

MARINHA DO BRASIL
DIRETORIA DE ENSINO DA MARINHA
CENTRO DE INSTRUÇÃO ALMIRANTE ALEXANDRINO

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO AVANÇADO EM
GUERRA ELETRÔNICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

DETECÇÃO DE SINAIS RADAR *CHIRP* UTILIZANDO A TRANSFORMADA
FRACIONÁRIA DE FOURIER



PRIMEIRO-TENENTE MAURÍCIO HENRIQUE ERRUAS MELLO

Rio de Janeiro
2025

PRIMEIRO-TENENTE MAURÍCIO HENRIQUE ERRUAS MELLO
DETECÇÃO DE SINAIS RADAR *CHIRP* UTILIZANDO A TRANSFORMADA
FRACIONÁRIA DE FOURIER

Monografia apresentada ao Centro de Instrução Almirante
Alexandrino como requisito parcial à conclusão do Curso de
Aperfeiçoamento Avançado em Guerra Eletrônica.

Orientadores:

Dra. Sc. Aline de Oliveira P. Silva
Dr. Sc. Rodrigo da Silva Moreira

Rio de Janeiro

2025

DETECÇÃO DE SINAIS RADAR *CHIRP* UTILIZANDO A TRANSFORMADA
FRACIONÁRIA DE FOURIER

Primeiro-Tenente Maurício Henrique Erruas Mello

MONOGRAFIA APRESENTADA AO CENTRO DE INSTRUÇÃO ALMIRANTE
ALEXANDRINO COMO REQUISITO PARCIAL À CONCLUSÃO DO CURSO DE
APERFEIÇOAMENTO AVANÇADO EM GUERRA ELETRÔNICA.

Aprovada por:

Dra. Aline de Oliveira P. Silva, D.Sc., IPqM

Dr. Rodrigo da Silva Moreira, D.Sc., IPqM

Dr. Fabian David Backx, D.Sc., IPqM

Prof. Dr. Leonardo Bonato Felix, D.Sc., UFV

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

Outubro de 2025

Mello, Maurício Henrique Erruas

Detecção de Sinais Radar *Chirp* Utilizando a Transformada Fracionária de Fourier/Maurício Henrique Erruas Mello – Rio de Janeiro: MB/CIAA, 2025.

XIV, 86 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Dra. Aline de Oliveira P. Silva e Dr. Rodrigo da Silva Moreira.

Trabalho de Conclusão de Curso – MB/CIAA/Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Guerra Eletrônica, 2025.

Referências Bibliográficas: p. 85-100.

1. Guerra Eletrônica. 2. MAGE. 3. Sinais Eletromagnéticos. 4. Detecção. 5. Transformada Fracionária de Fourier.
- I. Silva, Aline de Oliveira P./Moreira, Rodrigo da Silva.
- II. Marinha do Brasil, CIAA, Curso de Aperfeiçoamento em Guerra Eletrônica.
- III. Detecção de Sinais Radar *Chirp* Utilizando a Transformada Fracionária de Fourier.

*A Kátia, Gilberto, Rafaella, Fábio e Thais –
por servirem de alicerce e inspiração a cada
descoberta e por apresentarem o esforço
como a ferramenta necessária e suficiente às
batalhas diárias.*

AGRADECIMENTO

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, Inteligência Suprema e causa primária de todas as coisas e ao eterno mestre Jesus, fonte infindável de indulgência e amor, que nos ensina diariamente lições de valiosa importância.

Aos meus pais, Kátia e Gilberto, que me ensinaram os primeiros aprendizados nessa vida, me preparando para os desafios rotineiros ao me apresentarem as verdadeiras virtudes, meus mais sinceros agradecimentos. À Rafaella, minha esposa, que desempenha papel essencial para o sucesso e felicidade de meus projetos, apoiando constantemente com o amor e o carinho incondicionais necessários para sobrepujar os desafios que se apresentam. Agradeço-lhe amorosamente por ser o alicerce do meu sucesso e felicidade. Ao Fábio, com quem aprendo por meio do exemplo fraternal desde o primeiro dia de minha vida, a eterna e mais sincera gratidão que um irmão mais novo pode sentir, por tudo que fez até hoje, e à Thaís, sua esposa, que com inocente alegria e verdadeira bondade sempre abrilhanta a companhia de quem está em sua presença.

Meus mais profundos e agradecidos cumprimentos à minha orientadora, D.Sc. Aline de Oliveira P. Silva, bem como ao meu coorientador D.Sc. Rodrigo Moreira da Silva. Durante todo o transcurso da confecção deste trabalho, foram essenciais por sua dedicação em ensinar e por guiarem o correto caminho da pesquisa científica. Sou respeitosamente agradecido ao coordenador do Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Guerra Eletrônica, Capitão-Tenente Ogioni, por proporcionar tempo e ambiente acadêmico favoráveis à confecção deste estudo.

Finalmente, aos meus camaradas de turma de Guerra Eletrônica, que em minha companhia marcharam ombro a ombro rumo ao sucesso de mais um ano desafiador, meu mais sincero obrigado.

"Mergulha a mente, quanto possível, no estudo. O estudo liberta da ignorância e favorece a criatura com o discernimento. O estudo e o trabalho são as asas que facilitam a evolução do ser. O conhecimento é mensagem de vida. Não apenas nos educandários podes estudar. A própria vida é um livro aberto, que ensina a quem deseja aprender." (Joana de Angelis, psicografado por Divaldo Franco).

Resumo do Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao CIAA/MB como requisito parcial para a conclusão do Curso de Aperfeiçoamento Avançado para Oficiais da Armada

Detecção de Sinais Radar *Chirp* Utilizando a Transformada Fracionária de Fourier

Maurício Henrique Erruas Mello

Outubro/2025

Orientadores: Dra. Aline de Oliveira P. Silva

Dr. Rodrigo da Silva Moreira

Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Guerra Eletrônica

A eficácia de algoritmos de detecção de sinais radar, com foco em formas de onda pulsadas com modulação em frequência (*chirp*), essenciais para sistemas de Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica (MAGE), é o escopo deste estudo. Para isso, com caráter explicativo e aplicado, realiza-se por meio de simulações em software MATLAB a comparação de desempenho dos detectores de Energia Total (TED) e de Transformada Rápida de Fourier (FFT) com o detector por Transformada Fracionária de Fourier (FrFT). Observa-se que as abordagens convencionais são penalizadas pela dispersão de energia no domínio da frequência, enquanto a FrFT concentra a energia do *chirp* no domínio fracionário, processo que torna esses sinais mais facilmente detectáveis. Demonstra-se, dessa forma, que o detector por FrFT supera os métodos clássicos de detecção, apresentando-se como uma alternativa mais eficiente para as abordagens clássicas. A implementação da FrFT como técnica de detecção se mostra viável e assertiva para o aumento da sensibilidade dos sistemas de detecção passiva, corroborando para o aprimoramento da consciência situacional em receptores digitais MAGE.

Abstract of the Undergraduate Final Work presented to CIAA/MB as a partial fulfillment of the requirements for the conclusion of the Advanced Improvement Course for Navy Officers

Detecção de Sinais Radar *Chirp* Utilizando a Transformada Fracionária de Fourier

Maurício Henrique Erruas Mello

Outubro/2025

Orientadores: Dra. Aline de Oliveira P. Silva

Dr. Rodrigo da Silva Moreira

Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Guerra Eletrônica

The efficacy of radar signal detection algorithms, focusing on pulsed waveforms with frequency modulation (chirp), which are essential for Electronic Support Measures (ESM) systems, constitutes the scope of this study. To this end, an explanatory and applied approach is utilized, focusing on the comparative analysis of the performance of the Total Energy Detector (TED) and the Fast Fourier Transform (FFT) detector against the Fractional Fourier Transform (FrFT) detector via MATLAB software simulations. It is observed that conventional approaches are penalized by energy dispersion in the frequency domain, whereas the FrFT concentrates the signal energy in the fractional domain, a process that renders chirp signals more readily detectable. It is thus demonstrated that the FrFT detector surpasses classical detection methods, presenting itself as a more efficient alternative to conventional approaches. The implementation of the FrFT as a detection technique proves to be viable and assertive for increasing the sensitivity of passive detection systems, thereby contributing to the enhancement of situational awareness in digital ESM receivers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Espectro Eletromagnético evidenciando o espectro de rádio frequências.....	3
Figura 2 - Espectro Eletromagnético evidenciando o espectro ótico.....	4
Figura 3 - Antena do MAGE Defensor MK3, desenvolvido pelo IPqM, em câmara anecóica.....	6
Figura 4 - Divisões da Capacidade de Guerra Eletrônica.....	8
Figura 5 - Onda sendo transmitida até o alvo e retornando com menor intensidade.....	13
Figura 6 - Simulação da transmissão de ondas eletromagnéticas por um radar pulsado.....	14
Figura 7 - <i>Up-chirp</i> no domínio do tempo.....	15
Figura 8 - <i>Chirp</i> representado no gráfico tempo por frequência.....	15
Figura 9 - Alvo sem efeito Doppler.....	16
Figura 10 - Alvo com efeito Doppler.....	17
Figura 11 - Sinal contínuo variando linearmente a frequência - FMCW.....	18
Figura 12 - Redução na capacidade de detecção de um sistema MAGE, pela atuação de um radar LPI.....	19
Figura 13 – Comparação entre um sinal de radar LPI CW e um sinal de um radar pulsado convencional.....	20
Figura 14 - Com uma FRP muito alta, o eco do pulso 1 retorna após a emissão do pulso 2 e o sistema entende que o tempo de retorno do eco é menor do que o verdadeiro, resultando numa distância ambígua.....	22
Figura 15 - Ao ser utilizado uma FRP menor, o eco do pulso 1 retorna antes do pulso 2 ser emitido, eliminando a ambiguidade.....	22
Figura 16 - Comportamento de um AWGN.....	24
Figura 17 -Sinal do radar LPI (direita) tem potência de pico menor e maior largura de banda em relação a radares pulsados convencionais (esquerda), ficando abaixo do limiar de detecção de sistemas de detecção passivos e, assim, camuflados no ruído (azul).....	26
Figura 18 – Distância máxima de detecção.....	29
Figura 19 – Vantagem MAGE.....	29
Figura 20 - Geração da PDW em um Receptor Digital.....	31

