & \Psi_{3il} & Z_{il}^{(\infty)} & \bullet \\ V_{il}^{(\infty)}Y_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Her}(V_{il}^{(\infty)}X_\ell) - Z_{il}^{(\infty)} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.42)$$

onde

$$\Psi_{1il} \triangleq \text{Her}(F_{il}) - \mathcal{E}_i(Q),$$

$$\Psi_{2il} \triangleq (T_{il}^{(\infty)}X_\ell - F_{il}B_i)',$$

$$\Psi_{3il} \triangleq (U_{il}^{(\infty)}X_\ell - D_i^{(\infty)})',$$

e  $\mathcal{E}(\cdot)$  é dado por (2.2).

Adotando uma abordagem semelhante à seção anterior, definimos o conjunto de variáveis  $\xi_\infty$  de (3.41)-(3.42) como

$$\xi_\infty \triangleq (Q, M^{(\infty)}, N^{(\infty)}, S^{(\infty)}, F, T^{(\infty)}, U^{(\infty)}, V^{(\infty)}, Z^{(\infty)}, X, Y, \zeta_\infty), \quad (3.43)$$

onde  $Q \in \mathbb{H}_N^{n++}$ ,  $M^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{n++}$ ,  $N^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{n,r_\infty}$ ,  $S^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{r_\infty++}$ ,  $F \in \mathbb{W}^n$ ,  $T^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{n_u, n}$ ,  $U^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{n_u, q_\infty}$ ,  $V^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{n_u}$ ,  $Z^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{n_u++}$ ,  $X \in \mathbb{H}_M^{n_u}$ ,  $Y \in \mathbb{H}_M^{n, n_u}$  e  $\zeta_\infty \in \mathbb{R}^{++}$ . Desse modo, definimos o conjunto de todas as soluções possíveis de (3.41)-(3.42) como

$$\Xi_\infty \triangleq \{\xi_\infty : (3.41)-(3.42) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (3.44)$$

O próximo teorema propõe uma condição suficiente para a síntese de um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  com custo garantido  $\zeta_\infty^{1/2}$  para o sistema (3.3).

**Teorema 3.2.** *Se existir um  $\xi_\infty \in \Xi_\infty$ , então definindo os ganhos do controlador (3.2) como  $K_\ell = X_\ell^{-1}Y_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \zeta_\infty^{1/2}$ .*

*Prova.* De modo similar à prova do Teorema 3.1, devemos demonstrar que (3.41)-(3.42) implicam (2.12)-(2.13). Assim, considere que (3.41)-(3.42) sejam satisfeitas. Inicialmente, podemos notar que (3.41) e (2.12) são equivalentes ao definirmos  $\zeta_\infty = \gamma_\infty^2$ , de modo que necessitamos apenas demonstrar que (3.42) implica (2.13). Por hipótese, temos que  $Q > 0$ , de modo que  $\mathcal{E}_i(Q) > 0$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, lembrando que  $Z_{il}^{(\infty)} > 0$  (por hipótese) e, portanto, não singular, aplicamos o Lema 2.5 e escrevemos as seguintes desigualdades, dado que (3.42) é satisfeita:

$$\tilde{\Psi}_{1il} \triangleq F_{il}\mathcal{E}_i(Q)^{-1}F_{il}' \geq \Psi_{1il} = \text{Her}(F_{il}) - \mathcal{E}_i(Q) > 0, \quad (3.45)$$

$$(V_{il}^{(\infty)}X_\ell)Z_{il}^{(\infty)-1}(V_{il}^{(\infty)}X_\ell)' \geq \text{Her}(V_{il}^{(\infty)}X_\ell) - Z_{il}^{(\infty)} > 0. \quad (3.46)$$

Consequentemente, a partir de (3.45) e (3.46) temos que (3.42) implica em

$$\begin{bmatrix} M_{il}^{(\infty)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{il}^{(\infty)} & S_{il}^{(\infty)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ F_{il}A_i + T_{il}^{(\infty)}Y_\ell & F_{il}J_i^{(\infty)} & \tilde{\Psi}_{1il} & \bullet & \bullet & \bullet \\ C_i^{(\infty)} + U_{il}^{(\infty)}Y_\ell & E_i^{(\infty)} & 0 & I_{q_\infty} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \Psi_{2il} & \Psi_{3il} & Z_{il}^{(\infty)} & \bullet \\ V_{il}^{(\infty)}Y_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & (V_{il}^{(\infty)}X_\ell)Z_{il}^{(\infty)-1}(V_{il}^{(\infty)}X_\ell)'\end{bmatrix} > 0. \quad (3.47)$$

A partir de (3.46) temos que  $V_{il}^{(\infty)}$  e  $X_\ell$  são não singulares. Assim, aplicando a transformação de congruência  $\mathbf{diag}(I_n, I_{r_\infty}, I_n, I_{q_\infty}, I_{n_u}, X_\ell^{-1}V_{il}^{(\infty)-1})$  em (3.47), e em seguida o complemento de Schur na desigualdade resultante, podemos reescrever o resultado como

$$\mathcal{Q}_{il} - \mathcal{R}_{il}Z_{il}^{(\infty)-1}\mathcal{R}_{il}' - \mathcal{S}_\ell'Z_{il}^{(\infty)}\mathcal{S}_\ell > 0, \quad (3.48)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{il} &= \begin{bmatrix} M_{il}^{(\infty)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{il}^{(\infty)} & S_{il}^{(\infty)} & \bullet & \bullet \\ F_{il}A_i + T_{il}^{(\infty)}Y_\ell & F_{il}J_i^{(\infty)} & F_{il}\mathcal{E}_i(Q)^{-1}F_{il}' & \bullet \\ C_i^{(\infty)} + U_{il}^{(\infty)}Y_\ell & E_i^{(\infty)} & 0 & I_{q_\infty} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{R}_{il} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{il}^{(\infty)}X_\ell - F_{il}B_i \\ U_{il}^{(\infty)}X_\ell - D_i^{(\infty)} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{S}_\ell &= \begin{bmatrix} X_\ell^{-1}Y_\ell & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.5 temos que (3.48) implica em

$$\mathcal{Q}_{il} - \text{Her}(\mathcal{R}_{il}\mathcal{S}_\ell) > 0. \quad (3.49)$$

Definindo  $K_\ell = X_\ell^{-1}Y_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , podemos escrever que

$$F_{il}A_{il} = F_{il}(A_i + B_iK_\ell) = F_{il}A_i + T_{il}^{(\infty)}Y_\ell - (T_{il}^{(\infty)}X_\ell - F_{il}B_i)X_\ell^{-1}Y_\ell, \quad (3.50)$$

$$C_{il}^{(\infty)} = C_i^{(\infty)} + D_i^{(\infty)}K_\ell = C_i^{(\infty)} + U_{il}^{(\infty)}Y_\ell - (U_{il}^{(\infty)}X_\ell - D_i^{(\infty)})X_\ell^{-1}Y_\ell, \quad (3.51)$$

onde as matrizes  $A_{il}$  e  $C_{il}^{(\infty)}$  são dadas por (3.4) e (3.6), respectivamente. Assim, a partir de (3.50) e (3.51), (3.49) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} M_{il}^{(\infty)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{il}^{(\infty)} & S_{il}^{(\infty)} & \bullet & \bullet \\ F_{il}A_{il} & F_{il}J_i^{(\infty)} & F_{il}\mathcal{E}_i(Q)^{-1}F_{il}' & \bullet \\ C_{il}^{(\infty)} & E_i^{(\infty)} & 0 & I_{q_\infty} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.52)$$

Logo, aplicando a transformação de congruência  $\mathbf{diag}(I_n, I_{r_\infty}, F_{il}^{-1}, I_{q_\infty})$  em (3.52) obtemos (2.13). Portanto, temos que (3.41)-(3.42) implicam (2.12)-(2.13), e assim, de acordo com o Lema 2.3, temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \zeta_\infty^{1/2}$ .  $\square$

### 3.4 Controle $\ell_2$ - $\ell_\infty$

Nesta seção, abordamos o problema de controle  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  e introduzimos as seguintes desigualdades, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ ,

$$\begin{bmatrix} L_i & \bullet \\ 0 & \zeta_e I_{r_e} \end{bmatrix} > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} \begin{bmatrix} M_{1i\ell}^{(e)} & \bullet \\ N_{1i\ell}^{(e)} & S_{1i\ell}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} M_{1i\ell}^{(e)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{1i\ell}^{(e)} & S_{1i\ell}^{(e)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ H_{i\ell} A_i + T_{i\ell}^{(e)} Y_\ell & H_{i\ell} J_i^{(e)} & \text{Her}(H_{i\ell}) - \mathcal{E}_i(L) & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & (T_{i\ell}^{(e)} X_\ell - H_{i\ell} B_i)' & Z_{1i\ell}^{(e)} & \bullet \\ V_{1i\ell}^{(e)} Y_\ell & 0 & 0 & 0 & \text{Her}(V_{1i\ell}^{(e)} X_\ell) - Z_{1i\ell}^{(e)} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} L_i & \bullet \\ 0 & \zeta_e I_{r_e} \end{bmatrix} > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} \begin{bmatrix} M_{2i\ell}^{(e)} & \bullet \\ N_{2i\ell}^{(e)} & S_{2i\ell}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} M_{2i\ell}^{(e)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{2i\ell}^{(e)} & S_{2i\ell}^{(e)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ C_i^{(e)} + U_{i\ell}^{(e)} Y_\ell & E_i^{(e)} & I_{q_e} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & (U_{i\ell}^{(e)} X_\ell - D_i^{(e)})' & Z_{2i\ell}^{(e)} & \bullet \\ V_{2i\ell}^{(e)} Y_\ell & 0 & 0 & 0 & \text{Her}(V_{2i\ell}^{(e)} X_\ell) - Z_{2i\ell}^{(e)} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.56)$$

onde  $\mathcal{E}(\cdot)$  é dado por (2.2).

O conjunto de variáveis  $\xi_e$  de (3.53)-(3.56) é definido por

$$\begin{aligned} \xi_e \triangleq & (L, M_1^{(e)}, N_1^{(e)}, S_1^{(e)}, M_2^{(e)}, N_2^{(e)}, S_2^{(e)}, \\ & H, T^{(e)}, U^{(e)}, V_1^{(e)}, V_2^{(e)}, Z_1^{(e)}, Z_2^{(e)}, X, Y, \zeta_e), \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde  $L \in \mathbb{H}_N^{n++}$ ,  $M_1^{(e)} \in \mathbb{W}^{n++}$ ,  $N_1^{(e)} \in \mathbb{W}^{n, r_e}$ ,  $S_1^{(e)} \in \mathbb{W}^{r_e++}$ ,  $M_2^{(e)} \in \mathbb{W}^{n++}$ ,  $N_2^{(e)} \in \mathbb{W}^{n, r_e}$ ,  $S_2^{(e)} \in \mathbb{W}^{r_e++}$ ,  $H \in \mathbb{W}^n$ ,  $T^{(e)} \in \mathbb{W}^{n_u, n}$ ,  $U^{(e)} \in \mathbb{W}^{n_u, q_e}$ ,  $V_1^{(e)} \in \mathbb{W}^{n_u}$ ,  $V_2^{(e)} \in \mathbb{W}^{n_u}$ ,  $Z_1^{(e)} \in \mathbb{W}^{n_u++}$ ,  $Z_2^{(e)} \in \mathbb{W}^{n_u++}$ ,  $X \in \mathbb{H}_M^{n_u}$ ,  $Y \in \mathbb{H}_M^{n_u}$  e  $\zeta_e \in \mathbb{R}^{++}$ . Assim, podemos definir o conjunto de todas as soluções possíveis de (3.53)-(3.56) por

$$\Xi_e \triangleq \{\xi_e : (3.53)-(3.56) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (3.58)$$

O teorema proposto a seguir estabelece uma condição suficiente para a síntese de um controlador que limita o índice  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  do sistema (3.3) a  $\zeta_e^{1/2}$ .

**Teorema 3.3.** *Se existir um  $\xi_e \in \Xi_e$ , então definindo os ganhos do controlador (3.2) como  $K_\ell = X_\ell^{-1}Y_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|z_e\|_\infty < \zeta_e^{1/2}\|w_e\|_2$ .*

*Prova.* É suficiente demonstrarmos que (3.53)-(3.56) implicam (2.14)-(2.15). Assim, assumamos que (3.53)-(3.56) sejam satisfeitas. Por hipótese, temos que  $L > 0$ , de modo que  $\mathcal{E}_i(L) > 0$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, lembrando que  $Z_1^{(e)} > 0$  e  $Z_2^{(e)} > 0$  (por hipótese) e, portanto, não singulares, podemos aplicar o Lema 2.5 e escrevermos as seguintes desigualdades, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ , dado que (3.54) e (3.56) são satisfeitas:

$$H_{i\ell}\mathcal{E}_i(L)^{-1}H'_{i\ell} \geq \text{Her}(H_{i\ell}) - \mathcal{E}_i(L) > 0, \quad (3.59)$$

$$(V_{1i\ell}^{(e)}X_\ell)Z_{1i\ell}^{(e)-1}(V_{1i\ell}^{(e)}X_\ell)' \geq \text{Her}(V_{1i\ell}^{(e)}X_\ell) - Z_{1i\ell}^{(e)} > 0, \quad (3.60)$$

$$(V_{2i\ell}^{(e)}X_\ell)Z_{2i\ell}^{(e)-1}(V_{2i\ell}^{(e)}X_\ell)' \geq \text{Her}(V_{2i\ell}^{(e)}X_\ell) - Z_{2i\ell}^{(e)} > 0. \quad (3.61)$$

Logo, a partir de (3.59), (3.60) e (3.61) temos que (3.54) e (3.56) implicam em

$$\begin{bmatrix} M_{1i\ell}^{(e)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{1i\ell}^{(e)} & S_{1i\ell}^{(e)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ H_{i\ell}A_i + T_{i\ell}^{(e)}Y_\ell & H_{i\ell}J_i^{(e)} & H_{i\ell}\mathcal{E}_i(L)^{-1}H'_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & (T_{i\ell}^{(e)}X_\ell - H_{i\ell}B_i)' & Z_{1i\ell}^{(e)} & \bullet \\ V_{1i\ell}^{(e)}Y_\ell & 0 & 0 & 0 & (V_{1i\ell}^{(e)}X_\ell)Z_{1i\ell}^{(e)-1}(V_{1i\ell}^{(e)}X_\ell)' \end{bmatrix} > 0, \quad (3.62)$$

$$\begin{bmatrix} M_{2i\ell}^{(e)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ N_{2i\ell}^{(e)} & S_{2i\ell}^{(e)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ C_i^{(e)} + U_{i\ell}^{(e)}Y_\ell & E_i^{(e)} & I_{q_e} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & (U_{i\ell}^{(e)}X_\ell - D_i^{(e)})' & Z_{2i\ell}^{(e)} & \bullet \\ V_{2i\ell}^{(e)}Y_\ell & 0 & 0 & 0 & (V_{2i\ell}^{(e)}X_\ell)Z_{2i\ell}^{(e)-1}(V_{2i\ell}^{(e)}X_\ell)' \end{bmatrix} > 0. \quad (3.63)$$

Adicionalmente, (3.60) e (3.61) implicam que  $V_{1i\ell}^{(e)}$ ,  $V_{2i\ell}^{(e)}$  e  $X_\ell$  são não singulares. Assim, aplicando as transformações de congruência  $\text{diag}(I_n, I_{r_e}, I_n, I_{n_u}, X_\ell^{-1}V_{1i\ell}^{(e)-1})$  e  $\text{diag}(I_n, I_{r_e}, I_{q_e}, I_{n_u}, X_\ell^{-1}V_{2i\ell}^{(e)-1})$  em (3.62) e (3.63), respectivamente, e em seguida o complemento de Schur nas desigualdades resultantes, podemos reescrever os resultados, respectivamente, como

$$\mathcal{T}_{i\ell} - \mathcal{U}_{i\ell}Z_{1i\ell}^{(e)-1}\mathcal{U}'_{i\ell} - \mathcal{W}'_\ell Z_{1i\ell}^{(e)}\mathcal{W}_\ell > 0, \quad (3.64)$$

e

$$\mathcal{X}_{i\ell} - \mathcal{Y}_{i\ell}Z_{2i\ell}^{(e)-1}\mathcal{Y}'_{i\ell} - \mathcal{W}'_\ell Z_{2i\ell}^{(e)}\mathcal{W}_\ell > 0, \quad (3.65)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{il} &= \begin{bmatrix} M_{1il}^{(e)} & \bullet & \bullet \\ N_{1il}^{(e)} & S_{1il}^{(e)} & \bullet \\ H_{il}A_i + T_{il}^{(e)}Y_\ell & H_{il}J_i^{(e)} & H_{il}\mathcal{E}_i(L)^{-1}H'_{il} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{U}_{il} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{il}^{(e)}X_\ell - H_{il}B_i \end{bmatrix}, \\ \mathcal{W}_\ell &= [X_\ell^{-1}Y_\ell \ 0 \ 0 \ 0], \\ \mathcal{X}_{il} &= \begin{bmatrix} M_{2il}^{(e)} & \bullet & \bullet \\ N_{2il}^{(e)} & S_{2il}^{(e)} & \bullet \\ C_i^{(e)} + U_{il}^{(e)}Y_\ell & E_i^{(e)} & I_{q_e} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Y}_{il} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{il}^{(e)}X_\ell - D_i^{(e)} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.5, temos que (3.64) e (3.65) implicam, respectivamente, em

$$\mathcal{T}_{il} - \text{Her}(\mathcal{U}_{il}\mathcal{W}_\ell) > 0 \quad (3.66)$$

e

$$\mathcal{X}_{il} - \text{Her}(\mathcal{Y}_{il}\mathcal{W}_\ell) > 0. \quad (3.67)$$