Figura 21 - Exemplos de sinais no domínio do tempo. À esquerda, uma oscilação senoidal. À direita, um sinal apresentando ruído.....	32
Figura 22 - Representação no domínio da frequência da Transformada de Fourier de um sinal oscilatório senoidal à esquerda. À direita, representação da transformada de um sinal com ruído aleatório no domínio do tempo.....	33
Figura 23 - Sinal contendo dois pulsos LFM, representados no domínio tempo-frequência.....	34
Figura 24 - Representação gráfica de um sinal discreto no tempo.....	36
Figura 25 - Representações de um sinal: contínua (curva em azul), discreta (círculos em vermelho) e digital ($\times$ em preto)	37
Figura 26 – a) malha tempo-frequência. b) cisalhamento paralelo ao eixo do tempo. c) cisalhamento paralelo ao eixo da frequência. d) cisalhamento de tempo e frequência.....	42
Figura 27 - Interpretação geométrica da relação entre a taxa de <i>chirp</i> , a , e a ordem da FrFT, α	43
Figura 28 – LFM sendo rotacionado no plano tempo-frequência pela ação da FrFT.....	44
Figura 29 - Implementação do cálculo dos dados de entrada do detector TED.....	53
Figura 30 - Seção de código que implementa o cálculo de entrada para o detector por FFT.....	54
Figura 31 - Seção do código que implementa o cálculo dos dados de entrada para o detector por FrFT.....	54
Figura 32 – Cossenoide não modulado.....	55
Figura 33 - Sinal <i>chirp</i>	56
Figura 34 - Curva de Probabilidade de Detecção usando Detector TED, para um cossenoide não modulado.....	58
Figura 35 - Curva de Probabilidade de Detecção usando Detector TED, para um <i>chirp</i>	58
Figura 36 – Curva de probabilidade de detecção usando Detector por FFT, para um cossenoide não modulado.....	60
Figura 37 – Curva de probabilidade de detecção usando Detector por FFT de um sinal <i>chirp</i>	61
Figura 38 – Curva de probabilidade de detecção usando Detector por FrFT, para um cossenoide não modulado.....	63
Figura 39 – Curva de probabilidade de detecção usando Detector por FrFT de um sinal <i>chirp</i> com <i>range</i> do busca <i>slope</i> casado com <i>slope</i> do <i>chirp</i>	64

Figura 40 - Comparação de desempenho entre o Detector por TED e o Detector por FFT.....	65
Figura 41 - Comparação de desempenho entre o Detector por TED e o Detector por FrFT.....	66
Figura 42 - Comparação de desempenho entre o Detector por FrFT e o Detector por FFT.....	68
Figura 43 - Comparação de desempenho entre o Detector por FrFT, o Detector por FFT e o Detector por TED.....	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização	1
1.2	Apresentação do Problema	8
1.3	Justificativa e Relevância	9
1.4	Objetivos	10
1.4.1	Objetivo Geral	10
1.4.2	Objetivo Específico	10
1.5	Estruturação do Trabalho	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1	Radar	12
2.1.1	Princípios Básicos de Funcionamento do Sistema Radar	12
2.1.2	Radar Pulsado	13
2.1.3	Sinais <i>Chirp</i>	14
2.1.4	Sinais FMCW (<i>Frequency Modulated Continuous Wave</i>)	16
2.1.5	Radar LPI	19
2.1.6	Principais Parâmetros de um Sistema Radar	20
2.1.7	O Processo de Detecção de Sinais Radar por um Sistema MAGE	23
2.2	Equipamento MAGE	27
2.2.1	Receptor Digital	29
2.3	Processamento Digital	31
2.3.1	Sinais no Domínio do Tempo	32
2.3.2	Sinais no Domínio da Frequência	32
2.3.3	Sinais no Domínio Tempo-Frequência	33
2.3.4	Transformada de Fourier	35
2.3.5	Transformada Discreta de Fourier	36
2.3.6	Transformada Rápida de Fourier	37
2.3.7	Transformada Fracionária de Fourier	39
2.3.8	Vantagens da Utilização da FrFT na Análise de Sinais Radar	44
2.4	Comparação dos Detectores de Sinais	45

2.4.1	Detector por Energia Total (TED – <i>Total Energy Detector</i>)	46
2.4.2	Detector por FFT	47
2.4.3	Detector por FrFT	47
3	METODOLOGIA DA PESQUISA	48
3.1	Classificação da Pesquisa	49
3.1.1	Quanto aos Fins	49
3.1.2	Quanto aos Meios	50
3.2	Limitações do Método	50
3.3	Coleta e Tratamento de Dados	51
4	SIMULAÇÕES E ANÁLISE	54
4.1	Análise do Detector por TED	56
4.2	Análise do Detector por FFT	59
4.3	Análise do Detector por FrFT	61
4.4	Análise Comparativa entre Detectores para um <i>Chirp</i>	63
5	CONCLUSÃO	68
5.1	Considerações Finais	69
5.2	Sugestões para Futuros Trabalhos	70
	REFERÊNCIAS	72
	ANEXO	75

1. INTRODUÇÃO

Este capítulo inicial tem como objetivo contextualizar a Guerra Eletrônica (GE), explorando a sua importância e desafios inerentes à sua aplicação e evolução. Um dos pontos essenciais a serem discutidos envolve a detecção de sinais, um processo que lida diretamente com o Espectro Eletromagnético (EEM). A complexidade e a vasta gama de sinais presentes no EEM demandam sistemas de detecção e análise cada vez mais sofisticados.

Nesse contexto, este trabalho se propõe a aprofundar a discussão sobre os desafios específicos que envolvem a detecção de sinais oriundos desses sistemas eletromagnéticos. O principal objetivo é demonstrar como o desenvolvimento de métodos mais eficientes nessa área é fundamental para o aprimoramento contínuo dos equipamentos de Guerra Eletrônica. Assim, a pesquisa salienta a importância de um desenvolvimento tecnológico que seja não apenas inovador, mas também duradouro, garantindo a evolução constante e a eficácia das tecnologias no campo. A expectativa é que esta pesquisa contribua para o melhor entendimento das problemáticas e para a busca de soluções que impulsionem o avanço do estudo e do aprimoramento de novas técnicas de detecção, além de poder servir como base para novas pesquisas para futuros desenvolvimentos.

1.1 Contextualização

A Segunda Guerra Mundial marcou a estreia dos sistemas de detecção por emissão de ondas eletromagnéticas de aviões, chamados radares. A integração do radar nas operações militares trouxe uma nova dinâmica para a guerra eletrônica, expondo uma realidade crucial: uma onda eletromagnética poderia ser tanto uma ferramenta de criação quanto de destruição (Brasil, 2023).

Um exemplo notável dessa "Guerra Mágica" ou "Batalha dos Mágicos", como costumava chamar Winston Churchill, foi a estratégia alemã de instalar estações de rádio de navegação no Norte da França, operando em frequências de 200 kHz a 900 kHz. Essas estações emitiam ondas eletromagnéticas direcionadas para Londres. Aviões alemães, equipados com antenas especiais, captavam esses sinais. O sistema de auxílio à navegação, conhecido como "Lorenz", usava esses sinais para orientar as aeronaves sobre a direção a seguir, permitindo que elas se guiassem diretamente para a capital britânica (Brasil, 2023).

Na época, os oficiais de guerra eletrônica ganharam as denominações de "gralhas" e "corvos", títulos que ainda hoje são mantidos com orgulho. Essa nomenclatura surgiu da crença de que os corvos eram pássaros sagrados, associados à magia e ao divino, assim como a Guerra Mágica (Brasil, 2023).

Com o avanço da tecnologia de sistemas de detecção, como os radares, que utilizam o espectro eletromagnético, tornou-se necessária a evolução de medidas de proteção por parte dos oponentes. Essa dinâmica gerou um ciclo de inovações tecnológicas e medidas de contra-ataque que continua em constante desenvolvimento até os dias atuais.

A primeira ação de interferência aliada nos canais de rádio inimigos aconteceu em novembro de 1941, durante a Campanha do Líbano. Aeronaves de reconhecimento bloquearam as frequências dos tanques alemães. Apesar da aplicação rudimentar, esses interferidores foram capazes de desorganizar completamente as formações de tanques (Brasil, 2023).

Os alemães, posteriormente, começaram a usar o radar para controlar seus canhões costeiros, uma tática que resultou na destruição de vários navios no Canal da Mancha. Em resposta, os britânicos instalaram interferidores terrestres que neutralizaram eficazmente esses radares (Brasil, 2023).

Ao testemunharem essas batalhas entre sistemas eletrônicos ofensivos e suas contramedidas, observadores americanos entenderam que as futuras operações militares seriam extremamente dependentes de sistemas de comunicações, controle e alarmes eletrônicos. Eles também concluíram que esses sistemas seriam vulneráveis a ações de guerra eletrônica (Brasil, 2023). Desde então, os tópicos de GE nunca mais foram deixados de lado. As nações ao redor do mundo passaram a dar cada vez mais importância ao desenvolvimento de estudos e tecnologias relacionados a essa temática.

As atividades de GE são elementos estratégicos que estão presentes mesmo nos cenários de combate mais simples e atuais. Sua importância reside na capacidade de agir como um fator decisivo para a sobrevivência e para a criação de assimetrias em um conflito.

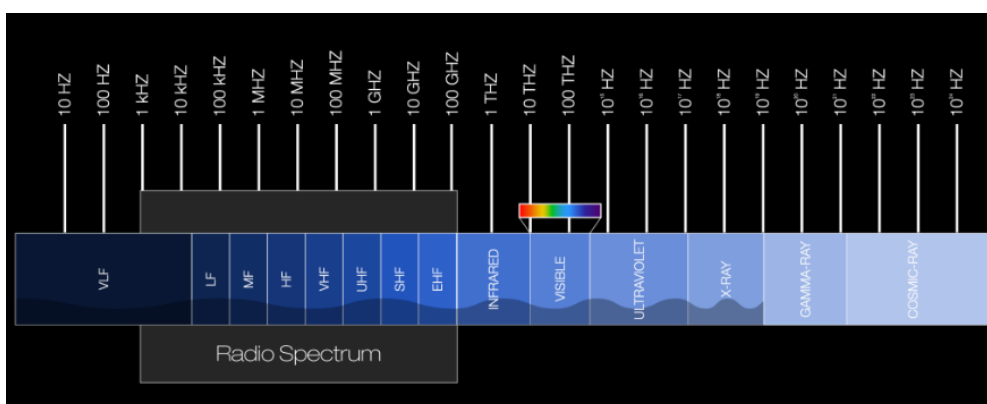
Em um campo de batalha, seja no posicionamento de tropas em terra ou em operações táticas em diferentes cenários, as forças militares geram, de forma voluntária ou não, alterações significativas no EEM. Essa realidade é uma consequência direta do fato de que a

maioria dos sistemas de armas e de Comando e Controle atuais dependem de equipamentos eletrônicos para funcionar.