Por outro lado, definindo  $K_\ell = X_\ell^{-1}Y_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , podemos escrever que

$$H_{il}A_{il} = H_{il}(A_i + B_iK_\ell) = H_{il}A_i + T_{il}^{(e)}Y_\ell - (T_{il}^{(e)}X_\ell - H_{il}B_i)X_\ell^{-1}Y_\ell, \quad (3.68)$$

$$C_{il}^{(e)} = C_i^{(e)} + D_i^{(e)}K_\ell = C_i^{(e)} + U_{il}^{(e)}Y_\ell - (U_{il}^{(e)}X_\ell - D_i^{(e)})X_\ell^{-1}Y_\ell, \quad (3.69)$$

onde as matrizes  $A_{il}$  e  $C_{il}^{(e)}$  são dadas por (3.4) e (3.7), respectivamente. Desse modo, a partir de (3.68) e (3.69), podemos reescrever (3.66) e (3.67), respectivamente, como

$$\begin{bmatrix} M_{1il}^{(e)} & \bullet & \bullet \\ N_{1il}^{(e)} & S_{1il}^{(e)} & \bullet \\ H_{il}A_{il} & H_{il}J_i^{(e)} & H_{il}\mathcal{E}_i(L)^{-1}H'_{il} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.70)$$

$$\begin{bmatrix} M_{2il}^{(e)} & \bullet & \bullet \\ N_{2il}^{(e)} & S_{2il}^{(e)} & \bullet \\ C_{il}^{(e)} & E_i^{(e)} & I_{q_e} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.71)$$

Fazendo  $\zeta_e = \gamma_e^2$  e aplicando o complemento de Schur em (3.71), temos que a desigualdade resultante combinada com (3.55) implicam em (2.15). Por fim, aplicando a transformação de congruência  $\mathbf{diag}(I_n, I_{r_e}, H_{i\ell}^{-1})$  em (3.70) e em seguida o complemento de Schur, temos que o resultado obtido combinado com (3.53) implica em (2.14). Portanto, temos que (3.53)-(3.56) implicam (2.14)-(2.15), e assim, de acordo com o Lema 2.4, temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|z_e\|_\infty < \zeta_e^{1/2} \|w_e\|_2$ .  $\square$

### 3.5 Controle multiobjetivo

Considerando os resultados obtidos para o controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ , notamos que as variáveis  $X$  e  $Y$ , as quais compõem os ganhos do controlador, são elementos comuns aos conjuntos  $\xi_2$ ,  $\xi_\infty$  e  $\xi_e$ , como podemos verificar em (3.19), (3.43) e (3.57), respectivamente. Dessa forma, definimos o conjunto de todas as soluções conjuntas possíveis de (3.15)-(3.18), (3.41)-(3.42) e (3.53)-(3.56) como

$$\Xi_m \triangleq \{\xi_m : (3.15)-(3.18), (3.41)-(3.42) \text{ e } (3.53)-(3.56) \text{ sejam satisfeitas}\}, \quad (3.72)$$

onde  $\xi_m$  denota o conjunto de variáveis de (3.15)-(3.18), (3.41)-(3.42) e (3.53)-(3.56) tal que

$$\begin{aligned} \xi_m \triangleq & (P, W, R, G, O, Q, M^{(\infty)}, N^{(\infty)}, S^{(\infty)}, F, L, M_1^{(e)}, N_1^{(e)}, S_1^{(e)}, \\ & M_2^{(e)}, N_2^{(e)}, S_2^{(e)}, H, T^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)}, Z^{(2)}, Z^{(\infty)}, Z_1^{(e)}, Z_2^{(e)}, X, Y, \zeta_m), \end{aligned} \quad (3.73)$$

com  $\zeta_m = (\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e)$ ,  $T^{(m)} = (T^{(2)}, T^{(\infty)}, T^{(e)})$ ,  $U^{(m)} = (U^{(2)}, U^{(\infty)}, U^{(e)})$  e  $V^{(m)} = (V^{(2)}, V^{(\infty)}, V_1^{(e)}, V_2^{(e)})$ . Desse modo, podemos enunciar o seguinte teorema, no qual propomos uma condição suficiente para a síntese de um controlador multiobjetivo por realimentação de estados para o sistema (3.3).

**Teorema 3.4.** *Dados  $\delta_2$ ,  $\delta_\infty$  e  $\delta_e$ , se existir um  $\xi_m \in \Xi_m$ , então definindo os ganhos do controlador (3.2) como  $K_\ell = X_\ell^{-1} Y_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , temos que  $K \in \mathbb{K}$ , com  $\|\mathcal{G}_K\|_2 < \zeta_2^{1/2}$ ,  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \zeta_\infty^{1/2}$  e  $\|z_e\|_\infty < \zeta_e^{1/2} \|w_e\|_2$ .*

*Prova.* A prova é uma consequência direta dos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3.  $\square$

### 3.6 Algoritmo iterativo

As condições estabelecidas nos Teoremas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 são descritas por BMIs, o que conduz a problemas de otimização não convexos e de difícil resolução. No entanto, podemos observar que ao fixarmos o conjunto de variáveis  $(T^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)})$  em (3.18),



(3.42), (3.54) e (3.56), as desigualdades (3.15)-(3.18), (3.41)-(3.42) e (3.53)-(3.56) são reduzidas a LMIs, podendo ser tratadas por métodos numéricos bem estabelecidos. A mesma conclusão é válida ao fixarmos o conjunto de variáveis  $(X, Y)$ . Partindo desta observação, podemos escrever o seguinte problema de otimização convexa como uma aproximação para o problema (3.10):

$$\inf_{\xi_m \in \Xi_m(\mathcal{V})} \{f(\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e) : (3.15)-(3.18), (3.41)-(3.42) \text{ e } (3.53)-(3.56) \text{ sejam satisfeitas}\}, \quad (3.74)$$

onde  $\mathcal{V}$  representa o conjunto das variáveis em  $\xi_m$  que são assumidas como sendo fixas. Desse modo, a partir de (3.74), é possível tratar não apenas o *problema de controle multiobjetivo*, mas também casos particulares de controle, conforme descrito a seguir:

- (i) *Problema de controle  $\mathcal{H}_2$* :  $f(\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e) = \zeta_2$ ;
- (ii) *Problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$* :  $f(\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e) = \zeta_\infty$ ;
- (iii) *Problema de controle  $\ell_2$ - $\ell_\infty$* :  $f(\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e) = \zeta_e$ ; e
- (iv) *Problema de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$* :  $f(\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e) = \zeta_2$ , fixando-se  $\zeta_\infty$ .

Considerando o Teorema 3.4, assim como o problema de otimização apresentado em (3.74), propomos o *algoritmo iterativo* a seguir, o qual é baseado em um *algoritmo de descida coordenada*.

**Comentário 3.2.** *Os valores iniciais para as matrizes  $T$ ,  $U$  e  $V$ , requeridos pelo Algoritmo 3.1, devem ser especificados pelo usuário a fim de obter uma solução inicial factível para (3.74). Para este fim, propomos como seleção inicial destas matrizes para os casos individuais  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ , a seguinte escolha:*

$$T_{i\ell} = B_i, \quad U_{i\ell} = 0_{q \times n_u}, \quad V_{i\ell} = \beta I_{n_u},$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ , onde  $\beta > 0$  é um parâmetro escalar real a ser ajustado a fim de obter uma solução inicial factível para (3.74).

**Comentário 3.3.** *Na inicialização do Algoritmo 3.1, caso seja especificado um limitante superior  $\gamma_v$  referente a um determinado índice de desempenho, para  $v \in \{2, \infty, e\}$ , propomos que sejam utilizados como valores iniciais de  $(T^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)})$  os valores obtidos para a variável de saída  $\mathcal{F}^*$  após a aplicação do Algoritmo 3.1 para o caso individual correspondente ao referido índice.*

**Comentário 3.4.** *Na inicialização do Algoritmo 3.1, uma vez obtida uma solução inicial factível para (3.74), conforme a proposta do Comentário 3.2 ou 3.3, por exemplo, todas as demais soluções de (3.74) previstas nas etapas posteriores do algoritmo serão factíveis, sendo observado  $f^{(k)} \leq \bar{f}^{(k)} \leq f^{(k-1)}$  para  $k = 1, 2, \dots, n_k$ , caracterizando-se assim um*

---

**Algoritmo 3.1** Algoritmo para solução do problema de otimização (3.74).

---

**entradas:**  $\varepsilon$  (tolerância),  $k_{\max}$  (número máximo de iterações),  $(T^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)})$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$  (ver Comentários 3.2 e 3.3),  $\delta_2, \delta_\infty, \delta_e$ ;

**saídas:**  $\gamma_2^*, \gamma_\infty^*, \gamma_e^*$  (limitantes superiores mínimos),  $K_\ell$  para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ ,  $\mathcal{F}^*$ ,  $n_k$  (número de iterações);

- 1:  $\mathcal{F}^{(0)} \leftarrow (T^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)})$
  - 2: **resolva** (3.74) considerando  $\mathcal{V} = \mathcal{F}^{(0)}$ ;
  - 3:  $\mathcal{K}^{(0)} \leftarrow (X, Y)$ ;
  - 4:  $f^{(0)} \leftarrow f(\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e)$ ;
  - 5:  $k \leftarrow 0$ ;
  - 6: **repita**
  - 7:    $k \leftarrow k + 1$ ;
  - 8:   **resolva** (3.74) considerando  $\mathcal{V} = \mathcal{K}^{(k-1)}$ ;
  - 9:    $\mathcal{F}^{(k)} \leftarrow (T^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)})$ ;
  - 10:    $\bar{f}^{(k)} \leftarrow f(\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e)$ ;
  - 11:   **resolva** (3.74) considerando  $\mathcal{V} = \mathcal{F}^{(k)}$ ;
  - 12:    $\mathcal{K}^{(k)} \leftarrow (X, Y)$ ;
  - 13:    $f^{(k)} \leftarrow f(\zeta_2, \zeta_\infty, \zeta_e)$ ;
  - 14: **até que** ( $k = k_{\max}$ ) **ou** ( $|f^{(k)} - f^{(k-1)}| \leq \varepsilon$ )
  - 15: ( $\gamma_2^*, \gamma_\infty^*, \gamma_e^*$ )  $\leftarrow (\zeta_2^{1/2}, \zeta_\infty^{1/2}, \zeta_e^{1/2})$ ;
  - 16:  $K_\ell \leftarrow X_\ell^{-1} Y_\ell$  para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , onde  $\mathcal{K}^{(k)} = (X, Y)$ ;
  - 17:  $\mathcal{F}^* \leftarrow \mathcal{F}^{(k)}$ ;
  - 18:  $n_k \leftarrow k$ ;
  - 19: **retorne** ( $\gamma_2^*, \gamma_\infty^*, \gamma_e^*, K_\ell, \mathcal{F}^*, n_k$ );
- 

*algoritmo de descida coordenada. De fato, na hipótese de existir uma solução para (3.74) na Etapa 2 ( $k = 0$ ), então para  $k \geq 1$ , como a Etapa 8 fixa as variáveis  $(X, Y)$  com os valores obtidos na iteração  $k - 1$ , o problema (3.74) será factível com  $\bar{f}^{(k)} \leq f^{(k-1)}$ . Adicionalmente, na Etapa 11, fixando-se as variáveis  $(T, U, V)$  com os valores obtidos na Etapa 8, o problema (3.74) será factível com  $f^{(k)} \leq \bar{f}^{(k)}$ .*

### 3.7 Exemplos numéricos

Nesta seção, apresentamos exemplos numéricos para ilustrar a eficácia da abordagem proposta. No Exemplo 3.1, abordamos o projeto de controladores  $\mathcal{H}_2$  por realimentação de estados, comparando os resultados obtidos com a Proposição 3.1 e os métodos apresentados em Costa, Fragoso e Todorov (2015) e de Oliveira e Costa (2018a). No Exemplo 3.2, tratamos um problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  e também realizamos um comparativo entre a abordagem proposta e os métodos em de Oliveira e Costa (2018a) e Todorov, Fragoso e Costa (2018). No Exemplo 3.3, examinamos o projeto de um controlador  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  e o validamos por meio de uma simulação de Monte Carlo. Por fim, no Exemplo 3.4 investigamos um problema de controle multiobjetivo, abordando simultaneamente os

índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2$ – $\ell_\infty$ . Todas as simulações numéricas foram realizadas em MATLAB (R2024b), utilizando os pacotes computacionais YALMIP (Löfberg, 2004) e Mosek (Andersen; Andersen, 2000). O computador utilizado possui um processador Intel® Core™ i5-1135 (2.4 GHz), 8 GB de RAM, com sistema operacional Windows 11.

**Exemplo 3.1.** *Este exemplo, adaptado de Todorov e Fragoso (2016b), aborda o controle  $\mathcal{H}_2$  de um motor CC modelado em Oliveira et al. (2014) através de um MJLS. As matrizes do sistema, retiradas de Oliveira et al. (2014), são dadas por*

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.4799 & 5.1546 & 0 \\ -3.8162 & 14.4723 & 0 \\ 0.1399 & 0 & -0.9255 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.6026 & 9.1632 & 0 \\ -0.5918 & 3.0317 & 0 \\ 0.0740 & 0 & -0.4338 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.6346 & 0.9178 & 0 \\ -0.5056 & 2.4811 & 0 \\ 0.3865 & 0 & 0.0982 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 5.8705 \\ 15.5010 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 10.2851 \\ 2.2282 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.7874 \\ 1.5302 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ J_1 &= J_2 = J_3 = 0.1I_3, \quad E_1 = E_2 = E_3 = 0_{5 \times 3}, \\ C_1 &= C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad D_1 = D_2 = D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}'. \end{aligned}$$

A matriz de probabilidades de transição  $\mathcal{P}$  é definida como

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.84 & 0.07 & 0.09 \\ 0.24 & 0.75 & 0.01 \\ 0.11 & 0.08 & 0.81 \end{bmatrix}$$

e consideramos a distribuição inicial como estacionária, ou seja,  $\mu = [0.5166 \ 0.2268 \ 0.2566]$ .

A matriz de probabilidades de detecção  $\Upsilon$  é dada por

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

A abordagem proposta é comparada com a Proposição 3.1, o método disponível em Costa, Fragoso e Todorov (2015) e o Lema 1 em de Oliveira e Costa (2018a). O Algoritmo 3.1 é inicializado considerando o Comentário 3.2, de modo a adotarmos  $\beta = 0.01$ . Para as simulações, consideramos a tolerância  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  e o número máximo de interações  $k_{\max} = 100$ . Os valores obtidos de custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ), norma real ( $\|\mathcal{G}_K\|_2$ ) e número de iterações ( $n_k$ ) são mostrados na Tabela 1. Podemos observar na Tabela 1 que a abordagem proposta superou os métodos em Costa, Fragoso e Todorov (2015) e de Oliveira e Costa (2018a), produzindo um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  menos conservador.

Tabela 1 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ), norma real ( $\|\mathcal{G}_K\|_2$ ) e número de iterações ( $n_k$ ) para o caso de controle  $\mathcal{H}_2$  por realimentação de estados do Exemplo 3.1 usando Costa, Fragoso e Todorov (2015), Lema 1 em de Oliveira e Costa (2018a), Proposição 3.1 e Algoritmo 3.1.

| Método                                 | $\gamma_2^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _2$ | $n_k$ |
|----------------------------------------|--------------|-----------------------|-------|
| Lema 1 em de Oliveira e Costa (2018a)  | 1.1111       | 0.7247                | -     |
| Costa, Fragoso e Todorov (2015)        | 0.8056       | 0.6573                | -     |
| Proposição 3.1                         | 0.7252       | 0.6546                | -     |
| Algoritmo 3.1 <sub>(v=2, β=0.01)</sub> | 0.6452       | 0.6452                | 3     |

Fonte: Autor.

**Exemplo 3.2.** *O exemplo utilizado foi adaptado de Todorov, Fragoso e Costa (2018), o qual consiste de um modelo dinâmico discretizado de um avião não-tripulado em vôo estável sujeito a falhas. As entradas de controle são os comandos do “aileron” e do leme, e os estados representam pequenas perturbações na taxa de rolamento, taxa de guinada, ângulo de derrapagem e ângulo de rolamento da aeronave. Considera-se que as entradas de controle da aeronave estão sujeitas a falhas cuja ocorrência é modelada por uma cadeia de Markov, a qual comuta entre três modos de operação, ou seja,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ . Para o modo de operação nominal  $\theta(k) = 1$ , considera-se que o veículo não apresenta falhas e as matrizes nominais do sistema são dadas por*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5637 & 0.1133 & -0.6607 & -0.0062 \\ 0.0198 & 0.8368 & 1.0512 & 0.0089 \\ 0.0033 & -0.0450 & 0.9481 & 0.0159 \\ 0.0381 & 0.0073 & -0.0164 & 0.9999 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2.9735 & -0.0618 \\ -0.1175 & 0.6414 \\ 0.0112 & -0.0165 \\ 0.0812 & -0.0006 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para os modos de operação  $\theta(k) = 2$  e  $\theta(k) = 3$ , a aeronave encontra-se em um estado de falha, de modo que esta só é detectada quando  $\theta(k) = 3$ . Adicionalmente, para estes dois modos de operação, as matrizes do sistema são dadas por  $A_i = A_1$ ,  $B_i = 0.1B_1$  e  $J_i = J_1$ , para  $i \in \{2, 3\}$ , ou seja, a falha nas entradas de controle são caracterizadas por uma redução repentina na efetividade dos atuadores. As matrizes de probabilidades de transição  $\mathcal{P}$  e de detecção  $\Upsilon$  são dadas por

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \rho & 1 - \rho & 0 \\ 1 - \rho & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde o parâmetro  $0 \leq \rho \leq 1$  indica a probabilidade de uma detecção correta dos modos  $\theta(k) = 1$  e  $\theta(k) = 2$ . Notamos que para  $\rho = 0.5$  temos o pior caso possível, isto é, dada uma observação  $\hat{\theta}(k) \in \{1, 2\}$ , os eventos  $\theta(k) = 1$  (sem falha) e  $\theta(k) = 2$  (com falha) são igualmente prováveis.

Para o objetivo de controle, além da garantia de estabilidade, desejamos minimizar o efeito das perturbações da taxa de guinada sobre a saída de controle  $z(k)$  dada por

$$z(k) = x_2(k) + 10^{1-\theta(k)}u_1(k) + 0.1w(k),$$

onde  $x_2(k)$  é a taxa de guinada e  $u_1(k)$  é a deflexão do “aileron”. Desse modo, as matrizes para a saída controlada podem ser escritas como

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} 10^{1-i} & 0 \end{bmatrix}, \quad E_i = 0.1,$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Neste contexto, para o pior cenário de detecção ( $\rho = 0.5$ ), a abordagem proposta é comparada com o Lema 2 em de Oliveira e Costa (2018a) e o método disponível em Todorov, Fragoso e Costa (2018). Para a inicialização do Algoritmo 3.1, considerando o Comentário 3.2, adotamos  $\beta = 0.001$  e, para as simulações, consideramos a tolerância  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  e o número máximo de interações  $k_{max} = 100$ . Os valores obtidos de custo garantido mínimo ( $\gamma_\infty^*$ ) e norma real ( $\|\mathcal{G}_K\|_\infty$ ), assim como o número de iterações ( $n_k$ ) para o Algoritmo 3.1, são apresentados na Tabela 2. Analisando os valores da Tabela 2, temos que a abordagem proposta forneceu resultados menos conservadores em relação ao Lema 2 em de Oliveira e Costa (2018a) e ao método em Todorov, Fragoso e Costa (2018).

Tabela 2 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_\infty^*$ ), norma real ( $\|\mathcal{G}_K\|_\infty$ ) e número de iterações ( $n_k$ ) para o caso de controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estados do Exemplo 3.2 usando Lema 2 em de Oliveira e Costa (2018a), Todorov, Fragoso e Costa (2018) e Algoritmo 3.1.

| Método                                        | $\gamma_\infty^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ | $n_k$ |
|-----------------------------------------------|-------------------|----------------------------|-------|
| Lema 2 em de Oliveira e Costa (2018a)         | 2.3062            | 2.0283                     | -     |
| Todorov, Fragoso e Costa (2018)               | 2.0739            | 1.9580                     | -     |
| Algoritmo 3.1 ( $v = \infty, \beta = 0.001$ ) | 1.7306            | 1.7306                     | 31    |

Fonte: Autor.

**Exemplo 3.3.** Neste exemplo, adaptado do Exemplo 5.1 em de Oliveira e Costa (2018a), considera-se o modelo de um receptor termossolar representado por um MJLS com dois modos de operação,  $\mathbb{N} = \{1, 2\}$ . As matrizes do sistema e de saída são dadas por

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & J_1 \\ A_2 & B_2 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8353 & 0.0915 & 1 \\ 0.9646 & 0.0982 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C_i \mid D_i \mid E_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ . As matrizes de probabilidades de transição  $\mathcal{P}$  e de detecção  $\Upsilon$  são dadas por

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.9767 & 0.0233 \\ 0.0435 & 0.9565 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

O objetivo consiste em projetar um controlador que minimize o ganho  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$  do sistema em malha fechada. Adotando  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ ,  $k_{\max} = 100$  e  $\beta = 0.001$  na aplicação do Algoritmo 3.1, obtêm-se os seguintes ganhos para o controlador:

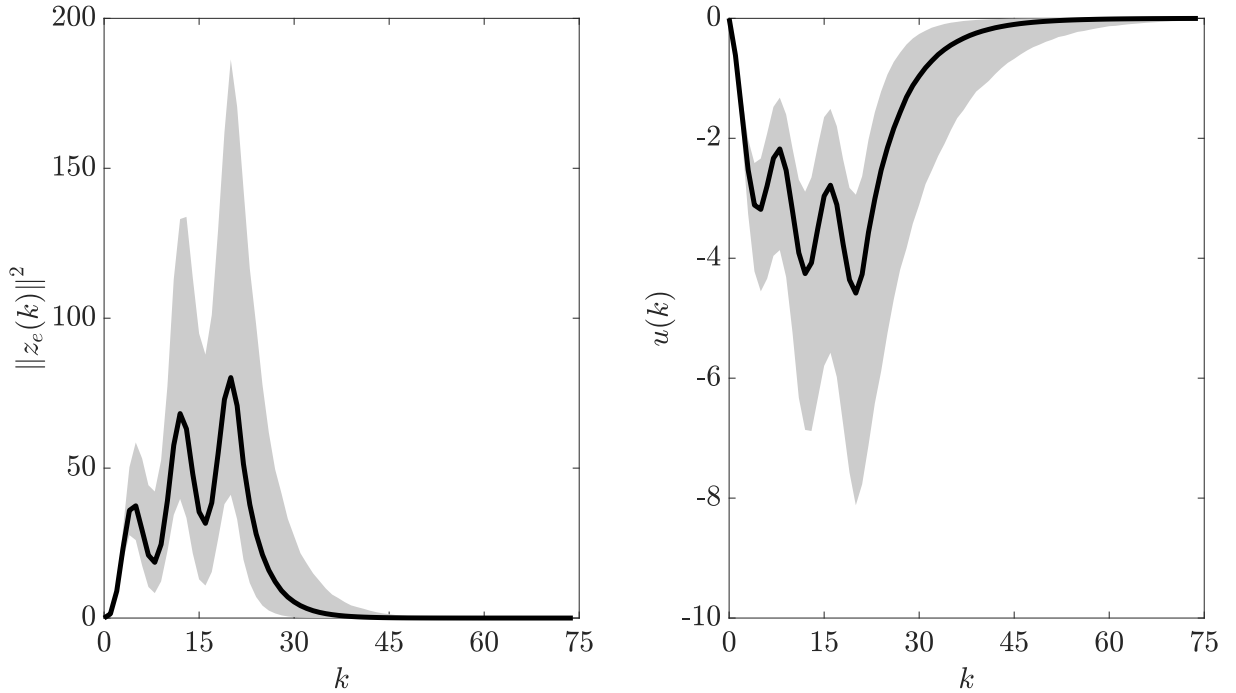
$$\begin{bmatrix} K_1^{(e)} \\ K_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5161 \\ -0.7401 \end{bmatrix}.$$

Além disso, foi obtido o limitante superior mínimo  $\gamma_e^* \approx 2.7329$  para o ganho  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$  em 23 iterações. Para validar o controlador, realizou-se uma simulação de Monte Carlo com 5000 realizações e horizonte de 75 passos ( $0 \leq k \leq 75$ ), considerando o estado inicial  $x_0 = 0$ . O distúrbio  $w_e(k)$  foi definido como

$$w_e(k) = \begin{cases} 1 + \sin(0.8k), & 0 \leq k \leq 20, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os valores médios ao longo do tempo de  $\|z_e(k)\|^2$  e  $u(k)$ , bem como a região que abrange todas as trajetórias resultantes da simulação, são apresentados na Figura 1. O ganho  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$  estimado a partir da simulação foi de 1.5084, valor inferior ao limitante  $\gamma_e^*$  obtido anteriormente, como esperado.

Figura 1 – Valores médios de  $\|z_e(k)\|^2$  e  $u(k)$  ao longo do tempo (curvas em preto) obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 5000 realizações, considerando o caso de controle  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$  para o Exemplo 3.3. A região em cinza representa todas as trajetórias resultantes da simulação.



Fonte: Autor.

**Exemplo 3.4.** Este exemplo considera o modelo linearizado em tempo contínuo da dinâmica lateral-direcional de uma aeronave não tripulada de pequeno porte em voo

estacionário apresentado em Ducard (2009). Adotando um segurador de ordem zero e um período de amostragem de  $T_s = 0.1$  ms, as matrizes do sistema discretizado são dadas por

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.3177 & 0.1883 & -0.8798 & -0.0191 \\ 0.0315 & 0.6553 & 1.8631 & 0.0329 \\ 0.0047 & -0.0798 & 0.8493 & 0.0306 \\ 0.0597 & 0.0184 & -0.0494 & 0.9994 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 4.6285 & -0.0130 \\ -0.1443 & 1.1596 \\ 0.0382 & -0.0612 \\ 0.2747 & 0.0014 \end{bmatrix}.$$

De modo semelhante ao Exemplo 3.2, os estados representam pequenas perturbações na taxa de rolamento, taxa de guinada, ângulo de derrapagem e ângulo de rolamento da aeronave, enquanto as entradas de controle são os comandos do “aileron” e do leme. Inspirado nos trabalhos de dos Santos et al. (2025) e de Oliveira e Costa (2018a), considera-se que as entradas de controle da aeronave estão sujeitas a falhas cuja ocorrência é modelada por um processo de Markov com três modos de operação ( $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ ), descritos a seguir:

- $\theta(k) = 1$ : modo de operação nominal da aeronave, sem falhas, com

$$A_1 = A_d, \quad B_1 = B_d;$$

- $\theta(k) = 2$ : modo de operação com falha, no qual o esforço de controle sobre o “aileron” é duplicado, com

$$A_2 = A_d, \quad B_2 = B_d \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- $\theta(k) = 3$ : modo de operação com falha, no qual o esforço de controle duplicado sobre o “aileron” é mantido e há uma inversão no sinal do leme, com

$$A_3 = A_d, \quad B_3 = B_d \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Adicionalmente, são adotadas as matrizes

$$J_i^{(2)} = [0.7 \quad -0.2 \quad -0.1 \quad 0.6]', \quad J_i^{(\infty)} = J_i^{(e)} = B_d \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ , de modo que consideramos que os distúrbios  $w_\infty$  e  $w_e$  afetam somente o canal de controle do “aileron”. As matrizes de probabilidades de transição  $\mathcal{P}$  e de detecção  $\Upsilon$  são definidas como

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

e consideramos uma distribuição inicial estacionária  $\mu = [0.3103 \ 0.6207 \ 0.0690]$ .

As matrizes de saída são dadas por

$$C_i^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{diag}(1, 1, 5, 1) \\ 0_{2 \times 4} \end{bmatrix}, \quad D_i^{(2)} = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad E_i^{(2)} = 0_{6 \times 1},$$

$$C_i^{(\infty)} = C_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{diag}(1, 1, 1, 5) \\ 0_{2 \times 4} \end{bmatrix}, \quad D_i^{(\infty)} = D_i^{(e)} = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad E_i^{(\infty)} = E_i^{(e)} = 0_{6 \times 1},$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Observa-se que, no caso do controle  $\mathcal{H}_2$ , atribui-se um peso maior ao ângulo de derrapagem, de modo a conferir maior robustez à aeronave na manutenção de sua trajetória sob diferentes condições iniciais. Por outro lado, em virtude da maior influência das entradas dos “aileron” sobre o ângulo de rolamento, o peso associado ao quarto estado é definido como mais elevado nos controles  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$ . Uma vez que o modelo requer pequenas variações em torno do ponto de operação, os esforços de controle são penalizados em todos os requisitos de desempenho.

Inicialmente, analisam-se os custos obtidos para os casos de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$ . Para a inicialização do Algoritmo 3.1, adotou-se o procedimento descrito no Comentário 3.2, considerando  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ ,  $k_{\max} = 100$  e  $\beta = 1$ . Os resultados correspondentes são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores de custo garantido mínimo  $(\gamma_2^*, \gamma_\infty^*, \gamma_e^*)$ , norma real  $(\|\mathcal{G}_K\|_2, \|\mathcal{G}_K\|_\infty)$  e número de iterações  $(n_k)$  para os casos de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$  por realimentação de estados do Exemplo 3.4 usando o Algoritmo 3.1.

| Problema de Controle         | $\gamma_2^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _2$ | $\gamma_\infty^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ | $\gamma_e^*$ | $n_k$ |
|------------------------------|--------------|-----------------------|-------------------|----------------------------|--------------|-------|
| $\mathcal{H}_2$              | 6.957        | 6.957                 | 286.329           | 274.187                    | 112.549      | 9     |
| $\mathcal{H}_\infty$         | 33.019       | 18.782                | 64.967            | 64.967                     | 39.148       | 26    |
| $\ell_2\text{--}\ell_\infty$ | 22.231       | 9.957                 | 95.443            | 91.826                     | 14.666       | 16    |

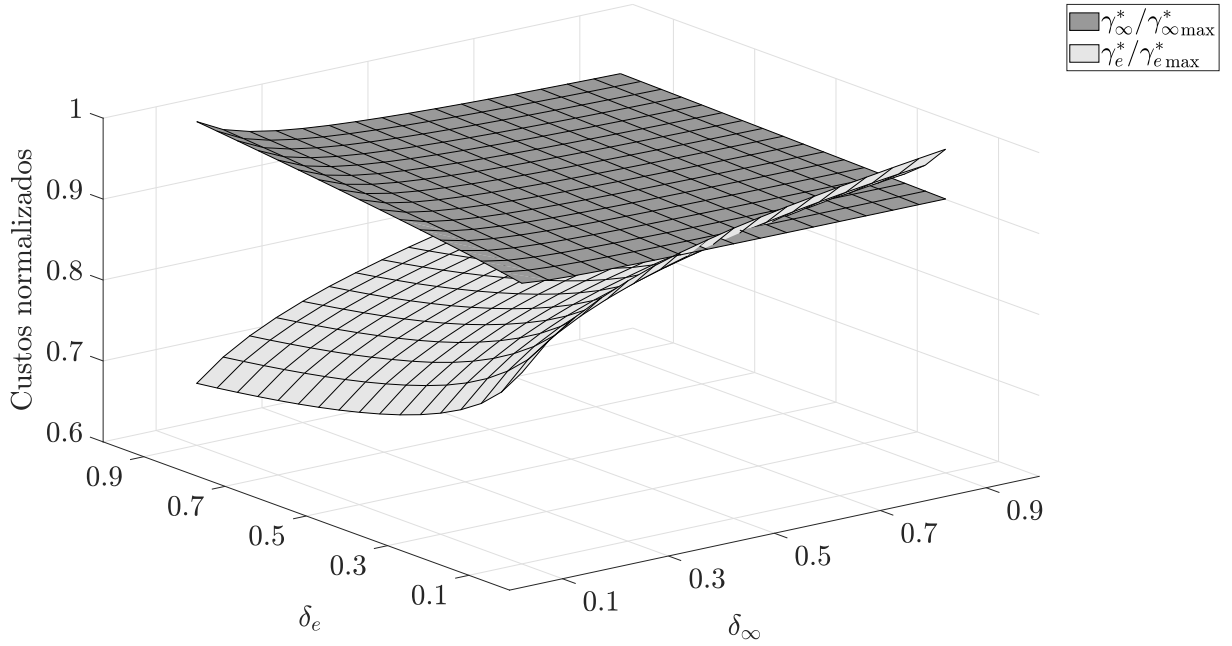
Fonte: Autor.

Desse modo, estabelece-se como objetivo o projeto de um controlador que proporcione o melhor compromisso entre o custo  $\mathcal{H}_\infty$  e o ganho  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$ , considerando um limitante superior de  $\gamma_2 = 15$  para o custo  $\mathcal{H}_2$ . Para tanto, variaram-se os parâmetros  $\delta_\infty$  e  $\delta_e$  no intervalo  $[0.1, 0.9]$ , adotando-se a inicialização do Algoritmo 3.1 conforme o procedimento descrito no Comentário 3.3. Assim, foram obtidas duas superfícies que representam o comportamento dos custos garantidos  $\gamma_\infty$  e  $\gamma_e$  normalizados, isto é,  $\gamma_\infty^*/\gamma_{\infty\max}^*$  e  $\gamma_e^*/\gamma_{e\max}^*$ , conforme apresentado na Figura 2.

Observa-se na Figura 2 que, à medida que  $\delta_e$  diminui e  $\delta_\infty$  aumenta, os valores de  $\gamma_\infty^*$  tendem a decrescer. Por outro lado, para essas mesmas variações de  $\delta_e$  e  $\delta_\infty$ , verifica-se um aumento nos valores de  $\gamma_e^*$ . Como o custo  $\mathcal{H}_\infty$  normalizado na Figura 2 varia apenas no intervalo  $[0.94, 1]$ , adotaram-se os parâmetros  $\delta_\infty = 0.3$  e  $\delta_e = 0.9$ , de modo a reduzir o



Figura 2 – Comportamento dos custos garantidos  $\gamma_\infty$  e  $\gamma_e$  normalizados em função de  $\delta_\infty, \delta_e \in [0.1, 0.9]$  adotando-se  $\gamma_2 = 15$  para o Exemplo 3.4.



Fonte: Autor.