Esse cenário tem sido cada vez mais intensificado pela chamada “Era da Informação”. A característica central desta era é a organização em rede, que demanda um uso cada vez mais intensivo e onipresente do espectro eletromagnético. Isso faz com que as ações de Guerra Eletrônica se tornem ainda mais críticas e complexas para a doutrina militar moderna (Brasil, 2023).

O campo de atuação da GE abrange todo o espectro eletromagnético, desde os menores raios gama até as maiores ondas de radiofrequência. Isso inclui, portanto, as faixas visível, infravermelha e ultravioleta. A representação do espectro de radiofrequências evidenciado no EEM pode ser observada na Figura 1:

Figura 1 - Espectro Eletromagnético evidenciando o espectro de rádio frequências.



Fonte: Walker (2024).

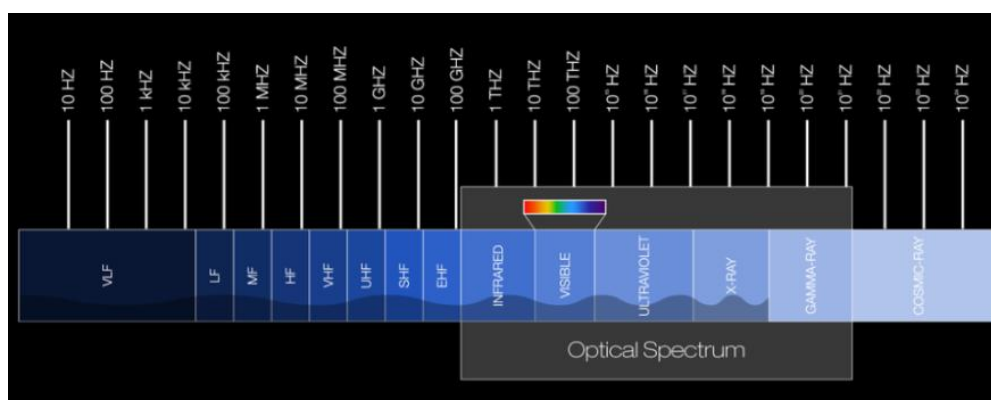
Segundo Walker (2024), o componente fundamental das comunicações via rádio é a onda de rádio. As ondas de rádio possuem os maiores comprimentos de onda no espectro eletromagnético. Assim como as ondas em um lago, uma onda de rádio é uma série de picos e vales que se repetem. O padrão completo de uma onda, antes que ela se repita, é chamado de ciclo. O comprimento de onda é a distância que uma onda percorre para completar um ciclo. O número de ciclos, ou o número de vezes que uma onda se repete em um segundo, é chamado de frequência. A frequência é medida na unidade hertz (Hz), que se refere ao número de ciclos por segundo. Mil hertz é chamado de kilohertz (kHz), 1 milhão de hertz de

megahertz (MHz) e 1 bilhão de hertz de gigahertz (GHz). A faixa do espectro de rádio é considerada de 3 kHz até 3.000 GHz.

Uma onda de rádio é gerada por um transmissor e, em seguida, detectada por um receptor. Uma antena permite que um transmissor de rádio envie energia para o espaço e que um receptor capte energia do espaço. Transmissores e receptores são tipicamente projetados para operar em uma faixa limitada de frequências (Walker, 2024).

As comunicações ópticas utilizam a luz como meio de transmissão de informações por longas distâncias. Essa tecnologia é tão eficaz que pode ser usada para enviar dados pelo espaço, empregando lasers no lugar das tradicionais radiofrequências (Walker, 2024). A representação do espectro ótico evidenciado no EEM pode ser observada na Figura 2:

Figura 2 - Espectro Eletromagnético evidenciando o espectro ótico.



Fonte: Walker (2024).

Os meios de Guerra Eletrônica interagem continuamente, mesmo durante períodos de paz. Essa interação constante busca adaptar capacidades às evoluções tecnológicas permanentes. Na ausência de um conflito direto, a capacidade do inimigo é avaliada e inferida com base em informações de Inteligência, adquiridas muitas vezes por sistemas que utilizam o EEM, o que destaca a importância da coleta de dados nesse cenário.

A Guerra Eletrônica consiste, portanto, em um conjunto de ações estratégicas focadas em explorar as emissões do inimigo ao longo de todo o espectro eletromagnético, em tempos de paz ou não. O objetivo principal é conhecer a sua organização, sua ordem de batalha, suas

intenções e capacidades. Além disso, a GE emprega medidas específicas para neutralizar o uso dos sistemas inimigos, enquanto protege e assegura o uso eficaz dos próprios sistemas (United States, 2020).

A manutenção da superioridade ou da vantagem tática depende de uma dedicação contínua à Ciência, Tecnologia e Inovação. Além disso, é essencial um acompanhamento constante da evolução militar no cenário de interesse (Brasil, 2023).

Com base na importância de dominar o EEM em operações de combate, as forças militares passaram a desenvolver capacidades específicas, como ataque eletrônico, proteção eletrônica e apoio à guerra eletrônica.

As Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica (MAGE) são responsáveis por garantir a consciência situacional imediata do ambiente eletromagnético em um cenário operacional. Em termos conceituais, as MAGE englobam um conjunto de métodos de coleta de informações de Guerra Eletrônica. Essas ações incluem a busca, interceptação, classificação, identificação, localização das fontes, registro e análise da energia eletromagnética irradiada. O objetivo principal é duplo: permitir a identificação imediata de ameaças e, posteriormente, viabilizar a exploração aprofundada das informações coletadas (United States, 2020).

Segundo Figueiredo (2019), um sistema de Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica é geralmente caracterizado por operar em uma ampla banda de frequências e com uma extensa faixa dinâmica. Esse tipo de sistema precisa ser capaz de funcionar em um ambiente eletromagnético denso, onde uma grande quantidade de emissores de radar atua simultaneamente.

Para lidar com essa complexidade, os sistemas de MAGE são equipados com um processamento sofisticado, capaz de analisar sinais de radar extremamente elaborados. Para assegurar a acurácia e a precisão das análises eletromagnéticas, é fundamental realizar diversos testes de calibração.

Nesse contexto, as câmaras anecoicas são instrumentos de grande importância para garantir um alto nível de ajuste em sistemas tão sensíveis. Elas utilizam materiais absorvedores em suas anteparas eliminando reflexões indesejadas de ondas eletromagnéticas. Dessa forma, a recepção se concentra apenas no sinal de interesse, permitindo uma análise mais detalhada e precisa.

Figura 3 - Antena do MAGE Defensor MK3, desenvolvido pelo IPqM, em câmara anecóica.



Fonte: Brasil (2025b).

A Figura 3 mostra uma imagem real de uma antena do MAGE DEFENSOR MK3 em câmara anecóica no Instituto de Pesquisas da Marinha (IPqM). Após ser captado pela antena do equipamento MAGE, o sinal eletromagnético passa por diversos circuitos eletrônicos. Em seguida, ele é direcionado para o receptor, onde ocorrem os processos de detecção e classificação.

A detecção é o processo de se notar a presença de um sinal proveniente de um alvo, distinguindo-o de sinais indesejados – como ruído ou *clutter*. O sucesso dessa etapa depende da capacidade de discernir um alvo genuíno em meio a falsos alvos, o que garante a eficiência da detecção.

A classificação, por sua vez, consiste em organizar os sinais eletromagnéticos detectados em categorias específicas. Os parâmetros das ondas, como frequência e duração de pulso, desempenham um papel crucial neste processo. Por exemplo, existem parâmetros específicos que podem estar associados a radares de sistemas de armas, indicando um risco real para o operador, enquanto outros podem pertencer a radares de navegação. A distinção entre essas categorias é essencial, pois as informações obtidas influenciam diretamente as decisões e as atitudes táticas a serem adotadas.

A Medida de Ataque Eletrônico (MAE) é uma componente da GE que emprega diversas formas de energia para atacar alvos inimigos. O objetivo é degradar, neutralizar ou destruir a capacidade de combate do oponente. Essas ações utilizam energia eletromagnética, energia direcionada ou armas antirradiação para atacar pessoas, instalações ou equipamentos (United States, 2020).

A Medida de Proteção Eletrônica (MPE) é uma componente da GE focada na segurança das forças militares aliadas. Essas ações têm como objetivo principal proteger o pessoal, as instalações e os equipamentos de qualquer efeito adverso proveniente do uso do Espectro Eletromagnético, seja ele por forças amigas ou inimigas. A finalidade é evitar a degradação, neutralização ou destruição da capacidade de combate das próprias forças (United States, 2020).

As MPE englobam uma série de ações que visam garantir a segurança de sistemas e equipamentos. Entre elas, destacam-se a proteção contra radiação eletromagnética para blindar sistemas de interferências externas, o isolamento de sistemas críticos para assegurar que sistemas essenciais permaneçam operacionais e a redução de emissões eletromagnéticas para diminuir a assinatura de um sistema, dificultando sua detecção. Adicionalmente, as MPE envolvem a seleção de materiais adequados para a construção de sistemas mais resistentes a ataques, a utilização de técnicas de criptografia para proteger a comunicação e os dados, e a implementação de sistemas de detecção e alerta precoce para identificar ameaças de forma rápida e eficiente (United States, 2020).

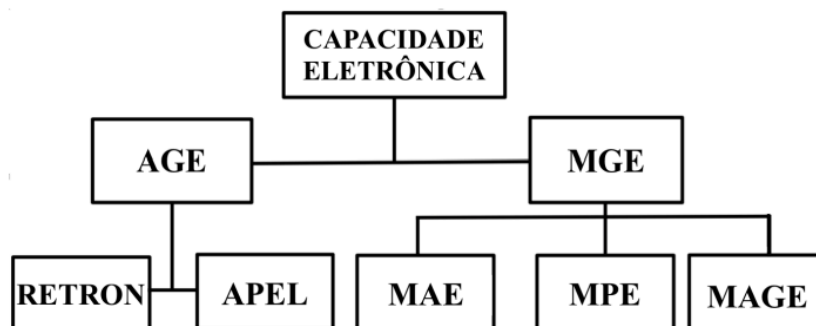
O conjunto de MAE, MPE e MAGE formam o grupo de Medidas de Guerra Eletrônica (MGE), um dos braços da Capacidade de Guerra Eletrônica, como apresentado na Figura 4.