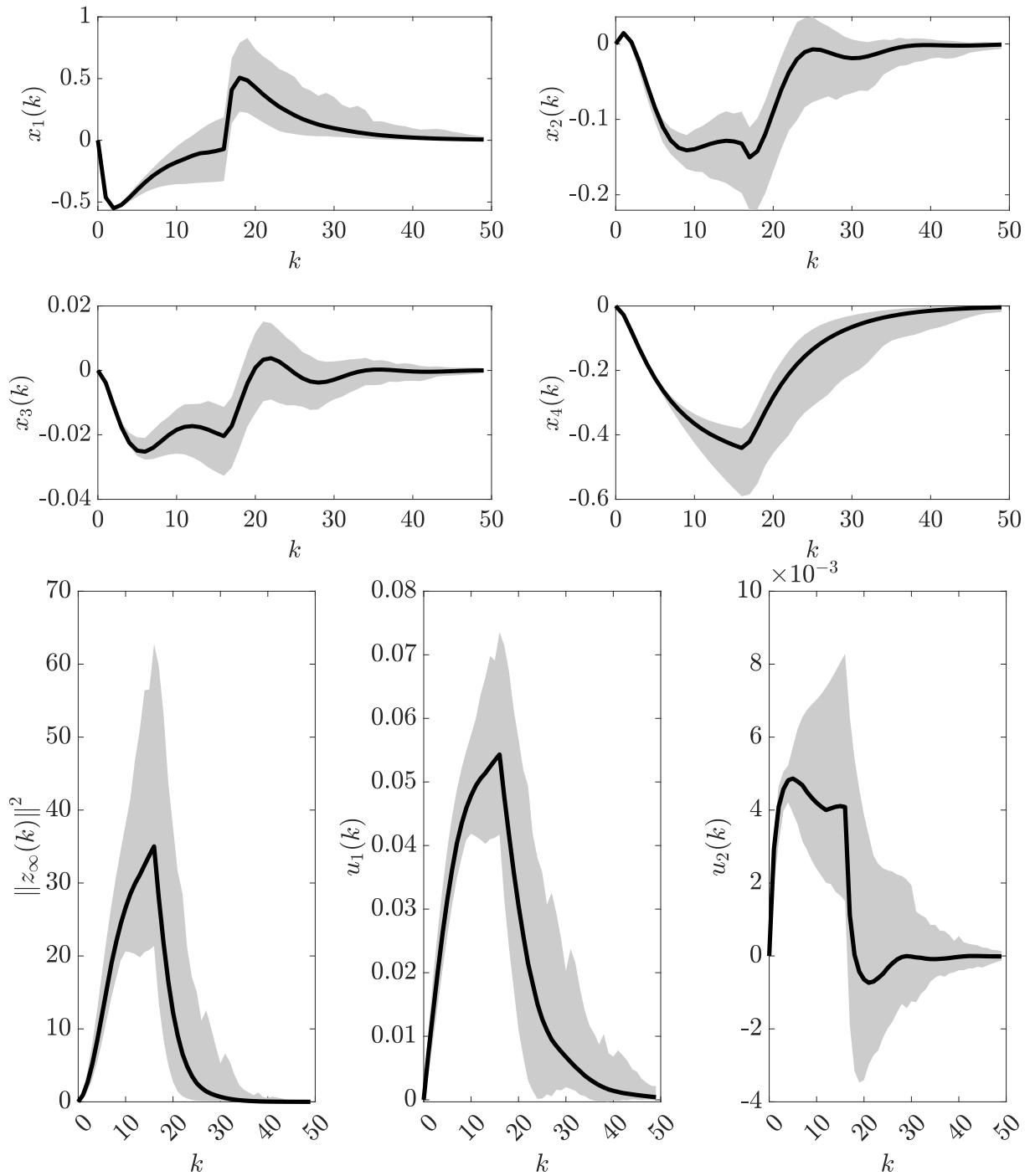
ganho  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$  sem comprometer significativamente o custo  $\mathcal{H}_\infty$ . Assim, para os parâmetros adotados, obtiveram-se os custos garantidos mínimos  $\gamma_\infty^* \approx 66.929$  e  $\gamma_e^* \approx 18.720$ , bem como os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0208 & -0.0920 & -0.1703 & -0.0755 \\ -0.0037 & -0.0123 & -0.0680 & -0.0052 \\ -0.0101 & -0.0361 & 0.2056 & -0.1242 \\ -0.0066 & 0.0020 & -0.0368 & -0.0064 \\ -0.0045 & -0.0411 & 0.2221 & -0.1207 \\ -0.0065 & 0.0047 & -0.0345 & -0.0057 \end{bmatrix}.$$

Para ilustrar o comportamento do sistema em malha fechada com o controlador projetado, foi realizada uma simulação de Monte Carlo com 1000 realizações e horizonte de 50 passos ( $0 \leq k \leq 50$ ), adotando o estado inicial  $x_0 = 0$  e um distúrbio  $w_\infty(k)$  definido como constante e igual a  $-0.1$  no intervalo  $0 \leq k \leq 15$ , sendo nulo nos demais instantes. A Figura 3 apresenta as evoluções temporais dos valores médios de  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$ ,  $x_3(k)$ ,  $x_4(k)$ ,  $\|z_\infty(k)\|^2$ ,  $u_1(k)$  e  $u_2(k)$ , bem como as respectivas regiões que abrangem todas as trajetórias obtidas na simulação.

Observa-se na Figura 3 que o controlador projetado foi capaz de conduzir os estados à origem. Além disso, os valores estimados para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  e para o ganho  $\ell_2\text{--}\ell_\infty$  obtidos a partir da simulação foram 52.469 e 14.794, respectivamente, ambos inferiores aos custos garantidos correspondentes, conforme esperado.

Figura 3 – Valores médios dos estados  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$ ,  $x_3(k)$ ,  $x_4(k)$ , de  $\|z_\infty(k)\|^2$  e das entradas de controle  $u_1(k)$  e  $u_2(k)$  ao longo do tempo (curvas em preto), obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 1000 realizações, considerando o controlador projetado no Exemplo 3.4. A região em cinza indica o conjunto das trajetórias resultantes da simulação.



Fonte: Autor.

## 4 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA

Neste capítulo, apresentamos novos resultados para a síntese de controladores  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  por realimentação estática de saída para MJLS a tempo discreto e cadeia oculta. Neste contexto, propomos condições suficientes expressas por BMIs para os casos de projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Apresentamos uma abordagem iterativa caracterizada por um algoritmo de descida coordenada baseado em LMIs, a fim de obtermos a partir das condições propostas uma sequência não crescente de custos garantidos que converge para um valor mínimo. Ao contrário de métodos existentes, a abordagem proposta não requer o cálculo de ganhos de realimentação de estados estabilizantes para a inicialização do algoritmo. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficácia dos resultados propostos e demonstrar as suas vantagens em relação a métodos existentes na literatura.

### 4.1 Formulação do problema

Em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  com filtração  $\{\mathfrak{F}_k\}$ , consideramos o seguinte MJLS a tempo discreto:

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + J_{\theta(k)}w(k), \\ y(k) = L_{\theta(k)}x(k) + H_{\theta(k)}w(k), \\ z_2(k) = C_{\theta(k)}^{(2)}x(k) + D_{\theta(k)}^{(2)}u(k) + E_{\theta(k)}^{(2)}w(k), \\ z_\infty(k) = C_{\theta(k)}^{(\infty)}x(k) + D_{\theta(k)}^{(\infty)}u(k) + E_{\theta(k)}^{(\infty)}w(k), \\ x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle adaptada em  $\mathfrak{F}_k$ ,  $w(\cdot) \in \mathbb{R}^r$  é a entrada exógena e  $y(\cdot) \in \mathbb{R}^p$  é a saída medida. As variáveis  $z_2(\cdot) \in \mathbb{R}^{q_2}$  e  $z_\infty(\cdot) \in \mathbb{R}^{q_\infty}$  representam as saídas controladas relacionadas, respectivamente, aos problemas de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

Nesse contexto, associado a (4.1), adotamos o controlador por realimentação estática de saída, dependente somente de  $\hat{\theta}(k)$ , dado por

$$u(k) = K_{\hat{\theta}(k)}y(k). \quad (4.2)$$

Aplicando (4.2) em (4.1), obtemos o seguinte sistema em malha fechada:

$$\mathcal{G}_K : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}x(k) + J_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}w(k), \\ z_2(k) = C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}^{(2)}x(k) + E_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}^{(2)}w(k), \\ z_\infty(k) = C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}^{(\infty)}x(k) + E_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}^{(\infty)}w(k), \\ x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde as matrizes  $A_{i\ell}$ ,  $J_{i\ell}$ ,  $C_{i\ell}^{(2)}$ ,  $E_{i\ell}^{(2)}$ ,  $C_{i\ell}^{(\infty)}$  e  $E_{i\ell}^{(\infty)}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{M}$ , são definidas como

$$A_{i\ell} \triangleq A_i + B_i K_\ell L_i, \quad (4.4)$$

$$J_{i\ell} \triangleq J_i + B_i K_\ell H_i, \quad (4.5)$$

$$C_{i\ell}^{(2)} \triangleq C_i^{(2)} + D_i^{(2)} K_\ell L_i, \quad (4.6)$$

$$E_{i\ell}^{(2)} \triangleq E_i^{(2)} + D_i^{(2)} K_\ell H_i, \quad (4.7)$$

$$C_{i\ell}^{(\infty)} \triangleq C_i^{(\infty)} + D_i^{(\infty)} K_\ell L_i, \quad (4.8)$$

$$E_{i\ell}^{(\infty)} \triangleq E_i^{(\infty)} + D_i^{(\infty)} K_\ell H_i. \quad (4.9)$$

Dada a Definição 2.1 e a estrutura de controle em (4.2), definimos o conjunto  $\mathbb{K}$  por

$$\mathbb{K} \triangleq \{K = (K_1, K_2, \dots, K_M) \in \mathbb{H}_M^{p,m}; \mathcal{G}_K \text{ é SS}\},$$

ou seja,  $\mathbb{K}$  denota o conjunto de todos os controladores por realimentação estática de saída admissíveis que estabilizam estocasticamente o sistema (4.3).

Desse modo, podemos estabelecer os principais objetivos deste capítulo nos problemas descritos a seguir:

### 1. Problema de controle $\mathcal{H}_2$

Encontrar  $K \in \mathbb{K}$  a fim de obter um custo garantido mínimo  $\gamma_2$  para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (4.3), ou seja,

$$\inf_{K \in \mathbb{K}} \{\gamma_2^2; (2.4)-(2.7) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (4.10)$$

### 2. Problema de controle $\mathcal{H}_\infty$

Encontrar  $K \in \mathbb{K}$  a fim de obter um custo garantido mínimo  $\gamma_\infty$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (4.3), ou seja,

$$\inf_{K \in \mathbb{K}} \{\gamma_\infty^2; (2.12)-(2.13) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (4.11)$$

### 3. Problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Encontrar  $K \in \mathbb{K}$  a fim de obter um custo garantido mínimo  $\gamma_2$  para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (4.3), considerando um dado limitante superior  $\gamma_\infty > 0$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (4.3), ou seja,

$$\inf_{\substack{K \in \mathbb{K} \\ \gamma_\infty > 0}} \{\gamma_2^2; (2.4)-(2.7) \text{ e } (2.12)-(2.13) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (4.12)$$

## 4.2 Controle $\mathcal{H}_2$

Abordamos nesta seção o problema de controle  $\mathcal{H}_2$ . Dessa forma, consideramos as seguintes desigualdades, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ ,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \mu_i \alpha_{i\ell} \text{Tr}(W_{i\ell}) < \zeta_2, \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} W_{i\ell} & \bullet & \bullet & \bullet \\ G_{i\ell} J_i + N_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i & \Theta_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ E_i^{(2)} + V_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i & 0 & I_{q_2} & \bullet \\ Y_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i & \Lambda_{i\ell}^{(2)} & \Pi_{i\ell}^{(2)} & \text{Her}(Y_{i\ell}^{(2)} S_\ell) \end{bmatrix} > 0, \quad (4.14)$$

$$P_i > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} R_{i\ell}, \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} R_{i\ell} & \bullet & \bullet & \bullet \\ F_{i\ell}^{(2)} A_i + M_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i & \Phi_{i\ell}^{(2)} & \bullet & \bullet \\ C_i^{(2)} + U_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i & 0 & I_{q_2} & \bullet \\ X_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i & \Psi_{i\ell}^{(2)} & \Omega_{i\ell}^{(2)} & \text{Her}(X_{i\ell}^{(2)} S_\ell) \end{bmatrix} > 0, \quad (4.16)$$

onde

$$\Theta_{i\ell} = \text{Her}(G_{i\ell}) - \mathcal{E}_i(P),$$

$$\Lambda_{i\ell}^{(2)} = (N_{i\ell}^{(2)} S_\ell - G_{i\ell} B_i)',$$

$$\Pi_{i\ell}^{(2)} = (V_{i\ell}^{(2)} S_\ell - D_i^{(2)}),$$

$$\Phi_{i\ell}^{(2)} = \text{Her}(F_{i\ell}^{(2)}) - \mathcal{E}_i(P),$$

$$\Psi_{i\ell}^{(2)} = (M_{i\ell}^{(2)} S_\ell - F_{i\ell}^{(2)} B_i)',$$

$$\Omega_{i\ell}^{(2)} = (U_{i\ell}^{(2)} S_\ell - D_i^{(2)})',$$

e  $\mathcal{E}(\cdot)$  é dado por (2.2).

O conjunto de variáveis  $\xi^{(2)}$  de (4.13)–(4.16) é definido por

$$\xi^{(2)} \triangleq (P, W, R, F^{(2)}, G, M^{(2)}, N^{(2)}, U^{(2)}, V^{(2)}, X^{(2)}, Y^{(2)}, S, Z, \zeta_2), \quad (4.17)$$

onde  $P \in \mathbb{H}_N^{n++}$ ,  $W \in \mathbb{H}_N^{r++}$ ,  $R \in \mathbb{W}^{n++}$ ,  $F^{(2)} \in \mathbb{W}^n$ ,  $M^{(2)} \in \mathbb{W}^{m,n}$ ,  $N^{(2)} \in \mathbb{W}^{m,n}$ ,  $U^{(2)} \in \mathbb{W}^{m,q_2}$ ,  $V^{(2)} \in \mathbb{W}^{m,q_2}$ ,  $X^{(2)} \in \mathbb{W}^m$ ,  $Y^{(2)} \in \mathbb{W}^m$ ,  $S \in \mathbb{H}_M^m$ ,  $Z \in \mathbb{H}_M^{p,m}$  e  $\zeta_2 \in \mathbb{R}^{++}$ . Assim, podemos definir o conjunto de todas as soluções possíveis de (4.13)–(4.16) da seguinte forma:

$$\Xi^{(2)} \triangleq \{\xi^{(2)}; (4.13)\text{--}(4.16) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (4.18)$$

O teorema proposto a seguir apresenta uma condição suficiente para a síntese de um controlador  $\mathcal{H}_2$  com custo garantido  $\zeta_2^{1/2}$  para o sistema (4.3).

**Teorema 4.1.** *Se existir um  $\xi^{(2)} \in \Xi^{(2)}$ , então definindo os ganhos do controlador (4.2) como  $K_\ell = S_\ell^{-1} Z_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_2 < \zeta_2^{1/2}$ .*

*Prova.* A prova consiste em demonstrar que (4.13)–(4.16) implicam (2.4)–(2.7). Inicialmente, consideramos que (4.13)–(4.16) sejam válidas. Ao adotarmos  $\zeta_2 = \gamma_2^2$ , notamos que (4.13) e (4.15) são iguais a (2.4) e (2.6), respectivamente. Como temos  $P > 0$  por hipótese, segue que  $\mathcal{E}_i(P) > 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Assim, aplicando o Lema 2.5, podemos escrever que

$$\tilde{\Theta}_{i\ell} \triangleq G_{i\ell} \mathcal{E}_i(P)^{-1} G'_{i\ell} \geq \Theta_{i\ell} = \text{Her}(G_{i\ell}) - \mathcal{E}_i(P) > 0 \quad (4.19)$$

e

$$\tilde{\Phi}_{i\ell}^{(2)} \triangleq F_{i\ell}^{(2)} \mathcal{E}_i(P)^{-1} F_{i\ell}^{(2)'} \geq \Phi_{i\ell}^{(2)} = \text{Her}(F_{i\ell}^{(2)}) - \mathcal{E}_i(P) > 0. \quad (4.20)$$

Logo, considerando (4.19) e (4.20), temos que (4.14) e (4.16) implicam, respectivamente, em

$$\begin{bmatrix} W_{i\ell} & \bullet & \bullet & \bullet \\ G_{i\ell} J_i + N_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i & \tilde{\Theta}_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ E_i^{(2)} + V_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i & 0 & I_{q_2} & \bullet \\ Y_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i & \Lambda_{i\ell}^{(2)} & \Pi_{i\ell}^{(2)} & \text{Her}(Y_{i\ell}^{(2)} S_\ell) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.21)$$

e

$$\begin{bmatrix} R_{i\ell} & \bullet & \bullet & \bullet \\ F_{i\ell}^{(2)} A_i + M_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i & \tilde{\Phi}_{i\ell}^{(2)} & \bullet & \bullet \\ C_i^{(2)} + U_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i & 0 & I_{q_2} & \bullet \\ X_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i & \Psi_{i\ell}^{(2)} & \Omega_{i\ell}^{(2)} & \text{Her}(X_{i\ell}^{(2)} S_\ell) \end{bmatrix} > 0. \quad (4.22)$$

A partir de (4.21), temos que  $\text{Her}(Y_{i\ell}^{(2)} S_\ell) > 0$  e, consequentemente,  $S_\ell$  é não singular. Neste caso, definindo  $K_\ell = S_\ell^{-1} Z_\ell$  para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , podemos escrever que

$$G_{i\ell} J_{i\ell} = G_{i\ell} (J_i + B_i K_\ell H_i) = G_{i\ell} J_i + N_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i - \Lambda_{i\ell}^{(2)'} S_\ell^{-1} Z_\ell H_i \quad (4.23)$$

e

$$E_{i\ell}^{(2)} = E_i^{(2)} + D_i^{(2)} K_\ell H_i = E_i^{(2)} + V_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i - \Pi_{i\ell}^{(2)'} S_\ell^{-1} Z_\ell H_i, \quad (4.24)$$

onde as matrizes  $J_{i\ell}$  e  $E_{i\ell}^{(2)}$  são dadas por (4.5) e (4.7), respectivamente. Aplicando o Lema 2.6 em (4.21) para

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \begin{bmatrix} W_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ G_{i\ell} J_i + N_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i & G_{i\ell} \mathcal{E}_i(P)^{-1} G_{i\ell}' & \bullet \\ E_i^{(2)} + V_{i\ell}^{(2)} Z_\ell H_i & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix}, \\ \mathbb{F} &= \begin{bmatrix} 0 & \Lambda_{i\ell}^{(2)} & \Pi_{i\ell}^{(2)'} \end{bmatrix}', \\ \mathbb{G} &= \begin{bmatrix} S_\ell^{-1} Z_\ell H_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{X} &= Y_{i\ell}^{(2)} S_\ell \end{aligned}$$

e considerando (4.23) e (4.24), temos que (4.21) implica em

$$\begin{bmatrix} W_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ G_{i\ell} J_{i\ell} & G_{i\ell} \mathcal{E}_i(P)^{-1} G_{i\ell}' & \bullet \\ E_{i\ell}^{(2)} & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0. \quad (4.25)$$