Segundo Souza (2022), as Ações de Guerra Eletrônica (AGE), agem na coleta de informações para o Reconhecimento Eletrônico (RETRON) como uma biblioteca eletrônica e em atividades de pesquisa e desenvolvimento para o Aprestamento Eletrônico (APEL).

O RETRON é o conjunto de atividades realizadas para obter e processar, de forma sistemática e oportuna, informações sobre a Capacidade de Guerra Eletrônica (CGE) do adversário, utilizando o espectro eletromagnético. O objetivo é dimensionar e proteger a

própria capacidade, avaliar sua adequação e, se necessário, coletar dados para sua reformulação (Brasil, 2023).

Figura 4 - Divisões da Capacidade de Guerra Eletrônica.



Fonte: Souza (2022).

O APEL reúne o conjunto de atividades que fornecem os recursos necessários para estabelecer, verificar, manter ou reformular a CGE. Ele é composto por três elementos principais: pesquisa, desenvolvimento e capacitação humana (Brasil, 2023).

1.2 Apresentação do Problema

A GE demanda uma capacidade contínua de adaptação e inovação, impulsionada pela crescente complexidade do EEM. Nesse cenário, a detecção de sinais radar representa um pilar estratégico para a consciência situacional e a eficácia operacional das forças armadas. No entanto, a proliferação de radares com características de baixa probabilidade de interceptação (LPI – *Low Probability of Intercept*), que utilizam formas de onda complexas como os sinais *chirp*, sinal com variação de frequência intrapulso, impõe desafios significativos aos sistemas de Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica (MAGE).

Os métodos de detecção convencionais, como o Detector de Energia Total (TED) e a Transformada Rápida de Fourier (FFT), frequentemente se mostram ineficazes na identificação dos sinais *chirp*. O TED, por sua natureza genérica, é suscetível a ruídos e interferências de banda estreita, exigindo alta razão sinal-ruído (do inglês, *Signal-to-Noise Ratio* – SNR) para uma detecção confiável. Por outro lado, a FFT, embora excelente para

sinais estacionários, causa a dispersão da energia de sinais *chirp* no domínio da frequência, resultando em uma degradação substancial da SNR de processamento e, consequentemente, em uma baixa eficiência na detecção. Tal limitação compromete a capacidade de detectar e classificar ameaças modernas, criando uma lacuna tecnológica que precisa ser endereçada.

Diante desse contexto, surge a necessidade de desenvolver e validar abordagens avançadas capazes de superar as deficiências dos detectores clássicos na identificação de sinais *chirp*. A ausência de um método robusto e eficiente para a detecção desses sinais não apenas compromete a capacidade de reação em cenários de combate, mas também limita o avanço na classificação precisa das fontes emissoras, o que é vital para a tomada de decisões táticas e estratégicas em um ambiente eletromagnético complexo. Este trabalho, portanto, visa aprofundar a investigação sobre a eficácia da Transformada Fracionária de Fourier (FrFT) como uma solução promissora para essa problemática, desenvolvendo um detector otimizado para sinais *chirp* que possa atuar como uma ferramenta de apoio para a classificação em sistemas MAGE.

1.3 Justificativa e Relevância

A relevância deste trabalho reside em sua contribuição direta para o aprimoramento da capacidade de detecção de sinais *chirp*, que são intrinsecamente hostis em cenários de guerra devido à sua baixa capacidade de serem detectados. Ao focar na Transformada Fracionária de Fourier (FrFT) como uma ferramenta avançada para implementação de uma nova abordagem de detecção, a pesquisa se justifica pela sua aptidão em superar as limitações dos detectores convencionais (TED e FFT) na análise de sinais não estacionários, ou seja, sinais com frequência variando no tempo. A demonstração da superioridade da FrFT para este tipo de sinal, através de um processo de simulação e validação teórica, oferece uma base sólida para a implementação de novas funcionalidades em sistemas MAGE.

Adicionalmente, a pesquisa possui uma relevância estratégica para a Marinha do Brasil. O fortalecimento da capacidade de detecção de sinais radar de baixa probabilidade de interceptação contribui diretamente para a segurança e a soberania do país, capacitando as forças a operar com maior eficácia em ambientes eletromagnéticos complexos. Ao apresentar um detector de *chirp* validado por simulação, este estudo não apenas contribui para o avanço

do conhecimento científico na área de processamento de sinais para GE, mas também abre portas para o desenvolvimento de futuras pesquisas e tecnologias que poderão ser integradas aos sistemas MAGE existentes, proporcionando uma vantagem decisiva na detecção de alvos e no reconhecimento tático.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

Contribuir para o avanço das Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica (MAGE) na Marinha do Brasil, aprimorando a compreensão das técnicas de detecção de sinais radar. Este objetivo será alcançado por meio de uma análise comparativa aprofundada da eficácia de diferentes algoritmos, com ênfase na detecção de sinais *chirp* em ambientes ruidosos, abrindo novos horizontes para o avanço das Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica na Marinha do Brasil.

1.4.2 Objetivo Específico

Com o objetivo de atingir a meta geral, este trabalho se propõe a um conjunto de etapas específicas. Inicialmente, serão implementados e comparados algoritmos clássicos de detecção de sinais radar, como o Detector de Energia Total (TED) e a Transformada Rápida de Fourier (FFT), em um ambiente de simulação no MATLAB. Essa etapa é de essencial importância para avaliar o desempenho desses métodos na detecção de sinais *chirp*.

Na sequência, o foco do estudo se volta para o desenvolvimento e o teste de um detector de sinais *chirp* utilizando a Transformada Fracionária de Fourier (FrFT). O objetivo é demonstrar a capacidade da FrFT de concentrar a energia de sinais não estacionários em um domínio fracionário disponibilizado pela FrFT, superando as limitações das abordagens convencionais. A eficácia desse novo detector será analisada de forma comparativa, usando como métricas a probabilidade de detecção (Pd) e a probabilidade de falso alarme (PFa). Os resultados das simulações permitirão determinar se o detector baseado em FrFT é, de fato, mais eficiente para a detecção de sinais *chirp* do que os outros métodos comparados.

Por fim, o trabalho busca fornecer subsídios para futuras implementações em sistemas de Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica (MAGE). Ao auxiliar na detecção de sinais *chirp*, o detector desenvolvido contribuirá diretamente para a tarefa de classificação, por meio da extração de parâmetros como o *slope*¹ e a frequência intermediária, que são essenciais para a classificação e a identificação da fonte emissora.

1.5 Estruturação do Trabalho

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos, que seguem uma sequência lógica, iniciando pela contextualização e culminando na análise dos resultados e nas conclusões. O Capítulo 1, Introdução, contextualiza a Guerra Eletrônica, destacando a importância da detecção de sinais e apresenta o problema, a justificativa, a relevância e os objetivos do estudo.

No Capítulo 2, Referencial Teórico, são abordados os fundamentos essenciais para a compreensão completa da pesquisa, incluindo os princípios de funcionamento do radar, a arquitetura de equipamentos MAGE e os conceitos de processamento de sinais com ênfase na Transformada de Fourier, Transformada Discreta de Fourier (DFT), Transformada Rápida de Fourier (FFT) e, principalmente, na Transformada Fracionária de Fourier (FrFT), além da teoria dos detectores de sinais.

O Capítulo 3, Metodologia da Pesquisa, detalha a abordagem metodológica adotada, classificando a pesquisa quanto aos seus fins e meios, e descreve as limitações do método.

O Capítulo 4, Descrição e Análise dos Resultados, apresenta as simulações realizadas utilizando o *software* MATLAB e discute os resultados obtidos pelos três detectores, comparando suas curvas de desempenho.

Finalmente, o Capítulo 5, Conclusão, sintetiza os resultados da pesquisa, destaca as contribuições do trabalho e propõe direções para futuros estudos.

¹ Tradução: Inclinação

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Radar

Radar (*RAdio DeTection And Ranging*²) é um sistema ativo para a detecção e localização de objetos que refletem energia, como aeronaves, navios, veículos, pessoas e o ambiente natural, que funciona irradiando ondas eletromagnéticas para o espaço com o objetivo de detectar o sinal de eco refletido pelo objeto – ou alvo. Uma parte da energia transmitida pelo radar é refletida pelo alvo em várias direções. A reirradiação direcionada de volta ao radar é interceptada por sua antena, que a encaminha a um receptor onde é processada para detectar a presença do alvo e determinar sua localização (Skolnik, 2001).

O radar pode desempenhar sua função a longas ou curtas distâncias e em condições não apropriadas a sensores ópticos e infravermelhos. Ele pode operar na escuridão, neblina, nevoeiro, chuva e neve. Sua capacidade de medir a distância com alta precisão e em todas as condições climáticas é uma de suas características mais importantes (Skolnik, 2001).

2.1.1. Princípios Básicos de Funcionamento do Sistema Radar

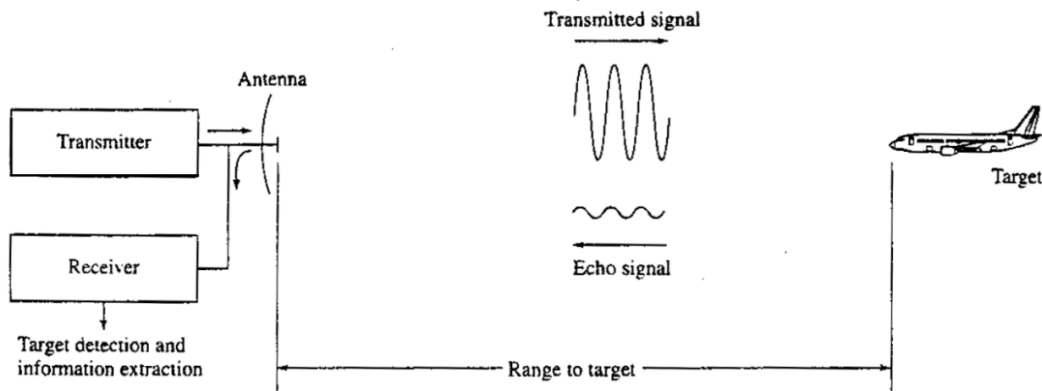
A distância até um alvo é determinada pelo tempo que o sinal do radar leva para viajar até o alvo e retornar. A energia eletromagnética no espaço livre viaja com a velocidade da luz, $c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Assim, tendo que $v = \Delta S / \Delta t$, onde v é velocidade, ΔS é a variação de espaço e Δt é a variação de tempo, a equação que especifica a distância de um radar até um alvo é $c = 2R / \Delta t$, considerando $2R$ a distância que a onda eletromagnética percorre até o alvo e retorna. Dessa forma, medindo-se o tempo de retorno do sinal emitido e refletido pelo alvo, e sabendo o valor constante de sua velocidade c , pode ser determinada precisamente a distância do objeto que reirradiou a onda. A Figura 5 mostra uma representação da medição da distância determinada por um radar.