Ademais, notamos a partir de (4.20) que  $G_{i\ell}$  é não singular. Desse modo, aplicando a transformação de congruência  $\mathbf{diag}(I_r, G_{i\ell}^{-1}, I_{q_2})$  em (4.25) obtemos (2.5). De modo análogo, recordando que definimos  $K_\ell = S_\ell^{-1} Z_\ell$  para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , podemos escrever que

$$F_{i\ell}^{(2)} A_{i\ell} = F_{i\ell}^{(2)} (A_i + B_i K_\ell L_i) = F_{i\ell}^{(2)} A_i + M_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i - \Psi_{i\ell}^{(2)'} S_\ell^{-1} Z_\ell L_i \quad (4.26)$$

e

$$C_{i\ell}^{(2)} = C_i^{(2)} + D_i^{(2)} K_\ell L_i = C_i^{(2)} + U_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i - \Omega_{i\ell}^{(2)'} S_\ell^{-1} Z_\ell L_i, \quad (4.27)$$

onde as matrizes  $A_{i\ell}$  e  $C_{i\ell}^{(2)}$  são dadas por (4.4) e (4.6), respectivamente. Aplicando o Lema 2.6 em (4.22) para

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \begin{bmatrix} R_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ F_{i\ell}^{(2)} A_i + M_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i & F_{i\ell}^{(2)} \mathcal{E}_i(P)^{-1} F_{i\ell}^{(2)'} & \bullet \\ C_i^{(2)} + U_{i\ell}^{(2)} Z_\ell L_i & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix}, \\ \mathbb{F} &= \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{i\ell}^{(2)} & \Omega_{i\ell}^{(2)} \end{bmatrix}', \\ \mathbb{G} &= \begin{bmatrix} S_\ell^{-1} Z_\ell L_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{X} &= X_{i\ell}^{(2)} S_\ell \end{aligned}$$

e considerando (4.26) e (4.27), temos que (4.22) implica em

$$\begin{bmatrix} R_{i\ell} & \bullet & \bullet \\ F_{i\ell}^{(2)} A_{i\ell} & F_{i\ell}^{(2)} \mathcal{E}_i(P)^{-1} F_{i\ell}^{(2)'} & \bullet \\ C_{i\ell}^{(2)} & 0 & I_{q_2} \end{bmatrix} > 0. \quad (4.28)$$

A partir de (4.19) temos que  $F_{i\ell}^{(2)}$  é não singular. Logo, aplicando a transformação de congruência  $\mathbf{diag}(I_n, F_{i\ell}^{(2)-1}, I_{q_2})$  em (4.28) obtemos (2.7). Portanto, temos que (4.13)-(4.16) implicam (2.4)-(2.7), e assim, de acordo com o Lema 2.2, tem-se que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_2 < \zeta_2^{1/2}$ .  $\square$

### 4.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Passamos agora a tratar o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Assim, consideramos as seguintes desigualdades, para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\ell \in \mathbb{M}_i$ ,

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ 0 & \zeta_\infty I_r \end{bmatrix} > \sum_{\ell \in \mathbb{M}_i} \alpha_{i\ell} \begin{bmatrix} T_{i\ell}^{(1)} & \bullet \\ T_{i\ell}^{(2)} & T_{i\ell}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} T_{i\ell}^{(1)} & \bullet & \bullet \\ T_{i\ell}^{(2)} & T_{i\ell}^{(3)} & \bullet \\ F_{i\ell}^{(\infty)} A_i + M_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i & F_{i\ell}^{(\infty)} J_i + N_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i & \Phi_{i\ell}^{(\infty)} \\ C_i^{(\infty)} + U_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i & E_i^{(\infty)} + V_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i & 0 \\ X_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i & 0 & \Psi_{i\ell}^{(2)} \\ 0 & Y_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i & \Lambda_{i\ell}^{(\infty)} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ I_{q_\infty} & \bullet & \bullet \\ \Omega_{i\ell}^{(\infty)} & \text{Her}(X_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell) & \bullet \\ \Pi_{i\ell}^{(\infty)} & 0 & \text{Her}(Y_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell) \end{bmatrix} > 0, \quad (4.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_{i\ell}^{(\infty)} &= \text{Her}(F_{i\ell}^{(\infty)}) - \mathcal{E}_i(Q), \\ \Psi_{i\ell}^{(\infty)} &= (M_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell - F_{i\ell}^{(\infty)} B_i)', \\ \Omega_{i\ell}^{(\infty)} &= (U_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell - D_i^{(\infty)})', \\ \Lambda_{i\ell}^{(\infty)} &= (N_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell - F_{i\ell}^{(\infty)} B_i)', \\ \Pi_{i\ell}^{(\infty)} &= (V_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell - D_i^{(\infty)})', \end{aligned}$$

e  $\mathcal{E}(\cdot)$  é dado por (2.2).

Definimos o conjunto de variáveis  $\xi^{(\infty)}$  de (4.29)–(4.30) por

$$\xi^{(\infty)} \triangleq (Q, T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}, F^{(\infty)}, M^{(\infty)}, N^{(\infty)}, U^{(\infty)}, V^{(\infty)}, X^{(\infty)}, Y^{(\infty)}, S, Z, \zeta_\infty), \quad (4.31)$$



onde  $Q \in \mathbb{H}_N^{n++}$ ,  $T^{(1)} \in \mathbb{W}^{n++}$ ,  $T^{(2)} \in \mathbb{W}^{n,r}$ ,  $T^{(3)} \in \mathbb{W}^{r++}$ ,  $F^{(\infty)} \in \mathbb{W}^n$ ,  $M^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{m,n}$ ,  $N^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{m,n}$ ,  $U^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{m,q_\infty}$ ,  $V^{(\infty)} \in \mathbb{W}^{m,q_\infty}$ ,  $X^{(\infty)} \in \mathbb{W}^m$ ,  $Y^{(\infty)} \in \mathbb{W}^m$ ,  $S \in \mathbb{H}_M^n$ ,  $Z \in \mathbb{H}_M^{p,m}$  e  $\zeta_\infty \in \mathbb{R}^{++}$ . Desse modo, podemos definir o conjunto de todas as soluções possíveis de (4.29)–(4.30) da seguinte forma:

$$\Xi^{(\infty)} \triangleq \{\xi^{(\infty)}; (4.29)–(4.30) \text{ sejam satisfeitas}\}. \quad (4.32)$$

O teorema proposto a seguir apresenta uma condição suficiente para a síntese de um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  com custo garantido  $\zeta_\infty^{1/2}$  para o sistema (4.3).

**Teorema 4.2.** *Se existir um  $\xi^{(\infty)} \in \Xi^{(\infty)}$ , então definindo os ganhos do controlador (4.2) como  $K_\ell = S_\ell^{-1} Z_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , temos que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \zeta_\infty^{1/2}$ .*

*Prova.* A prova adota um raciocínio similar ao da prova do Teorema 4.2. Neste caso, devemos demonstrar que (4.29)–(4.30) implicam (2.12)–(2.13). Assumindo que (4.29)–(4.30) sejam válidas, notamos que (4.29) é igual a (2.12) ao adotarmos  $\zeta_\infty = \gamma_\infty^2$ . Como  $Q > 0$  por hipótese, temos que  $\mathcal{E}_i(Q) > 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Assim, aplicando o Lema 2.5, podemos escrever que

$$\tilde{\Phi}_{i\ell}^{(\infty)} \triangleq F_{i\ell}^{(\infty)} \mathcal{E}_i(Q)^{-1} F_{i\ell}^{(\infty)'} \geq \Phi_{i\ell}^{(\infty)} = \text{Her}(F_{i\ell}^{(\infty)}) - \mathcal{E}_i(Q) > 0. \quad (4.33)$$

Assim, dado (4.33), temos que (4.30) implica em

$$\left[ \begin{array}{ccc} T_{i\ell}^{(1)} & \bullet & \bullet \\ T_{i\ell}^{(2)} & T_{i\ell}^{(3)} & \bullet \\ F_{i\ell}^{(\infty)} A_i + M_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i & F_{i\ell}^{(\infty)} J_i + N_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i & \tilde{\Phi}_{i\ell}^{(\infty)} \\ C_i^{(\infty)} + U_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i & E_i^{(\infty)} + V_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i & 0 \\ X_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i & 0 & \Psi_{i\ell}^{(2)} \\ 0 & Y_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i & \Lambda_{i\ell}^{(\infty)} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ I_{q_\infty} & \bullet & \bullet \\ \Omega_{i\ell}^{(\infty)} & \text{Her}(X_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell) & \bullet \\ \Pi_{i\ell}^{(\infty)} & 0 & \text{Her}(Y_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell) \end{array} \right] > 0. \quad (4.34)$$

A partir de (4.34), temos que  $\text{Her}(Y_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell) > 0$  e, consequentemente,  $S_\ell$  é não singular.

Neste caso, definindo  $K_\ell = S_\ell^{-1} Z_\ell$  para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , podemos escrever que

$$F_{i\ell}^{(\infty)} A_{i\ell} = F_{i\ell}^{(\infty)} (A_i + B_i K_\ell L_i) = F_{i\ell}^{(\infty)} A_i + M_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i - \Psi_{i\ell}^{(\infty)'} S_\ell^{-1} Z_\ell L_i, \quad (4.35)$$

$$F_{i\ell}^{(\infty)} J_{i\ell} = F_{i\ell}^{(\infty)} (J_i + B_i K_\ell H_i) = F_{i\ell}^{(\infty)} J_i + N_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i - \Lambda_{i\ell}^{(\infty)'} S_\ell^{-1} Z_\ell H_i, \quad (4.36)$$

$$C_{i\ell}^{(\infty)} = C_i^{(\infty)} + D_i^{(\infty)} K_\ell L_i = C_i^{(\infty)} + U_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i - \Omega_{i\ell}^{(\infty)'} S_\ell^{-1} Z_\ell L_i, \quad (4.37)$$

$$E_{i\ell}^{(\infty)} = E_i^{(\infty)} + D_i^{(\infty)} K_\ell H_i = E_i^{(\infty)} + V_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i - \Pi_{i\ell}^{(\infty)'} S_\ell^{-1} Z_\ell H_i, \quad (4.38)$$

onde as matrizes  $A_{i\ell}$ ,  $J_{i\ell}$ ,  $C_{i\ell}^{(\infty)}$  e  $E_{i\ell}^{(\infty)}$  são dadas por (4.4), (4.5), (4.8) e (4.9), respectivamente. Aplicando o Lema 2.6 em (4.34) para

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \begin{bmatrix} T_{i\ell}^{(1)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ T_{i\ell}^{(2)} & T_{i\ell}^{(3)} & \bullet & \bullet \\ F_{i\ell}^{(\infty)} A_i + M_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i & F_{i\ell}^{(\infty)} J_i + N_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i & F_{i\ell}^{(\infty)} \mathcal{E}_i(Q)^{-1} F_{i\ell}^{(\infty)'} & \bullet \\ C_i^{(\infty)} + U_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell L_i & E_i^{(\infty)} + V_{i\ell}^{(\infty)} Z_\ell H_i & 0 & I_{q_\infty} \end{bmatrix}, \\ \mathbb{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Psi_{i\ell}^{(\infty)} & \Omega_{i\ell}^{(\infty)'} \\ 0 & 0 & \Lambda_{i\ell}^{(\infty)} & \Pi_{i\ell}^{(\infty)'} \end{bmatrix}', \\ \mathbb{G} &= \begin{bmatrix} S_\ell^{-1} Z_\ell L_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_\ell^{-1} Z_\ell H_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{X} &= \begin{bmatrix} X_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell & 0 \\ 0 & Y_{i\ell}^{(\infty)} S_\ell \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e considerando (4.35)-(4.38), temos que (4.34) implica em

$$\begin{bmatrix} T_{i\ell}^{(1)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ T_{i\ell}^{(2)} & T_{i\ell}^{(3)} & \bullet & \bullet \\ F_{i\ell}^{(\infty)} A_{i\ell} & F_{i\ell}^{(\infty)} J_{i\ell} & F_{i\ell}^{(\infty)} \mathcal{E}_i(Q)^{-1} F_{i\ell}^{(\infty)'} & \bullet \\ C_{i\ell}^{(\infty)} & E_{i\ell}^{(\infty)} & 0 & I_{q_\infty} \end{bmatrix} > 0. \quad (4.39)$$

Podemos notar a partir de (4.33) que  $F_{i\ell}^{(\infty)}$  é não singular. Assim, aplicando a transformação de congruência  $\mathbf{diag}(I_n, I_r, F_{i\ell}^{(\infty)-1}, I_{q_\infty})$  em (4.39) obtemos (2.13). Portanto, temos que (4.29)-(4.30) implicam (2.12)-(2.13), e assim, de acordo com o Lema 2.3, tem-se que  $K \in \mathbb{K}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \zeta_\infty^{1/2}$ .  $\square$

**Comentário 4.1.** No caso especial de sistemas lineares sem saltos, o Teorema 4.2 se reduz ao Teorema 1 em Chang, Liu e Park (2020) sob as opções de parâmetros  $\varepsilon = 0$ ,  $\theta = 2$  e  $G = \mathbf{diag}(F^{(\infty)}, I_{q_\infty})$  (na notação dos autores citados). Esta redução se segue impondo  $M^{(\infty)} = N^{(\infty)} = B$ ,  $U^{(\infty)} = V^{(\infty)} = D$  e  $X^{(\infty)} = Y^{(\infty)} = B'B + D'D$  em (4.30), e então aplicado a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} I_{2n+r+q_\infty} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & I_m \end{bmatrix}.$$

## 4.4 Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

A partir dos resultados obtidos para o controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , podemos observar que as variáveis  $S$  e  $Z$ , as quais compõem os ganhos do controlador, são elementos de ambos os conjuntos  $\xi^{(2)}$  e  $\xi^{(\infty)}$ , como mostrado em (4.17) e (4.31), respectivamente. Dessa forma, para um dado  $\zeta_\infty > 0$ , definimos o conjunto de todas as soluções conjuntas possíveis de (4.13)-(4.16) e (4.29)-(4.30) como

$$\Xi^{(m)}(\zeta_\infty) \triangleq \{\xi^{(m)}; (4.13)-(4.16) \text{ e } (4.29)-(4.30) \text{ sejam satisfeitas}\}, \quad (4.40)$$

onde  $\xi^{(m)}$  denota o conjunto de variáveis de (4.13)-(4.16) e (4.29)-(4.30) tal que

$$\begin{aligned} \xi^{(m)} \triangleq & (P, W, R, F^{(2)}, G, \zeta_m, Q, T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}, F^{(\infty)}, \\ & M^{(m)}, N^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)}, X^{(m)}, Y^{(m)}, S, Z, \zeta_\infty), \end{aligned} \quad (4.41)$$

com  $\zeta_m = \zeta_2$ ,  $M^{(m)} = (M^{(2)}, M^{(\infty)})$ ,  $N^{(m)} = (N^{(2)}, N^{(\infty)})$ ,  $U^{(m)} = (U^{(2)}, U^{(\infty)})$ ,  $V^{(m)} = (V^{(2)}, V^{(\infty)})$ ,  $X^{(m)} = (X^{(2)}, X^{(\infty)})$  e  $Y^{(m)} = (Y^{(2)}, Y^{(\infty)})$ . Assim, podemos estabelecer o seguinte teorema, no qual propomos uma condição suficiente para a síntese de um controlador misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para o sistema (4.3).

**Teorema 4.3.** *Para um dado  $\zeta_\infty > 0$ , se existir um  $\xi^{(m)} \in \Xi^{(m)}(\zeta_\infty)$ , então definindo os ganhos do controlador (4.2) como  $K_\ell = X_\ell^{-1}Y_\ell$ , para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , temos que  $K \in \mathbb{K}$ , com  $\|\mathcal{G}_K\|_2 < \zeta_m^{1/2}$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \zeta_\infty^{1/2}$ .*

*Prova.* A prova é uma consequência direta dos Teoremas 4.1 e 4.2. □

## 4.5 Algoritmo iterativo

Podemos notar que as condições propostas pelos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3 estão formuladas em termos de BMIs e, portanto, resultam em problemas de otimização de natureza não convexa e de difícil resolução, ou seja, geralmente não é possível encontrar uma solução ótima global partindo destas condições. Por outro lado, podemos verificar que se fixarmos o conjunto de variáveis  $(M^{(2)}, N^{(2)}, U^{(2)}, V^{(2)}, X^{(2)}, Y^{(2)})$  em (4.14) e (4.16), e o conjunto de variáveis  $(M^{(\infty)}, N^{(\infty)}, U^{(\infty)}, V^{(\infty)}, X^{(\infty)}, Y^{(\infty)})$  em (4.30), as desigualdades (4.13)-(4.16) e (4.29)-(4.30) tornam-se conjuntos de LMIs e, portanto, podem ser resolvidos utilizando rotinas numéricas consagradas. Esta afirmação também é válida se o conjunto de variáveis a ser fixado for  $(S, Z)$ . A partir desta verificação, podemos então escrever o seguinte problema de otimização convexa como uma aproximação para os problemas (4.10)-(4.12):

$$\inf_{\xi^{(v)} \in \Xi^{(v)}(\mathcal{V})} \zeta_v, \quad (4.42)$$

onde  $\mathcal{V}$  é o conjunto das variáveis em  $\xi^{(v)}$  que são assumidas como sendo fixas, e  $v$  denota o caso de controle a ser aplicado, como se segue:

- $v = 2$  para o problema de controle  $\mathcal{H}_2$ , com (4.42) sujeito a (4.13)-(4.16);
- $v = \infty$  para o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , com (4.42) sujeito a (4.29)-(4.30); e
- $v = m$  para o problema de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , com (4.42) sujeito a (4.13)-(4.16) e (4.29)-(4.30).

Considerando os Teoremas 4.1, 4.2, e 4.3, e o problema de otimização estabelecido em (4.42), propomos o seguinte *algoritmo iterativo*, o qual é caracterizado por um *algoritmo de descida coordenada* baseado em LMIs.