A marcação do alvo é determinada pela direção que a maior intensidade da energia refletida retorna para a antena do radar. Essa direção relacionada com uma referência do emissor determina a marcação do alvo em relação ao radar emissor.

² Tradução: Detecção e Medição de Distância por Rádio

Figura 5 - Onda sendo transmitida até o alvo e retornando com menor intensidade.



Fonte: Skolnik (2001, p.2).

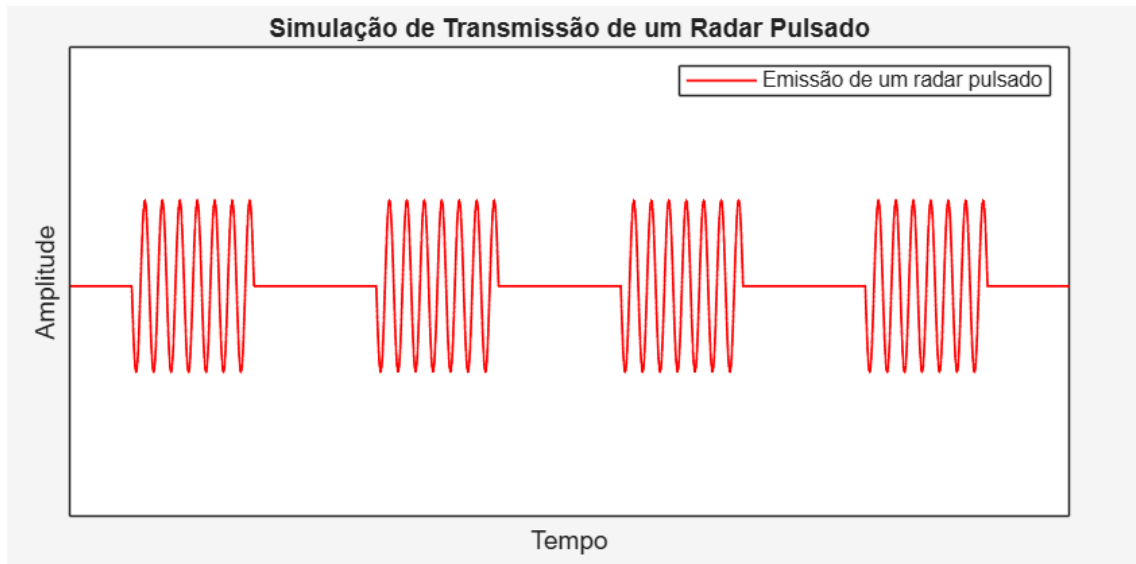
2.1.2. Radar Pulsado

Em sistemas de radar pulsado, a emissão de energia eletromagnética de alta potência ocorre em ondas separadas, enviadas pulso a pulso. Cada um desses pulsos é composto por uma onda senoidal e eles são transmitidos com uma frequência de repetição específica, conhecida como Frequência de Repetição de Pulso (FRP).

Os radares monoestáticos utilizam uma única antena para transmitir o sinal e receber os ecos refletidos pelo alvo. Por conta da atenuação sofrida pelas condições ambientais, seus circuitos receptores precisam ser extremamente sensíveis para detectar os sinais de baixa potência que retornam.

Devido à alta sensibilidade necessária no circuito receptor, ele é desativado durante a transmissão para evitar danos causados pela alta potência da onda emitida. Esse tempo de desativação cria uma lacuna na capacidade de detecção do sistema, pois, enquanto o pulso está sendo transmitido, o receptor não consegue captar nenhum eco por estar desativado. É exatamente essa lacuna que determina a distância mínima de detecção de um radar pulsado monoestático, onde nenhum objeto será detectado pelo sistema. Convertendo o tempo de transmissão do pulso para distância, é possível calcular o alcance mínimo de detecção do sistema. Na Figura 6 pode ser observada uma representação de sinais pulsados.

Figura 6 - Simulação da transmissão de ondas eletromagnéticas por um radar pulsado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

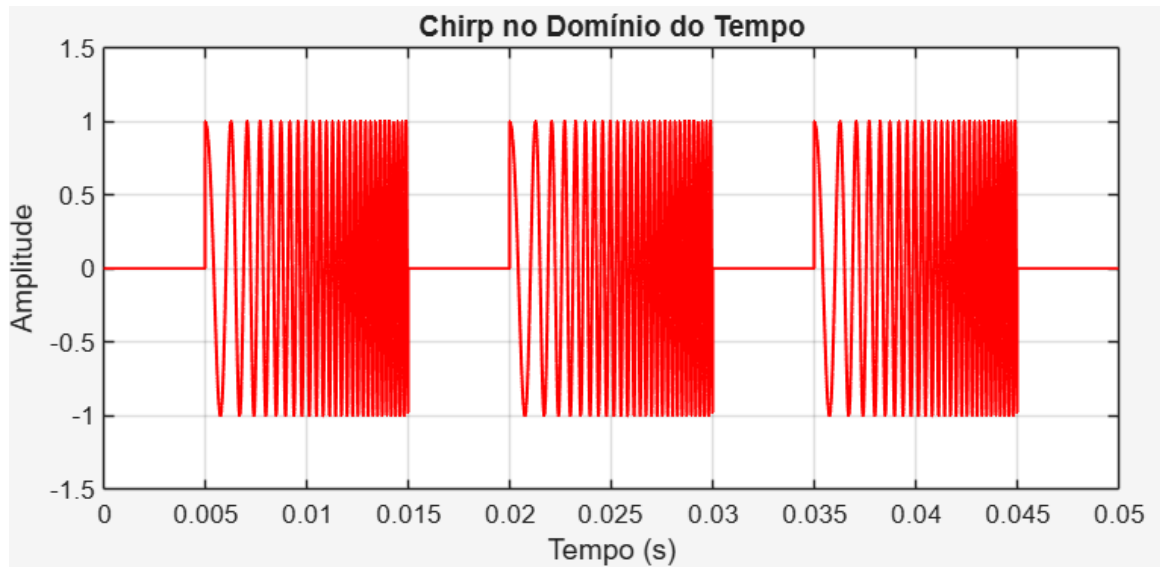
2.1.3 Sinais *Chirp*

Com base em Skolnik (2001), o sinal *chirp* é definido como uma forma de onda pulsada caracterizada por uma amplitude constante. Sua principal particularidade reside na modulação linear de frequência (*Linear Frequency Modulation* – LFM), onde a frequência varia de forma uniforme de um valor inicial para um valor final ao longo da duração de cada pulso.

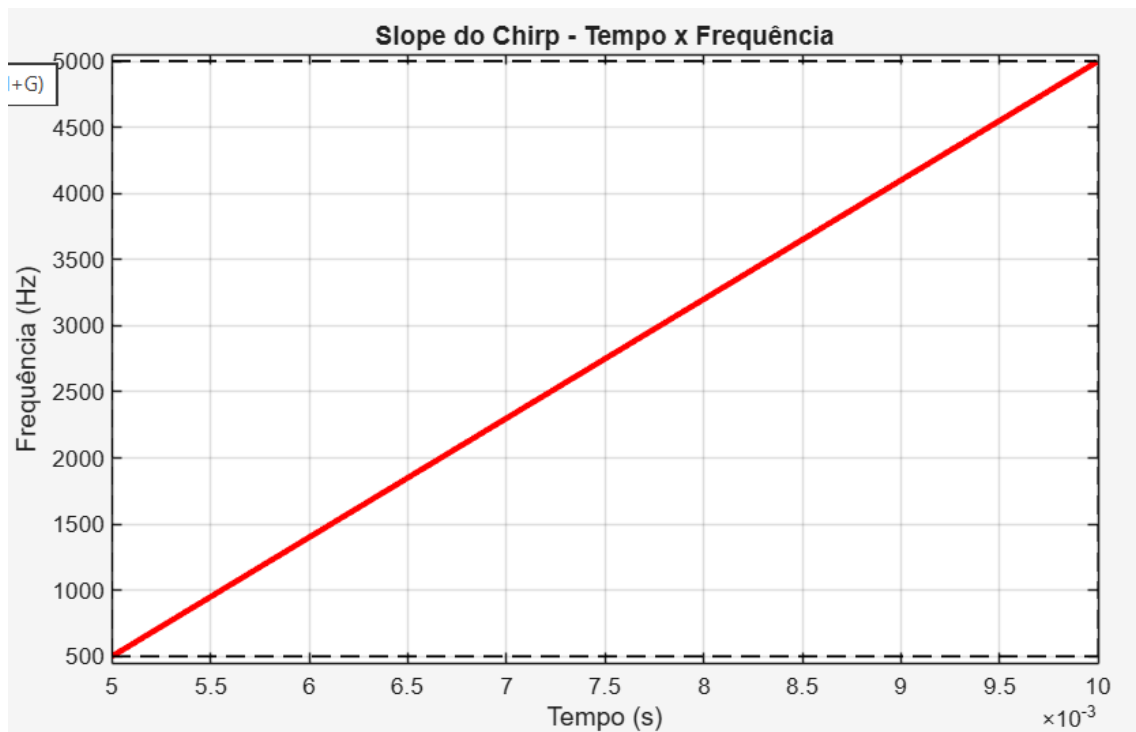
Essa variação intrapulso classifica o sinal em duas modalidades. Quando a frequência aumenta progressivamente dentro do pulso, o sinal é denominado *up-chirp*. Alternativamente, a diminuição da frequência intrapulso classifica-o como *down-chirp*. A representação temporal de um *up-chirp* é detalhada na Figura 7.

O sinal *chirp*, ao ser visualizado no gráfico de frequência por tempo, é representado por uma reta inclinada. Essa representação gráfica ilustra claramente a variação linear da frequência em função do tempo, o que caracteriza esses sinais como LFM pulsados.

A inclinação dessa reta é o que se define como *slope* do *chirp*. O *slope* constitui um parâmetro fundamental para a detecção eficiente deste tipo de sinal, pois evidencia a taxa precisa de variação de frequência, informação importante para os detectores de sinais LFM. A Figura 8 representa um *chirp* plotado no gráfico frequência por tempo, evidenciando seu *slope*.

Figura 7 - *Up-chirp* no domínio do tempo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 - *Chirp* representado no gráfico tempo por frequência.

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.4 Sinais FMCW (*Frequency Modulated Continuous Wave*³)

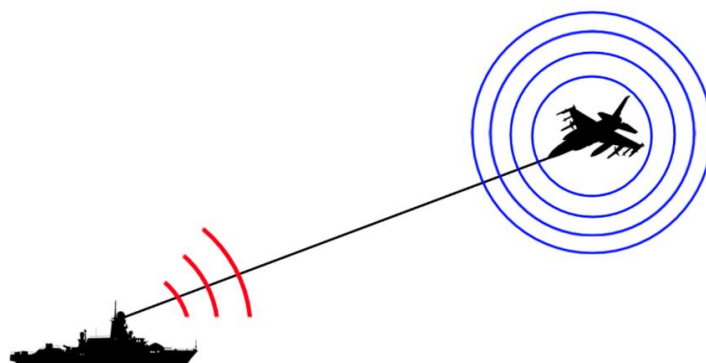
Os radares CW (*Continuous Wave*⁴) diferem dos radares pulsados porque transmitem um sinal eletromagnético de forma contínua. A frequência desse sinal muda ao longo do tempo, geralmente em uma varredura através de uma banda de frequência determinada – modulação em frequência (Jankiraman, 2018).

A diferença de frequência entre o sinal transmitido e o recebido (refletido pelo alvo) é determinada pela mistura dos dois sinais, o que produz um novo sinal que pode ser medido para determinar a distância ou a velocidade, através do efeito Doppler.

Se o objeto estiver em movimento radial relativo ao radar emissor, a frequência do sinal recebido será deslocada em relação à frequência do sinal transmitido, um fenômeno conhecido como efeito Doppler. Esse deslocamento de frequência Doppler é determinado pela velocidade radial do objeto em movimento, ou seja, o componente da velocidade na direção da linha de visada do radar. Com base nesse deslocamento, o radar pode medir a velocidade radial do objeto (Chen, 2011).

As Figuras 9 e 10 ilustram o efeito Doppler gerado pela aproximação das frentes de onda refletidas, que é formada pela velocidade radial do avião em relação ao navio emissor. Na Figura 9, o avião com velocidade radial zero em relação ao radar não produz efeito Doppler. As frentes de onda de reflexão (azul) são equidistantes entre si.

Figura 9 – Alvo sem efeito Doppler.



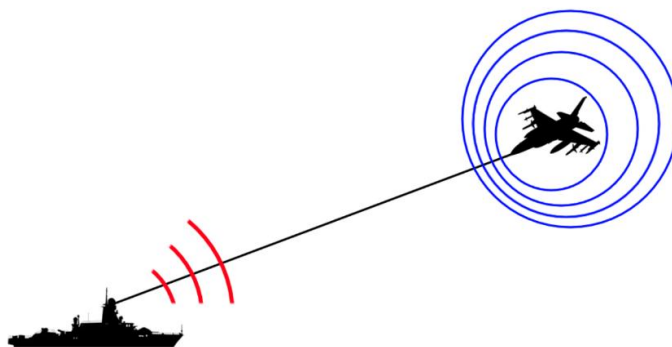
Fonte: Elaborado pelo autor.

³ Tradução: Onda contínua com frequência modulada

⁴ Tradução: Radar de Onda Contínua

Na figura 10, onde o avião tem velocidade radial em direção ao emissor, o efeito Doppler produz uma aproximação das frentes de onda refletida. Caso essa velocidade radial seja de sentido contrário, o efeito Doppler produzira um afastamento nas frentes de onda refletida.

Figura 10 – Alvo com efeito Doppler.



Fonte: elaborado pelo autor.

Caso o objeto, ou qualquer um de seus componentes estruturais, tenha um movimento oscilatório (como uma vibração ou rotação) além do seu movimento radial de massa, essa oscilação induzirá uma modulação de frequência adicional no sinal refletido. Isso gera bandas laterais de frequência em torno do deslocamento Doppler convencional causado pelo movimento de translação do objeto. Essa modulação Doppler adicional é chamada de efeito micro-Doppler.

O deslocamento de frequência Doppler é geralmente medido no domínio da frequência, utilizando a transformada de Fourier do sinal recebido. No espectro de Fourier, o pico principal indica o deslocamento de frequência Doppler induzido pela velocidade radial do objeto, enquanto a largura do espectro de frequências Doppler fornece uma estimativa da dispersão da velocidade devido ao efeito micro-Doppler.

Segundo Chen (2011), o efeito micro-Doppler pode ser utilizado para determinar propriedades cinemáticas de um objeto. Por exemplo, a vibração gerada pelo motor de um veículo pode ser detectada pela vibração da superfície da sua carroceria. Ao medir as características micro-Doppler dessa vibração, a velocidade do motor pode ser calculada e usada para classificar um tipo específico de veículo, como um tanque com motor a turbina a gás ou um ônibus com motor a diesel.

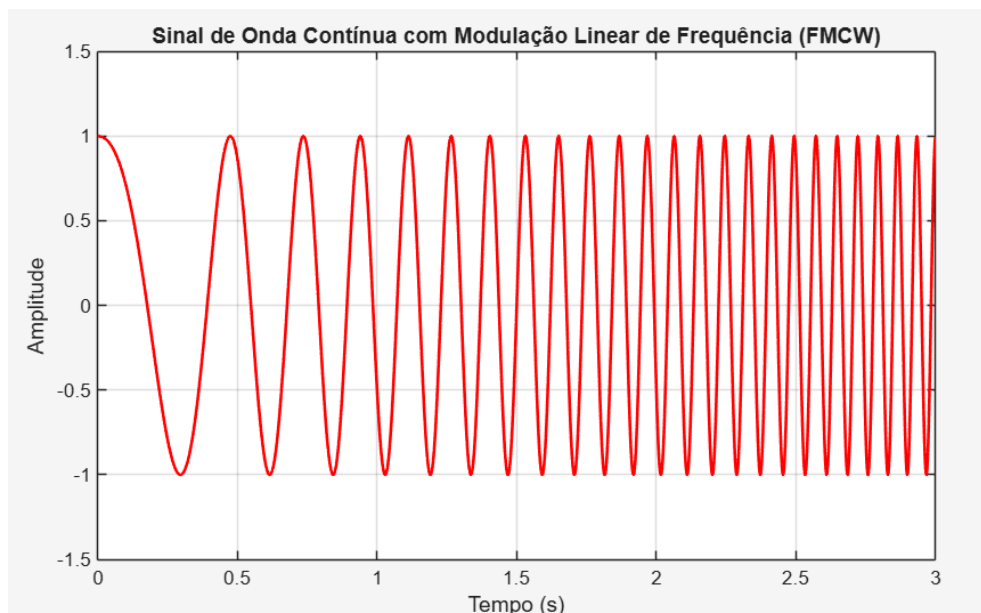
A assinatura micro-Doppler é a característica distintiva de um objeto, que representa a complexa modulação de frequência gerada por seus componentes estruturais. Essa assinatura é tipicamente analisada e visualizada no domínio conjunto de tempo e frequência Doppler (Chen, 2011).

Sinais de onda contínua com modulação de frequência (FMCW), quando submetidos a um processo de amostragem em períodos curtos, exibem uma semelhança fundamental com os sinais *chirp* pulsados. Isso ocorre porque o segmento amostrado, sendo de duração finita, pode ser interpretado como um pulso individual.

Devido a essa característica de equivalência temporal, amostras de sinais FMCW podem ser detectadas e analisadas por detectores especificamente projetados para sinais *chirp*, como o Detector por Transformada Fracionária de Fourier (FrFT), caso a amostragem em curto período seja realizada. Essa adaptação metodológica estende a aplicabilidade de tais detectores para além dos sinais pulsados tradicionais. A Figura 11 apresenta um sinal FMCW.

Radares com este tipo de modulação são frequentemente associados a sistemas de armas. Ao iluminarem o alvo de forma constante, representam um dos elementos mais hostis em um cenário de guerra. É imperativa a classificação correta de sinais como este, o que evidencia a essencial importância de detectá-los de forma eficiente para posterior classificação e identificação de sua fonte de emissão.

Figura 11 - Sinal contínuo variando linearmente a frequência - FMCW.



Fonte: Elaborado pelo autor.

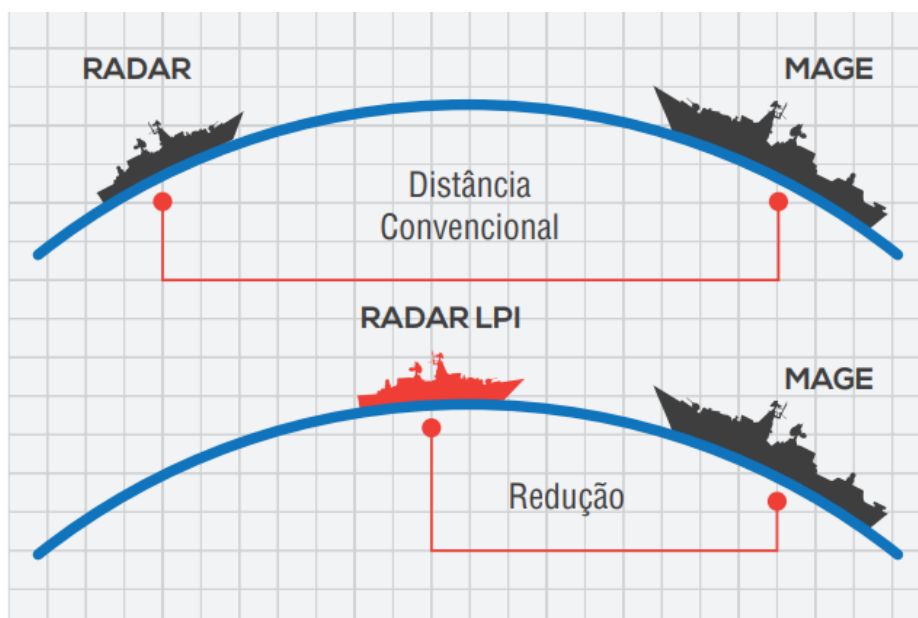
2.1.5 Radar LPI

Radares LPI (*Low Probability of Intercept*⁵) são sistemas que, devido à sua baixa potência, ampla largura de banda, variabilidade de frequência ou outros atributos de projeto, tornam-se difíceis de serem detectados ou identificados por meio de dispositivos passivos de detecção. Esses radares detectam alvos a uma distância maior do que a que um sistema de detecção passiva consegue detectá-los. Eles utilizam o espectro eletromagnético de maneira furtiva, de modo a “verem sem serem vistos” (Taboada, 2002).