---

**Algoritmo 4.1** Algoritmo para solução do problema de otimização (4.42).

---

**entradas:**  $\varepsilon$  (tolerância),  $k_{\max}$  (número máximo de iterações),  $(M^{(v)}, N^{(v)}, U^{(v)}, V^{(v)}, X^{(v)}, Y^{(v)})$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{M}_i$  (ver Comentários 4.2 e 4.3);

**saídas:**  $\gamma_v^*$  (custo garantido mínimo),  $K_\ell$  para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ ,  $\mathcal{F}^*$ ,  $n_k$  (número de iterações);

- 1:  $\mathcal{F}^{(0)} \leftarrow (M^{(v)}, N^{(v)}, U^{(v)}, V^{(v)}, X^{(v)}, Y^{(v)})$
- 2: **resolva** (4.42) considerando  $\mathcal{V} = \mathcal{F}^{(0)}$ ;
- 3:  $\mathcal{K}^{(0)} \leftarrow (S, Z)$ ;
- 4:  $\zeta^{(0)} \leftarrow \zeta_v$ ;
- 5:  $k \leftarrow 0$ ;
- 6: **repita**
- 7:    $k \leftarrow k + 1$ ;
- 8:   **resolva** (4.42) considerando  $\mathcal{V} = \mathcal{K}^{(k-1)}$ ;
- 9:    $\mathcal{F}^{(k)} \leftarrow (M^{(v)}, N^{(v)}, U^{(v)}, V^{(v)}, X^{(v)}, Y^{(v)})$ ;
- 10:    $\bar{\zeta}^{(k)} \leftarrow \zeta_v$ ;
- 11:   **resolva** (4.42) considerando  $\mathcal{V} = \mathcal{F}^{(k)}$ ;
- 12:    $\mathcal{K}^{(k)} \leftarrow (S, Z)$ ;
- 13:    $\zeta^{(k)} \leftarrow \zeta_v$ ;
- 14: **até que**  $(k = k_{\max})$  **ou**  $(|\zeta^{(k)} - \zeta^{(k-1)}| \leq \varepsilon)$
- 15:  $\gamma_v^* \leftarrow \sqrt{\zeta^{(k)}}$ ;
- 16:  $K_\ell \leftarrow S_\ell^{-1} Z_\ell$  para todo  $\ell \in \mathbb{M}$ , onde  $\mathcal{K}^{(k)} = (S, Z)$ ;
- 17:  $\mathcal{F}^* \leftarrow \mathcal{F}^{(k)}$ ;
- 18:  $n_k \leftarrow k$ ;
- 19: **retorne**  $(\gamma_v^*, K_\ell, \mathcal{F}^*, n_k)$ ;

---

**Comentário 4.2.** Os valores iniciais para as matrizes  $M$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $X$  e  $Y$ , requeridos pelo Algoritmo 4.1, devem ser especificados pelo usuário a fim de obter uma solução inicial factível para (4.42). Para este fim, propomos como seleção inicial destas matrizes, tanto para o caso  $\mathcal{H}_2$  quanto para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ , a seguinte escolha:

$$M_{i\ell} = N_{i\ell} = B_i, \quad U_{i\ell} = V_{i\ell} = 0_{q \times m}, \quad X_{i\ell} = Y_{i\ell} = \beta I_m,$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{M}_i$ , onde  $\beta > 0$  é um parâmetro escalar real a ser ajustado a fim de obter uma solução inicial factível para (4.42).

**Comentário 4.3.** Para a inicialização do Algoritmo 4.1 no caso do problema de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , propomos que sejam utilizados como valores iniciais de  $(M^{(m)}, N^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)}, X^{(m)}, Y^{(m)})$  os conjuntos de matrizes  $(M^{(2)}, N^{(2)}, U^{(2)}, V^{(2)}, X^{(2)}, Y^{(2)})$  e  $(M^{(\infty)}, N^{(\infty)}, U^{(\infty)}, V^{(\infty)}, X^{(\infty)}, Y^{(\infty)})$  obtidos a partir da variável de saída  $\mathcal{F}^*$  após aplicar o Algoritmo 4.1 para os casos individuais  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , respectivamente.

**Comentário 4.4.** Na inicialização do Algoritmo 4.1, uma vez obtida uma solução inicial factível para (4.42), conforme a proposta do Comentário 4.2 ou 4.3, por exemplo, todas as demais soluções de (4.42) previstas nas etapas posteriores do algoritmo serão factíveis, sendo observado  $\zeta^{(k)} \leq \bar{\zeta}^{(k)} \leq \zeta^{(k-1)}$  para  $k = 1, 2, \dots, n_k$ , caracterizando-se assim um algoritmo de descida coordenada. De fato, na hipótese de existir uma solução para (4.42) na Etapa 2 ( $k = 0$ ), então para  $k \geq 1$ , como a Etapa 8 fixa as variáveis  $(S, Z)$  com os valores obtidos na iteração  $k - 1$ , o problema (4.42) será factível com  $\bar{\zeta}^{(k)} \leq \zeta^{(k-1)}$ . Adicionalmente, na Etapa 11, fixando-se as variáveis  $(M, N, U, V, X, Y)$  com os valores obtidos na Etapa 8, o problema (4.42) será factível com  $\zeta^{(k)} \leq \bar{\zeta}^{(k)}$ .

## 4.6 Exemplos numéricos

Apresentamos quatro exemplos numéricos para para ilustrar a aplicabilidade e as vantagens dos resultados propostos. No Exemplo 4.1, ilustramos a eficácia da abordagem proposta no projeto de controladores  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  por realimentação estática de saída e verificamos o comportamento do Algoritmo 4.1 para diferentes inicializações. No Exemplo 4.2, abordamos o projeto de controladores por realimentação estática de saída e incluímos uma comparação com o método apresentado em de Oliveira, Costa e Daafouz (2020). No Exemplo 4.3, investigamos o uso da abordagem proposta para o projeto de controladores por realimentação de estados e apresentamos uma comparação de desempenho em relação a outros métodos existentes na literatura. Por fim, no Exemplo 4.4, apresentamos uma comparação com um método recente introduzido em Tao e Wu (2024), no contexto de um problema de estabilização, a fim de ilustrarmos a eficácia e relevância prática da abordagem proposta. Todas as simulações foram realizadas no ambiente MATLAB (R2024b), utilizando YALMIP (Löfberg, 2004) como “parser” e Mosek (Andersen; Andersen, 2000) como “solver”, em um computador Intel® Core™ i5-1135 (2.4 GHz), 8 GB RAM.

**Exemplo 4.1.** Neste exemplo, adaptado do Exemplo 5.1 em de Oliveira e Costa (2020a), consideramos um MJLS estocasticamente instável com dois modos de operação ( $\mathbb{N} = \{1, 2\}$ )

cuas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.4 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\ L_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \\ C_1^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1^{(2)} = D_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_1^{(2)} = E_2^{(2)} = 0_{2 \times 1}, \\ C_1^{(\infty)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1^{(\infty)} = D_2^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_1^{(\infty)} = E_2^{(\infty)} = 0_{3 \times 1}. \end{aligned}$$

A matriz de probabilidades de transição  $\mathcal{P}$ , a matriz de probabilidades de detecção  $\Upsilon$ , e a distribuição inicial  $\mu$  são dadas por

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \mu = [0.8889 \quad 0.1111].$$

Inicialmente, considerando uma tolerância  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$  e um número máximo de iterações  $k_{\max} = 100$ , inicializamos o Algoritmo 4.1 para  $\beta \in \{1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$  conforme Comentário 4.2. Os resultados obtidos para o custo garantido inicial  $(\gamma_2^{(0)}, \gamma_\infty^{(0)})$ , custo garantido mínimo  $(\gamma_2^*, \gamma_\infty^*)$ , norma real  $(\|\mathcal{G}_K\|_2, \|\mathcal{G}_K\|_\infty)$ , número de iterações  $(n_k)$  e tempo médio por iteração  $(t_k, \text{ em segundos})$  para os casos de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação estática de saída são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Comparação entre custo garantido inicial  $(\gamma_2^{(0)}, \gamma_\infty^{(0)})$ , custo garantido mínimo  $(\gamma_2^*, \gamma_\infty^*)$ , norma real  $(\|\mathcal{G}_K\|_2, \|\mathcal{G}_K\|_\infty)$ , número de iterações  $(n_k)$  e tempo médio por iteração  $(t_k, \text{ em segundos})$  para os casos de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação estática de saída do Exemplo 4.1 considerando a inicialização do Algoritmo 4.1 para  $\beta \in \{1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$ .

| $\beta$   | Controle $\mathcal{H}_2$ |              |                       |       |       | Controle $\mathcal{H}_\infty$ |                   |                            |       |       |
|-----------|--------------------------|--------------|-----------------------|-------|-------|-------------------------------|-------------------|----------------------------|-------|-------|
|           | $\gamma_2^{(0)}$         | $\gamma_2^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _2$ | $n_k$ | $t_k$ | $\gamma_\infty^{(0)}$         | $\gamma_\infty^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ | $n_k$ | $t_k$ |
| 1         | 1.198                    | 0.958        | 0.958                 | 2     | 0.50  | 2.074                         | 1.894             | 1.894                      | 2     | 0.52  |
| $10^{-1}$ | 1.111                    | 0.958        | 0.958                 | 3     | 0.62  | 2.701                         | 1.894             | 1.894                      | 3     | 0.51  |
| $10^{-2}$ | 2.187                    | 0.958        | 0.958                 | 4     | 0.54  | 7.644                         | 1.894             | 1.894                      | 3     | 0.46  |
| $10^{-3}$ | 6.455                    | 0.958        | 0.958                 | 4     | 0.47  | 23.887                        | 1.894             | 1.894                      | 3     | 0.48  |
| $10^{-4}$ | 20.221                   | 0.958        | 0.958                 | 4     | 0.48  | 75.426                        | 1.894             | 1.894                      | 3     | 0.48  |

Fonte: Autor.

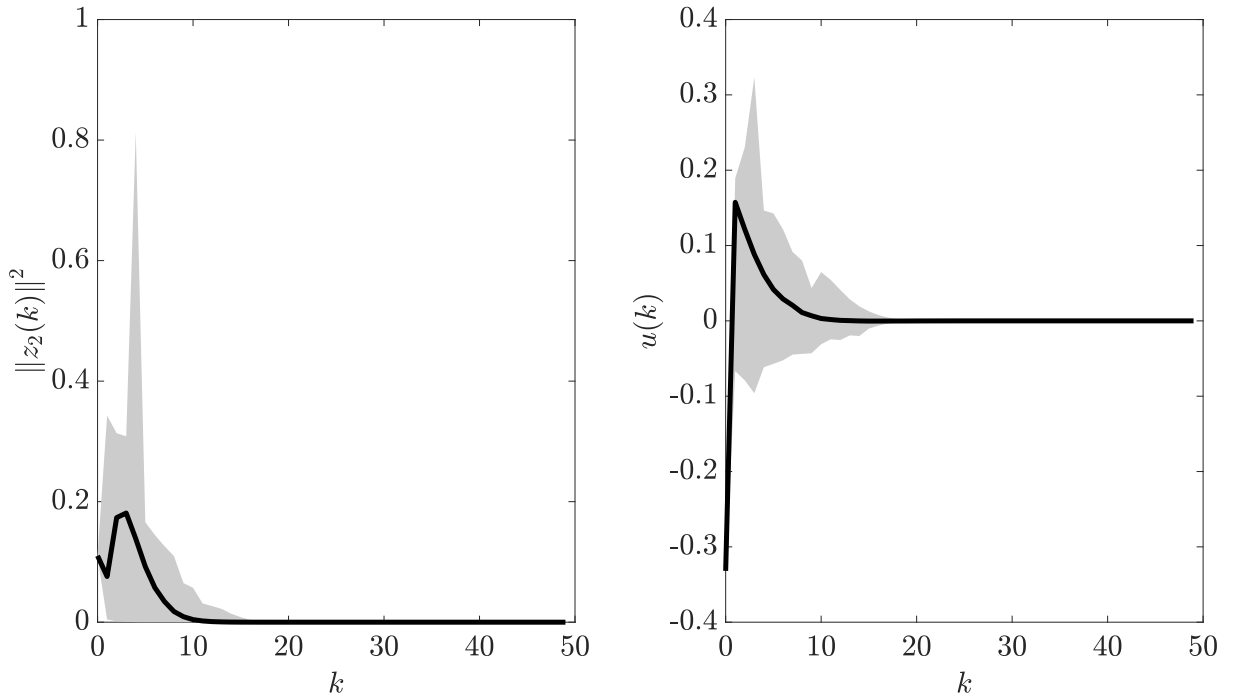
Notamos na Tabela 4 que, para este exemplo, o valor do parâmetro  $\beta$  utilizado influenciou nos valores obtidos para o custo garantido inicial e o número de iterações. Por

outro lado, podemos observar que não houve diferenças quanto aos valores obtidos para o custo garantido mínimo e para a norma real. Adotando  $\beta = 1$ , obtemos os seguintes controladores para os casos de controle  $\mathcal{H}_2 (K^{(2)})$  e  $\mathcal{H}_\infty (K^{(\infty)})$ :

$$\begin{bmatrix} K_1^{(2)} \\ K_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3336 \\ -0.3288 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} K_1^{(\infty)} \\ K_2^{(\infty)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4478 \\ -0.4362 \end{bmatrix}.$$

Com o objetivo de validar os controladores obtidos, foi realizada, para cada caso de controle, uma simulação de Monte Carlo com 500 realizações e horizonte de 50 passos ( $0 \leq k \leq 50$ ), e estado inicial  $x_0 = 0$ . No caso  $\mathcal{H}_2$ , o distúrbio  $w(k)$  foi definido como um impulso unitário em  $k = 0$ , enquanto no caso  $\mathcal{H}_\infty$  adotou-se  $w(k) = \cos(0.1k)e^{-0.1k}$ . Os valores médios ao longo do tempo de  $\|z_2(k)\|^2$  e  $u(k)$ , bem como a região que engloba todas as trajetórias resultantes da simulação, são apresentados na Figura 4. Os resultados correspondentes ao controle  $\mathcal{H}_\infty$  são mostrados na Figura 5.

Figura 4 – Valores médios de  $\|z_2(k)\|^2$  e  $u(k)$  ao longo do tempo (curvas em preto) obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 500 realizações, considerando o caso de controle  $\mathcal{H}_2$  para o Exemplo 4.1. A região em cinza representa todas as trajetórias resultantes da simulação.

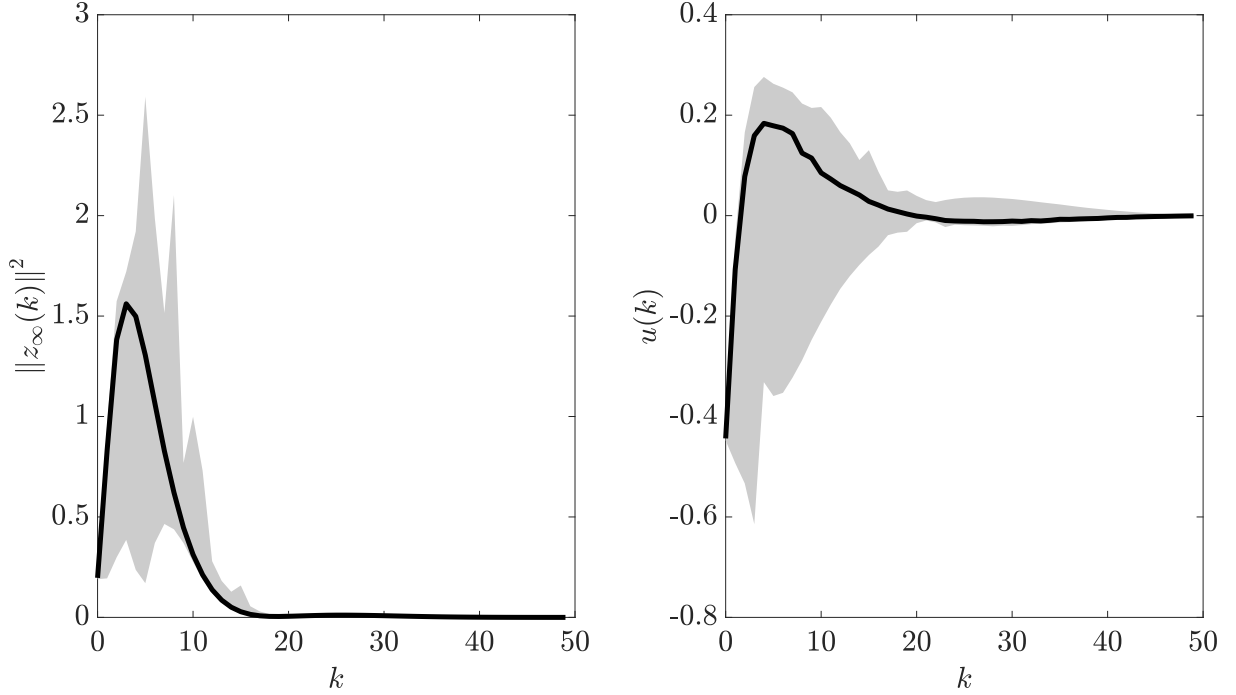


Fonte: Autor.

As normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  estimadas a partir das simulações resultaram em 0.948 e 1.586, respectivamente. Como esperado, esses valores são inferiores aos limitantes teóricos  $\gamma_2^* = 0.958$  e  $\gamma_\infty^* = 1.894$  apresentados na Tabela 4 para  $\beta = 1$ .

**Exemplo 4.2.** Neste exemplo, adotamos uma versão modificada de um modelo de aeronave de decolagem e aterrissagem vertical (do inglês “vertical take-off and landing”, VTOL)

Figura 5 – Valores médios de  $\|z_\infty(k)\|^2$  e  $u(k)$  ao longo do tempo (curvas em preto) obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 500 realizações, considerando o caso de controle  $\mathcal{H}_\infty$  para o Exemplo 4.1. A região em cinza representa todas as trajetórias resultantes da simulação.



Fonte: Autor.

abordado em de Oliveira e Costa (2020a). As entradas de controle são o ângulo de passo coletivo e o ângulo de passo cíclico longitudinal das pás. Os estados são a velocidade horizontal, a velocidade vertical, a taxa de arfagem e o ângulo de arfagem. As matrizes nominais do sistema, denotadas por  $(A_d, B_d)$ , estão presentes em de Oliveira e Costa (2020a) e são dadas por

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.9964 & 0.0026 & -0.0004 & -0.0460 \\ 0.0045 & 0.9037 & -0.0188 & -0.3834 \\ 0.0098 & 0.0339 & 0.9383 & 0.1302 \\ 0.0005 & 0.0017 & 0.0968 & 1.0067 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.0445 & 0.0167 \\ 0.3407 & -0.7249 \\ -0.5278 & 0.4214 \\ -0.0268 & 0.0215 \end{bmatrix}.$$

Adicionalmente, adotamos  $L_d = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$ , ou seja, o controlador tem acesso somente às velocidades horizontal e vertical, as quais estão sujeitas a ruídos de medição  $H_d = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} & I_2 \end{bmatrix}$ . Com uma abordagem semelhante ao trabalho em de Oliveira e Costa (2020b), consideramos que o sistema está sujeito a falhas do atuador e que as medições de velocidade também podem ser perturbadas. Neste cenário, temos três modos de operação ( $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ ), como se segue:  $\theta(k) = 1$  é o modo de operação nominal, com  $B_1 = B_d$  e  $L_1 = L_d$ ;  $\theta(k) = 2$  corresponde ao caso em que os atuadores estão com defeito, o qual é modelado por uma redução na eficácia do atuador, tal que  $B_2 = 0.5B_d$  e  $L_2 = L_d$ ; e  $\theta(k) = 3$  é o caso no qual as medições de velocidade não estão corretas, de modo que  $B_3 = B_d$  e  $L_3 = 0.5L_d$ .



Adotamos  $A_i = A_d$  e  $H_i = H_d$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Adicionalmente, assumimos que os estados do sistema estão sujeitos a ruídos tal que  $J_i = \begin{bmatrix} I_4 & 0_{4 \times 2} \end{bmatrix}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . A matriz de probabilidades de transição  $\mathcal{P}$ , a matriz de probabilidades de detecção  $\Upsilon$ , e a distribuição inicial  $\mu$  são dadas por

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \mu = [0.6222 \quad 0.2000 \quad 0.1778].$$

Por fim, adotamos

$$C_i^{(2)} = C_i^{(\infty)} = \begin{bmatrix} I_4 \\ 0_{2 \times 4} \end{bmatrix}, \quad D_i^{(2)} = D_i^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad E_i^{(2)} = E_i^{(\infty)} = 0_{6 \times 6},$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ . O objetivo deste exemplo é projetar controladores por realimentação estática de saída para os casos  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ , e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Para todas as simulações, consideramos a tolerância  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  e o número máximo de iterações  $k_{\max} = 2000$ .

Inicialmente, investigamos os problemas de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  individualmente. Para a inicialização do algoritmo em de Oliveira, Costa e Daafouz (2020), fornecemos ganhos de realimentação de estados estabilizantes  $F^{(2)}$  e  $F^{(\infty)}$  (na notação do autor citado) obtidos através dos Lemas 1 e 2 em de Oliveira e Costa (2018a), respectivamente. Referente ao Algoritmo 4.1, a sua inicialização segue o Comentário 4.2, onde o parâmetro escalar  $\beta > 0$  é procurado em um intervalo espaçado logaritmicamente. Nas simulações apresentadas, esta procura foi realizada sobre cinco valores espaçados logaritmicamente dentro do intervalo  $[10^{-3}, 10]$ , e uma solução inicial factível foi obtida com  $\beta = 1$  para ambos os casos ( $v = 2$  e  $v = \infty$ , respectivamente). Os custos garantidos mínimos ( $\gamma_2^*$ ,  $\gamma_\infty^*$ ), as normas reais ( $\|\mathcal{G}_K\|_2$ ,  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty$ ), o número de iterações ( $n_k$ ) e o tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) obtidos para os casos de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  são mostrados na Tabelas 5 e 6, respectivamente. Notamos nas Tabelas 5 e 6 que a abordagem proposta supera o método em de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) em todas as métricas para ambos os casos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , exigindo consistentemente menos iterações e um tempo total de execução inferior, mesmo que o tempo médio por iteração nem sempre seja menor.

Passamos agora para o problema de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Inicialmente, adotamos  $\gamma_\infty = 72$ . Considerando o Comentário 4.3, inicializamos o Algoritmo 4.1 recuperando os valores das variáveis  $\mathcal{F}^*$  retornadas anteriormente para os casos individuais  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Para o método em de Oliveira, Costa e Daafouz (2020), considerando o seu Comentário 4, as tentativas de obter ganhos de realimentação de estados estabilizantes a partir dos trabalhos de Costa, Fragoso e Todorov (2015), Todorov, Fragoso e Costa (2018) e de Oliveira e Costa (2018a) que produzam uma solução inicial factível na primeira etapa de seu algoritmo falham. Entretanto, ao aplicarmos um procedimento similar ao proposto em nosso Comentário 4.3, ou seja, ao recuperarmos os valores das variáveis  $F^{(2)}$  e  $F^{(\infty)}$

Tabela 5 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ), norma real ( $\|\mathcal{G}_K\|_2$ ), número de iterações ( $n_k$ ) e tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) para o caso de controle  $\mathcal{H}_2$  por realimentação estática de saída do Exemplo 4.2 usando de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) e Algoritmo 4.1.

| Método                              | $\gamma_2^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _2$ | $n_k$ | $t_k$ |
|-------------------------------------|--------------|-----------------------|-------|-------|
| de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) | 12.8857      | 12.6233               | 159   | 1.10  |
| Algoritmo 4.1( $v = 2, \beta = 1$ ) | 12.6019      | 12.6019               | 19    | 1.57  |

Fonte: Autor.

Tabela 6 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_\infty^*$ ), norma real ( $\|\mathcal{G}_K\|_\infty$ ), número de iterações ( $n_k$ ) e tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) para o caso de controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação estática de saída do Exemplo 4.2 usando de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) e Algoritmo 4.1.

| Método                                   | $\gamma_\infty^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ | $n_k$ | $t_k$ |
|------------------------------------------|-------------------|----------------------------|-------|-------|
| de Oliveira, Costa e Daafouz (2020)      | 70.1001           | 69.3193                    | 1719  | 3.65  |
| Algoritmo 4.1( $v = \infty, \beta = 1$ ) | 68.6571           | 68.6571                    | 172   | 1.49  |

Fonte: Autor.

obtidos anteriormente para os casos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , respectivamente, o algoritmo em de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) é inicializado com sucesso. Os custos garantidos mínimos ( $\gamma_2^*$ ), as normas reais ( $\|\mathcal{G}_K\|_2, \|\mathcal{G}_K\|_\infty$ ), o número de iterações ( $n_k$ ) e o tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) obtidos para o caso de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  são apresentados na Tabela 7. A partir dos resultados da Tabela 7, observamos novamente que a abordagem proposta superou o método em de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) em todas as métricas, com menos iterações, menor tempo médio por iteração e menor tempo total de execução. Um aspecto relevante que auxilia a explicar este desempenho superior é que o valor de  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty$  obtido pelo Algoritmo 4.1 é significativamente mais próximo do limitante superior prescrito  $\gamma_\infty$  quando comparado com o resultado produzido pelo método em de Oliveira, Costa e Daafouz (2020).

**Exemplo 4.3.** Consideramos o sistema apresentado em Costa e Marques (1998), o qual é modelado por dois modos de operação,  $\mathbb{N} = \{1, 2\}$ . As matrizes do sistema são dadas a seguir, para todo  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$A_i = \begin{bmatrix} 0.9974 & 0.0539 \\ -0.1078 & 1.1591 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0539 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.1078 \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_i^{(2)} = C_i^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_i^{(2)} = D_i^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_i^{(2)} = E_i^{(\infty)} = 0_{2 \times 2}.$$

Tabela 7 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ), normas reais ( $\|\mathcal{G}_K\|_2$ ,  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty$ ), número de iterações ( $n_k$ ) e tempo médio por iteração ( $t_k$ , em segundos) para o caso de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  por realimentação estática de saída e  $\gamma_\infty = 72$  do Exemplo 4.2 usando de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) e Algoritmo 4.1.

| Método                              | $\gamma_2^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _2$ | $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ | $n_k$ | $t_k$ |
|-------------------------------------|--------------|-----------------------|----------------------------|-------|-------|
| de Oliveira, Costa e Daafouz (2020) | 13.2175      | 12.7853               | 71.4364                    | 122   | 4.07  |
| Algoritmo 4.1 ( $v = m$ )           | 12.6860      | 12.6860               | 71.9999                    | 29    | 2.97  |

Fonte: Autor.

A matriz de probabilidades de transição  $\mathcal{P}$  e a distribuição inicial  $\mu$  são definidas por

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Consideramos que a matriz de probabilidades de detecção  $\Upsilon$  tem a seguinte estrutura:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \rho & 1 - \rho \\ 1 - \rho & \rho \end{bmatrix},$$

onde  $\rho \in [0, 1]$  denota a probabilidade de detecção correta do modo de operação  $\theta(k)$ . Notamos que para  $\rho = 0.5$  o detector é o pior possível, ou seja, dada uma observação  $\hat{\theta}(k)$ , o detector não consegue distinguir entre os dois modos de operação do sistema. Desse modo, objetivando o projeto de controladores por realimentação de estados, adotamos para este exemplo o cenário onde  $\rho = 0.5$  e analisamos os casos de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Adicionalmente, para as simulações utilizando o Algoritmo 4.1, adotamos  $L_i = I_2$  e  $H_i = 0_{2 \times 2}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ , e impomos uma tolerância  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  com um número máximo de iterações  $k_{max} = 100$ .

Inicialmente, consideramos o problema de controle  $\mathcal{H}_2$ . O Algoritmo 4.1 é inicializado com  $v = 2$ , onde o parâmetro escalar  $\beta$  é procurado no mesmo intervalo espaçado logaritmicamente  $[10^{-3}, 10]$  utilizado no Exemplo 4.2. Neste caso, uma solução inicial factível foi obtida com  $\beta = 0.01$ , como descrito no Comentário 4.2. Os resultados obtidos são  $\gamma_2^* \approx 14.6552$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_2 \approx 14.6552$ . A Tabela 8 apresenta uma comparação entre a abordagem proposta, a Proposição 3.1, o Lema 1 em de Oliveira e Costa (2018a) e o método em Costa, Fragoso e Todorov (2015). Como mostrado na Tabela 8, a abordagem proposta produz resultados menos conservadores do que a Proposição 3.1 e os métodos existentes.

A seguir, tratamos o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Empregando o Algoritmo 4.1 com  $v = \infty$ , onde o parâmetro escalar  $\beta$  é procurado sobre o mesmo intervalo espaçado logaritmicamente  $[10^{-3}, 10]$  no caso  $\mathcal{H}_2$ . Uma solução inicial factível foi obtida com  $\beta = 0.01$ . Após o término das iterações do Algoritmo 4.1, obtemos  $\gamma_\infty^* \approx 57.5583$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty \approx 57.5583$ . Os resultados são comparados com aqueles produzidos pelo Lema 2 em de Oliveira e Costa

Tabela 8 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ) e norma real ( $\|\mathcal{G}_K\|_2$ ) para o caso de controle  $\mathcal{H}_2$  por realimentação de estados do Exemplo 4.3 usando Costa, Fragoso e Todorov (2015), Lema 1 em de Oliveira e Costa (2018a), Proposição 3.1 e Algoritmo 4.1.

| Método                                                  | $\gamma_2^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _2$ | $n_k$ | $t_k$ |
|---------------------------------------------------------|--------------|-----------------------|-------|-------|
| Costa, Fragoso e Todorov (2015)                         | 18.9576      | 15.4829               | -     | -     |
| Lema 1 em de Oliveira e Costa (2018a)                   | 16.2493      | 14.7862               | -     | -     |
| Proposição 3.1                                          | 15.0648      | 14.6657               | -     | -     |
| Algoritmo 4.1 <sub>(<math>v=2, \beta=0.01</math>)</sub> | 14.6552      | 14.6552               | 8     | 0.64  |

Fonte: Autor.

(2018a) e pelo método em Todorov, Fragoso e Costa (2018), e apresentados na Tabela 9. A abordagem proposta novamente fornece melhores resultados, alcançando valores menores para o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ .

Tabela 9 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_\infty^*$ ) e norma real ( $\|\mathcal{G}_K\|_\infty$ ) para o caso de controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estados do Exemplo 4.3 usando Todorov, Fragoso e Costa (2018), Lema 2 em de Oliveira e Costa (2018a) e Algoritmo 4.1.

| Método                                                       | $\gamma_\infty^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ | $n_k$ | $t_k$ |
|--------------------------------------------------------------|-------------------|----------------------------|-------|-------|
| Lema 2 em de Oliveira e Costa (2018a)                        | 61.9813           | 58.7522                    | -     | -     |
| Todorov, Fragoso e Costa (2018)                              | 58.1303           | 57.6385                    | -     | -     |
| Algoritmo 4.1 <sub>(<math>v=\infty, \beta=0.01</math>)</sub> | 57.5583           | 57.5583                    | 23    | 0.99  |

Fonte: Autor.

Abordamos agora o problema de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , adotando o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $\gamma_\infty = 80$ . O Algoritmo 4.1 é inicializado de acordo com o procedimento descrito no Comentário 4.3. Os resultados obtidos são  $\gamma_2^* \approx 14.8375$ ,  $\|\mathcal{G}_K\|_2 \approx 14.8375$  e  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty \approx 79.9999$ . Um comparação de desempenho com o Teorema 6 em de Oliveira e Costa (2018a) é apresentada na Tabela 10, a qual mostra que a abordagem proposta produz melhores valores em todas as métricas avaliadas.

Por fim, no contexto de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , investigamos o comportamento de  $\gamma_2^*$  em função de  $\gamma_\infty$  para diferentes valores de  $\rho$ :  $\rho = 0.5$ ,  $\rho = 0.7$  e  $\rho = 0.9$ . A análise é conduzida utilizando Teorema 6 em de Oliveira e Costa (2018a) e o Algoritmo 4.1, e as curvas resultantes são mostradas na Figura 6. Como já observado em cenários similares, como em de Oliveira e Costa (2018a) e de Oliveira, Costa e Daafouz (2020), as curvas na Figura 6 exibem um típico comportamento denominado “trade-off”: à medida que

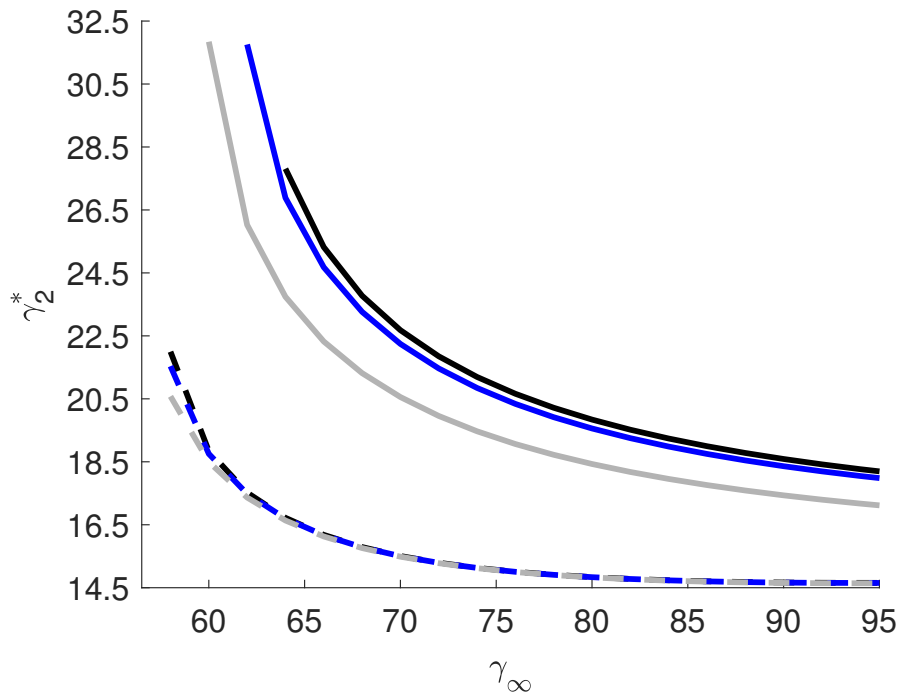
Tabela 10 – Comparação entre custo garantido mínimo ( $\gamma_2^*$ ) e normas reais ( $\|\mathcal{G}_K\|_2$ ,  $\|\mathcal{G}_K\|_\infty$ ) para o caso de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estados e  $\gamma_\infty = 80$  do Exemplo 4.3 usando Teorema 6 em de Oliveira e Costa (2018a) e Algoritmo 4.1.

| Método                                   | $\gamma_2^*$ | $\ \mathcal{G}_K\ _2$ | $\ \mathcal{G}_K\ _\infty$ | $n_k$ | $t_k$ |
|------------------------------------------|--------------|-----------------------|----------------------------|-------|-------|
| Teorema 6 em de Oliveira e Costa (2018a) | 19.8409      | 16.2681               | 71.0262                    | -     | -     |
| Algoritmo 4.1 <sub>(v=m)</sub>           | 14.8375      | 14.8375               | 79.9999                    | 10    | 1.54  |

Fonte: Autor.