Na Figura 12, o radar LPI presente no navio à esquerda demonstra sua vantagem tática ao detectar o alvo à direita antes de ser ele próprio interceptado pelo sistema MAGE oponente. Esse cenário ilustra o princípio furtivo do LPI, que opera de forma a reduzir a capacidade de detecção do sistema de apoio eletrônico do oponente.

Essa capacidade é uma resposta à crescente habilidade dos modernos receptores passivos de detecção de detectar emissores de radar. Tal detecção pode levar rapidamente a um ataque eletrônico ou à destruição física do radar por meio de munições guiadas ou Mísseis Antirradiação (Taboada, 2002).

Figura 12 - Redução na capacidade de detecção de um sistema MAGE, pela atuação de um radar LPI.



Fonte: Silva (2019, p.13).

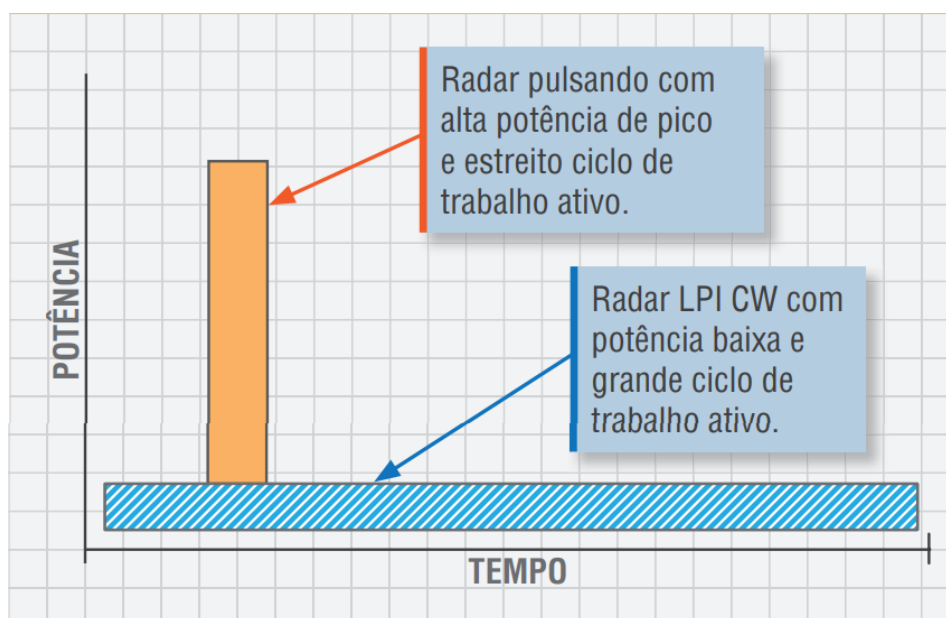
⁵ Tradução: Baixa probabilidade de interceptação

O objetivo principal do radar LPI é que a distância de detecção do alvo seja superior à distância em que ele pode ser interceptado por um sistema eletrônico passivo (Silva, 2019).

Para alcançar essa meta furtiva, o sistema LPI emprega recursos que o diferenciam fundamentalmente de um radar pulsado convencional, manipulando os parâmetros da forma de onda. A estratégia consiste em diminuir a potência de pico transmitida, resultando em um decréscimo significativo na SNR do sinal interceptado. É essa redução da SNR que dificulta a detecção por parte dos sistemas passivos, permitindo que o sinal LPI permaneça camuflado no ruído. A detecção das ondas refletidas pelo alvo por parte dos radares LPI é possível por meio de filtros casados utilizados em seus circuitos de recepção, que permitem detectar parâmetros específicos da onda transmitida, mesmo com a drástica redução da SNR do sinal.

A Figura 13, ao ilustrar simultaneamente o sinal de um radar LPI em azul e o sinal de um radar pulsado convencional em laranja, mostra que a emissão do radar LPI possui uma potência de pico significativamente menor e uma largura de banda maior em comparação com a forma de onda pulsada convencional. A característica de ter a energia distribuída por um espectro mais amplo é essencial para aumentar a dificuldade de detecção por parte dos sistemas passivos.

Figura 13 – Comparação entre um sinal de radar LPI CW e um sinal de um radar pulsado convencional.



Fonte: Silva (2019, p.14).

2.1.6 Principais Parâmetros de um Sistema Radar

Os radares operam com base em importantes parâmetros que determinam as características de transmissão de cada pulso. Esses parâmetros são classificados em intrapulso, que descrevem as propriedades de um único pulso — como largura de pulso, amplitude máxima e frequência de operação — e interpulso, que define atributos entre os pulsos, incluindo o intervalo de repetição de pulso, ou, alternativamente, frequência de repetição de pulso correspondente.

A eficiência do radar em diferentes cenários é diretamente determinada por seus parâmetros de operação. A largura de pulso (LP), por exemplo, é crucial para a resolução em distância: quanto menor a duração do pulso, maior a capacidade do sistema de distinguir dois alvos que estejam muito próximos radialmente um do outro, para os casos de sinais pulsados sem modulação intrapulso. Já a frequência de operação influencia o alcance de detecção, pois frequências mais altas sofrem maior atenuação do ambiente e das condições atmosféricas, reduzindo a distância máxima de detecção. Consequentemente, a utilização de frequências mais baixas permite que o radar detecte alvos a distâncias maiores.

Por sua vez, a frequência de repetição de pulso (FRP) determina a distância máxima não-ambígua que o radar pode detectar. Se o eco de um pulso retornar à antena após a emissão do pulso seguinte, o radar interpretará o alvo como estando a uma distância menor do que a real, gerando ambiguidade de distância, como pode ser observado na Figura 14.

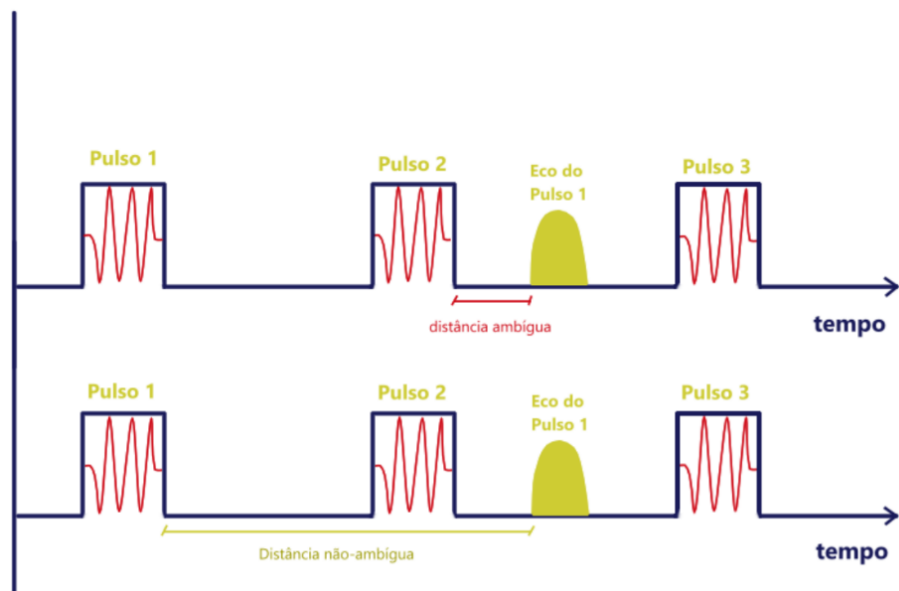
Alterando-se a FRP, a ambiguidade em distância pode ser solucionada, resolvendo a imprecisão de alcance do alvo, como ilustrado na Figura 15.

Segundo Lavinsky et al. (2023), a Seção Reta Radar (do inglês, *Radar Cross Section* – RCS), apesar de ser um parâmetro intrínseco ao alvo, é crucial para a operação de sistemas de radar e para a eficiência do processo de detecção. Sua importância é tão grande que ela é um fator evidenciado na equação do radar, como será discutido mais adiante. A RCS é a medida de potência espalhada por um alvo em uma direção específica, após ser atingido por uma onda eletromagnética proveniente de um radar. Essa medida é normalizada para a densidade de potência da onda que incide sobre o alvo, o que garante que seu valor não seja afetado pela distância entre o alvo e o radar.

A RCS não está diretamente ligada ao tamanho físico do objeto. Embora, na maioria das vezes, alvos maiores tendam a ter uma RCS maior, os mecanismos de espalhamento que

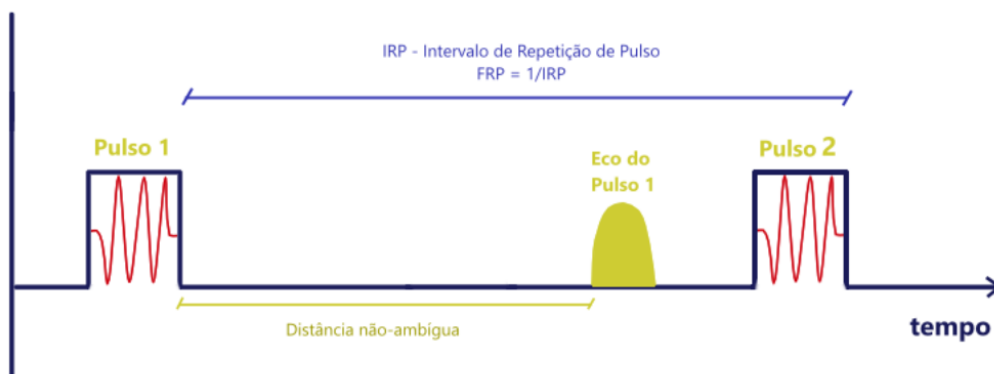
determinam a RCS nem sempre se relacionam diretamente com as dimensões físicas do alvo (Lavinsky *et al.*, 2023).