$\gamma_\infty$  decresce,  $\gamma_2^*$  cresce, e vice-versa. Mais especificamente,  $\gamma_2^*$  cresce à medida que  $\gamma_\infty$  se aproxima do valor de  $\gamma_\infty^*$  correspondente ao caso  $\mathcal{H}_\infty$ , e converge para o valor de  $\gamma_2^*$  obtido para o caso  $\mathcal{H}_2$  à medida que  $\gamma_\infty \rightarrow \infty$ . Na Figura 6, podemos observar que a abordagem proposta produz de maneira consistente resultados menos conservadores ao longo de todo o intervalo de valores de  $\gamma_\infty$  quando comparada com o método em de Oliveira e Costa (2018a), indicando melhor desempenho para todos os valores considerados de  $\rho$ . Adicionalmente, as curvas geradas pela abordagem proposta estão agrupadas de forma mais próxima, sugerindo maior robustez quanto a variações no valor de  $\rho$ .

Figura 6 – Curvas *trade-off* de  $\gamma_2^*$  em função de  $\gamma_\infty$  do Exemplo 4.3 para  $\rho = 0.5$  (cor preta),  $\rho = 0.7$  (cor azul) e  $\rho = 0.9$  (cor cinza), usando o Teorema 6 em de Oliveira e Costa (2018a) (linhas contínuas) e o Algoritmo 4.1 (linhas tracejadas).



Fonte: Autor.

**Exemplo 4.4.** Neste exemplo, ilustramos a eficácia da abordagem proposta comparando-a com o método desenvolvido em Tao e Wu (2024), o qual aborda o problema de estabilização de MJLS a tempo discreto e cadeia oculta empregando realimentação estática de saída. O problema de estabilização é retirado do Exemplo 3 de Tao e Wu (2024) e consiste de um sistema modelado por dois modos de operação,  $\mathbb{N} = \{1, 2\}$ . A matriz de probabilidades de transição  $\mathcal{P}$  e a matriz de probabilidades de detecção  $\Upsilon$  são definidas como

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

As matrizes do sistema são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.2 & 1.2 \\ 1.0 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0.2 & 2.0 \\ 0.2 & 0.1 & 1.0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro real que se assume variar no intervalo de 1 a 4, com incremento de 0.01. O objetivo do problema de estabilização é determinar, para cada método, o intervalo de valores de  $\lambda$  que produzem soluções factíveis. Como este exemplo aborda somente o aspecto de estabilização, os critérios de desempenho são ignorados na abordagem proposta, e para as simulações usando o Algoritmo 4.1, adotamos  $v = 2$ ,  $\beta = 0.0001$ ,  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ ,  $k_{\max} = 5$ ,  $J_i = D_i^{(2)} = E_i^{(2)} = 0_{3 \times 1}$ ,  $H_i = 0$  e  $C_i^{(2)} = I_3$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . A Tabela 11 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos usando o Algoritmo 4.1 e aqueles constantes em Tao e Wu (2024), o qual inclui o método em de Oliveira, Costa e Daafouz (2020). Como pode ser visto na Tabela 11, a abordagem proposta supera os métodos em Tao e Wu (2024) e de Oliveira, Costa e Daafouz (2020), obtendo um intervalo de valores factíveis de  $\lambda$  maior.

Tabela 11 – Comparação dos intervalos de valores factíveis de  $\lambda$  para o Exemplo 4.4 usando de Oliveira, Costa e Daafouz (2020), Tao e Wu (2024) e Algoritmo 4.1.

| Método                                   | Intervalo de valores factíveis de $\lambda$ |
|------------------------------------------|---------------------------------------------|
| de Oliveira, Costa e Daafouz (2020)      | [1, 2.52]                                   |
| Algoritmo 1 de Tao e Wu (2024)           | [1, 2.72]                                   |
| Algoritmos 1&2 de Tao e Wu (2024)        | [1, 2.99]                                   |
| Algoritmo 4.1 <sub>(v=2, β=0.0001)</sub> | [1, 3.24]                                   |

Fonte: Autor.

## 5 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foi investigado o problema de projeto de controladores para sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto sob informação parcial da cadeia de Markov. A modelagem adotada, baseada em um modelo oculto de Markov, permitiu representar de forma realista situações em que o modo de operação do sistema não é diretamente observável, mas apenas estimado por meio de um detector.

Inicialmente, foram propostas condições de síntese de controladores por realimentação de estados capazes de garantir limitantes de desempenho para os índices  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\ell_2$ - $\ell_\infty$ . Em seguida, o estudo foi estendido ao caso de realimentação estática de saída, sendo apresentadas condições suficientes para os problemas de controle  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

Como as condições de síntese resultam em desigualdades matriciais bilineares, foi desenvolvida uma estratégia iterativa baseada em um algoritmo de descida coordenada, o qual fornece soluções subótimas de forma sistemática. As propriedades do algoritmo asseguram a monotonicidade decrescente dos limitantes superiores dos índices de desempenho ao longo das iterações.

Os resultados numéricos apresentados confirmam a eficácia das abordagens propostas, demonstrando desempenho superior ou comparável ao de métodos existentes na literatura. Assim, as contribuições desta dissertação ampliam o conjunto de ferramentas disponíveis para o projeto de controladores de sistemas com saltos Markovianos e cadeia oculta, fornecendo uma estrutura computacionalmente viável para diferentes critérios de desempenho.

Possíveis contribuições futuras incluem:

- Investigação de técnicas alternativas ao algoritmo de descida coordenada. Como as condições de síntese são expressas em termos de BMIs, o emprego do algoritmo de descida coordenada apresenta limitações inerentes, uma vez que não há garantias formais de convergência para soluções ótimas locais ou globais. Esse aspecto evidencia a importância de explorar métodos alternativos de resolução de BMIs;
- Desenvolvimento de novas estratégias de inicialização dos algoritmos iterativos. Embora a estratégia proposta para a escolha das matrizes iniciais tenha apresentado resultados promissores, sua formulação ainda é de natureza empírica. Nesse contexto, a elaboração de métodos de inicialização com garantias formais de factibilidade,

ou a demonstração teórica de que a estratégia proposta neste trabalho assegura uma solução inicial factível, representa um avanço relevante a ser explorado em investigações futuras; e

- Extensão da abordagem proposta aos problemas de controle por realimentação dinâmica de saída e de filtragem, de modo a ampliar sua aplicabilidade a estruturas de controle e estimação mais gerais.



## REFERÊNCIAS

- ABERKANE, S. *et al.* Output feedback control of a class of stochastic hybrid systems. **Automatica**, v. 44, n. 5, p. 1325–1332, maio 2008.
- ANDERSEN, E. D.; ANDERSEN, K. D. The Mosek interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. *In*: FRENK, H. *et al.* (ed.). **High performance optimization**. Boston, MA: Springer, 2000. p. 197–232. ISBN 978-1-4757-3216-0.
- BOUKAS, E. K. **Stochastic switching systems: analysis and design**. New York: Birkhäuser Basel, 2006.
- CARVALHO, L. P.; DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V.  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  simultaneous fault detection and control for Markov jump linear systems with partial observation. **IEEE Access**, v. 8, p. 11979–11990, 2020.
- CARVALHO, L. P.; PALMA, J. M. *et al.* Gain scheduled fault detection filter for Markovian jump linear system with nonhomogeneous Markov chain. **Mathematics**, v. 11, n. 7, p. 1–21, 2023. Article nº 1713.
- CHANG, X.-H.; LI, Z.-M.; PARK, J. H. Fuzzy generalized  $\mathcal{H}_2$  filtering for nonlinear discrete-time systems with measurement quantization. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems**, v. 48, n. 12, p. 2419–2430, dez. 2018.
- CHANG, X.-H.; LIU, R.-R.; PARK, J. H. A further study on output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control for discrete-time systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, v. 67, n. 2, p. 305–309, fev. 2020.
- CHANG, X.-H.; YANG, G.-H. New results on output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control for linear discrete-time systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 59, n. 5, p. 1355–1359, maio 2014.
- CHE, W.-W.; WANG, J.-L. Static output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control for discrete-time Markov jump linear systems. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION, 8th., 2010, Xiamen, China. **Proceedings**. [Piscataway]: IEEE, 2010. p. 2278–2283.
- COSTA, O. L. V.; DE OLIVEIRA, A. M. Static output energy-to-peak control for semi-Markov jump linear systems with phase-type distributions and hidden modes. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 69, n. 11, p. 7877–7884, nov. 2024.

COSTA, O. L. V.; DE OLIVEIRA, A. M. *et al.* Energy-to-peak static output control for continuous-time hidden Markov jump linear systems. **IFAC-PapersOnLine**, v. 56, n. 2, p. 8141–8146, 2023. Presented at 22nd World Congress of the International Federation of Automatic Control, Jul. 9-14, 2023, Yokohama, Japan.

COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. **Discrete-time Markov jump linear systems**. New York: Springer-Verlag, 2005.

COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; TODOROV, M. G. A detector-based approach for the  $\mathcal{H}_2$  control of Markov jump linear systems with partial information. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 60, n. 5, p. 1219–1234, maio 2015.

COSTA, O. L. V.; MARQUES, R. P. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -control of discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 43, n. 1, p. 95–100, jan. 1998.

DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V.  $\mathcal{H}_\infty$ -filtering for Markov jump linear systems with partial information on the jump parameter. **IFAC Journal of Systems and Control**, v. 1, p. 13–23, set. 2017.

DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V. An iterative approach for the discrete-time dynamic control of Markov jump linear systems with partial information. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 30, n. 2, p. 495–511, jan. 2020.

DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control of hidden Markov jump systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 28, n. 4, p. 1261–1280, mar. 2018.

DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filtering for Markov jump linear systems. **International Journal of Systems Science**, v. 49, n. 15, p. 3023–3036, 2018.

DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V. On the  $\mathcal{H}_2$  static output feedback control for hidden Markov jump linear systems. **Annals of the Academy of Romanian Scientists Series on Mathematics and Its Application**, v. 12, n. 1-2, p. 405–424, 2020.

DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V.; DAAFOUZ, J. Suboptimal  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  static output feedback control of hidden Markov jump linear systems. **European Journal of Control**, v. 51, p. 10–18, jan. 2020.

DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V.; DOS SANTOS, S. R. B. *et al.* Reduced-order energy-to-peak filtering for hidden Markov jump linear systems. **Journal of Franklin Institute**, v. 360, n. 1, p. 251–276, jan. 2023.

- DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V.; GABRIEL, G. W. Robust static output feedback control for hidden Markov jump linear systems. **International Journal of Systems Science**, v. 53, n. 6, p. 1298–1316, 2022.
- DE OLIVEIRA, A. M.; COSTA, O. L. V.; GABRIEL, G. W.; DOS SANTOS, S. R. B. Energy-to-peak reduced-order filtering for continuous-time Markov jump linear systems with partial information on the jump parameter. **IEEE Access**, v. 10, p. 79124–79133, jul. 2022.
- DO VAL, J. B. R.; GEROMEL, J. C.; GONÇALVES, A. P. C. The  $\mathcal{H}_2$ -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state. **Automatica**, v. 38, n. 2, p. 343–349, fev. 2002.
- DOLGOV, M.; HANEBECK, U. D. Static output-feedback control of Markov jump linear systems without mode-observation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 62, n. 10, p. 5401–5406, out. 2017.
- DOS SANTOS, S. R. B. *et al.* Multi-objective control of phase-type semi-Markov jump linear systems applied to software-in-the-loop aircraft control. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 35, n. 14, p. 6071–6090, set. 2025.
- DRAGAN, V.; MOROZAN, T.; STOICA, A. M. **Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems**. New York: Springer, 2013.
- DUCARD, G. J. J. **Fault-tolerant flight control and guidance systems: practical methods for small unmanned aerial vehicles**. 1. ed. London: Springer, 2009.
- EL GHAOU, L.; OUSTRY, F.; AITRAMI, M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 42, n. 8, p. 1171–1176, ago. 1997.
- GONÇALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C.  $\mathcal{H}_\infty$  robust and networked control of discrete-time MJLS through LMIs. **Journal of Franklin Institute**, v. 349, n. 6, p. 2171–2181, ago. 2012.
- GONÇALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements. **Signal Processing**, v. 90, n. 10, p. 2842–2850, out. 2010.
- GOYAL, J. K.; AGGARWAL, S. *et al.* An improved output feedback controller design for linear discrete-time systems using a matrix decomposition method. **Asian Journal of Control**, v. 25, n. 2, p. 769–782, mar. 2023.

- GOYAL, J. K.; GHOSH, S.; KAMAL, S. New LMI conditions for  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$  output feedback control of linear discrete-time systems. **International Journal of Control**, v. 94, n. 6, p. 1716–1722, 2021.
- GRANATO, M. A.; COSTA, O. L. V. An improved iterative approach for static output feedback control of discrete-time hidden Markov jump linear systems. **IEEE Access**, v. 13, p. 165372–165385, 2025.
- GRANATO, M. A.; COSTA, O. L. V. Um método iterativo para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estados de sistemas lineares com saltos Markovianos e cadeia oculta. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE*, 2025, São João del Rei, MG. **SBAI**. [S. l.: s. n.], 2025. p. 1–6.
- LIANG, X.; ZHANG, X.  $\mathcal{H}_\infty$  control for discrete-time Markov jump linear systems via static output feedback. **IEEE Access**, v. 7, p. 145363–145370, 2019.
- LIN, Y.; SHI, T. Static output feedback  $l_2$ – $l_\infty$  asynchronous control of Markov jump systems under dynamic event-triggered scheme. **IEEE Access**, v. 10, p. 97748–97757, set. 2022.
- LIU, X. *et al.* Event-triggered  $\mathcal{L}_2$ – $\mathcal{L}_\infty$  control for discrete-time Markov jump systems with DoS attacks and exogenous disturbance. **International Journal of Systems Science**, v. 55, n. 1, p. 16–32, 2024.
- LÖFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER-AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN*, 2004, Taipei, Taiwan. **Proceedings**. [Piscataway]: IEEE, 2004. p. 284–289.
- MORAIS, C. F. *et al.*  $\mathcal{H}_\infty$  static output feedback control of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probability matrix. *In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE*, 2014, Portland, USA. **ACC: proceedings**. [Piscataway]: IEEE, 2014. p. 489–494.
- MORAIS, C. F. *et al.* An LMI approach for  $\mathcal{H}_2$  dynamic output feedback control of discrete-time Markov systems with uncertain probabilities. *In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER-AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN*, 19–22 Sept. 2016, Buenos Aires, Argentina. **CACSD 2016**. [Piscataway]: IEEE, 2016. p. 1446–1451.
- MORAIS, C. F. *et al.* Reduced-order dynamic output feedback control of uncertain discrete-time Markov jump linear systems. **International Journal of Control**, v. 90, n. 11, p. 2368–2383, 2017.
- OLIVEIRA, R. C. L. F. *et al.* Mode-independent  $\mathcal{H}_2$ -control of a DC motor modeled as a Markov jump linear system. **IEEE Transactions of Control Systems Technology**, v. 22, n. 5, p. 1915–1919, 2014.

- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. An efficient numerical solution for  $\mathcal{H}_2$  static output feedback synthesis. *In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE*, 6th., 4-7 Sept. 2001, Porto, Portugal. **ECC 2001**: proceedings. [Piscataway]: IEEE, 2001. p. 3800–3805.
- ROSS, S. M. **Introduction to probability models**. 10. ed. San Diego, CA: Academic Press, 2010.
- SHEN, M.; YE, D.; FEI, S. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  static output control of discrete Markov jump linear systems with norm bounded uncertainties. **IET Control Theory and Applications**, v. 8, n. 15, p. 1449–1455, out. 2014.
- SHU, Z.; LAM, J.; XIONG, J. Static output-feedback stabilization of discrete-time Markovian jump linear systems: a system augmentation approach. **Automatica**, v. 46, n. 4, p. 687–694, abr. 2010.
- SIMON, E. *et al.* LMIs-based coordinate descent method for solving BMIs in control design. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 44, n. 1, p. 10180–10186, 2011. Presented at 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control, Aug. 28-Sept. 2, 2011, Milano, Italy.
- SU, L.; YE, D. Static output feedback control for discrete-time hidden Markov jump systems against deception attacks. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 29, n. 18, p. 6616–6637, dez. 2019.
- TAO, Y.-Y.; WU, Z.-G. Asynchronous static output-feedback control of Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 69, n. 4, p. 2453–2460, abr. 2024.
- TODOROV, M. G. A new approach to the energy-to-peak performance analysis of continuous-time Markov jump linear systems. **IEEE Control Systems Letters**, v. 8, p. 1024–1029, maio 2024.
- TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. A new look at the robust control of discrete-time Markov jump linear systems. **International Journal of Control**, v. 89, n. 3, p. 518–534, 2016.
- TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. New methods for mode-independent robust control of Markov jump linear systems. **Systems & Control Letters**, v. 90, p. 38–44, 2016.
- TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D.; COSTA, O. L. V. Detector-based  $\mathcal{H}_\infty$  results for discrete-time Markov jump linear systems with partial observations. **Automatica**, v. 91, p. 159–172, maio 2018.

WANG, S.; WU, Z.-G. Asynchronous energy-to-peak filtering for restricted Markov jump systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 69, n. 5, p. 2823–2838, maio 2024.

WANG, Y.; ZEMOUCHE, A.; RAJAMANI, R. A sequential LMI approach to design a BMI-based multi-objective nonlinear observer. **European Journal of Control**, v. 44, p. 50–57, nov. 2018.

XU, Z. *et al.* Energy-to-peak filtering of semi-Markov jump systems with mismatched modes. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 65, n. 10, p. 4356–4361, out. 2020.

ZABALA, Y. A.; COSTA, O. L. V. Static output constrained control for discrete-time hidden Markov jump linear systems. **IEEE Access**, v. 8, p. 62969–62979, 2020.

ZHANG, Y. M.; JIANG, J. Active fault-tolerant control system against partial actuator failures. **IEE Proceedings: Control Theory and Applications**, v. 149, n. 1, p. 95–104, jan. 2002.

ZHANG, Z.; ZHANG, Z.; YANG, S. Robust reduced-order  $l_2$ – $l_\infty$  filtering for network-based discrete-time linear systems. **Signal Processing**, v. 109, p. 110–118, 2015.