Figura 14 - Com uma FRP muito alta, o eco do pulso 1 retorna após a emissão do pulso 2 e o sistema entende que o tempo de retorno do eco é menor do que o verdadeiro, resultando numa distância ambígua.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 - Ao ser utilizado uma FRP menor, o eco do pulso 1 retorna antes do pulso 2 ser emitido, eliminando a ambiguidade.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os parâmetros operacionais dos radares não são essenciais apenas para o funcionamento correto e a eficiência de seus próprios sistemas. Eles também desempenham

um papel fundamental para dispositivos de detecção passiva, pois muitas vezes fornecem uma assinatura única de cada emissor, permitindo que esses dispositivos classifiquem e identifiquem os diversos sistemas de radar existentes.

2.1.7 O Processo de Detecção de Sinais Radar por um Sistema MAGE

A detecção de sinais na presença de ruído é uma questão fundamental no processamento estatístico de sinais e é essencial para as aplicações de detecção de alvos nos sistemas de MAGE modernos, que fazem processamento desses sinais utilizando receptores digitais. As abordagens clássicas para o teste de hipóteses binárias geralmente se manifestam na forma de um teste de razão de verossimilhança (Cheng *et al.*, 2016).

O principal desafio é detectar a presença de um sinal em meio a ruídos e outras interferências. Esse sinal pode ser o eco de um radar, captado pelo circuito de recepção do próprio sistema radar, ou, no caso de detecção em sistemas passivos, a emissão direta de um radar ou ecos da emissão deste.

Define-se ruído como uma perturbação indesejável que acompanha o sinal recebido e que pode distorcer a informação que ele transporta. O ruído pode ter origem tanto em fontes criadas pelo homem quanto em fontes naturais, como o ruído térmico causado pela agitação térmica de elétrons em linhas de transmissão, outros transmissores sem fio, ou até mesmo outros condutores.

Como o ruído não é um fenômeno determinístico, sendo completamente aleatório, o problema da detecção de sinais pode ser interpretado como uma questão estatística, exigindo o uso de métodos estatísticos para diferenciar o sinal de interesse do ruído presente.

Nesse cenário, define-se *Additive White Gaussian Noise*⁶ (AWGN) como: um ruído com distribuição de probabilidade gaussiana, onde a amplitude do ruído segue uma distribuição de probabilidade normal com média nula; um ruído com densidade espectral de potência constante, uniforme em todas as frequências, distribuindo a energia igualmente em todo o espectro, analogamente semelhante à luz branca que possui todas as frequências do espectro visível de igual intensidade, daí o nome ruído branco; e um ruído aditivo, por ser somado diretamente à intensidade do sinal, não tendo suas propriedades modificadas pela ausência ou presença do sinal de interesse. A Figura 16 representa o comportamento de um ruído AWGN, ilustrando essas características de definição.

⁶ Tradução: Ruído Gaussiano Branco Aditivo

O objetivo principal da detecção de sinais é separar o sinal verdadeiro do ruído, o que permite que o sistema determine se um alvo está ou não presente. Esse processo é realizado por meio de testes de hipóteses estatísticas, nos quais dois cenários complementares são utilizados para a tomada de decisão: a hipótese de que o sinal é apenas ruído (hipótese nula), e a hipótese de que há um sinal somado ao ruído (hipótese alternativa).

$$\begin{cases} H_0: r(t) = n(t) \\ H_1: r(t) = s(t, \theta) + n(t) \end{cases} \quad (1)$$

Onde:

H_0 = Hipótese nula

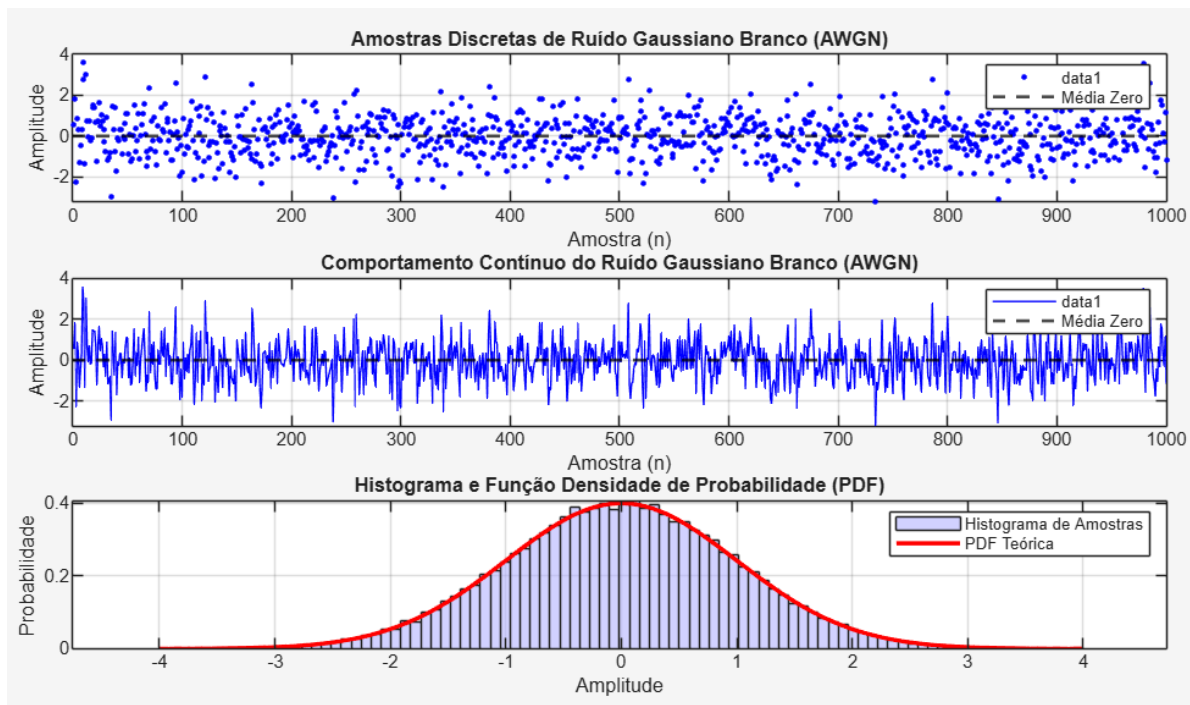
H_1 = Hipótese alternativa

$r(t)$ = Sinal recebido

$n(t)$ = Sinal de ruído

$s(t, \theta)$ = Sinal real detectável

Figura 16 - Comportamento de um AWGN.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O limiar de detecção é um valor estabelecido para decidir se existe um sinal presente em um conjunto de amostras. Se o valor de uma característica extraída das amostras for maior do que esse limiar, o sistema assume a hipótese 1, confirmando a presença do sinal. Por outro lado, se for menor que o limiar, o sistema assume a hipótese 0, concluindo que não há um sinal presente.

A definição desse limiar é fundamental e depende diretamente do nível de ruído presente no ambiente. A escolha do valor do limiar é um dilema, pois envolve um balanço entre a detecção de sinais presentes e a supressão de falsos alarmes.

Se o limiar for definido com um valor abaixo do ideal, o sistema se torna demasiadamente sensível. Sinais de ruído, que normalmente seriam ignorados, podem ultrapassar o limiar e serem interpretados como sinais presentes. Isso leva a um aumento na probabilidade de falso alarme, gerando falsos positivos e diminuindo a eficiência do sistema.

Se o limiar for elevado demais, o sistema se torna menos sensível. Embora isso ajude a diminuir a taxa de detecção de falsos alarmes representados pelo ruído, aumenta a chance de o sistema não conseguir detectar sinais radar reais cuja característica extraída tenha valor reduzido.

A escolha ideal do limiar de detecção é, portanto, uma relação de compromisso entre essas duas situações. É necessário equilibrar a necessidade de evitar falsos alarmes com a de detectar sinais presentes mesmo com SNR baixa.

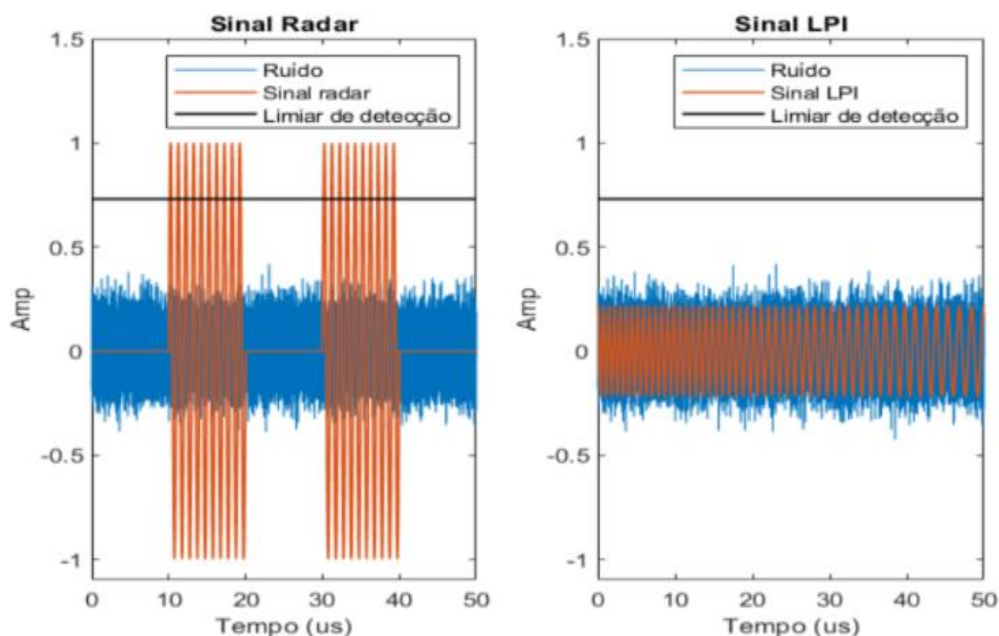
Na Figura 17, pode ser observado que o sinal de um radar LPI pode ser camuflado em meio ao ruído, tornando-o de mais difícil detecção em relação a radares convencionais. Nesta temática, define-se SNR como a razão entre a potência de um sinal real e a potência do ruído presente em um sistema de recepção. Essa métrica é de essencial importância para o projeto de sistemas de detecção passivos.

O principal objetivo no desenvolvimento desses sistemas é sempre maximizar a SNR. Isso significa que, para uma detecção eficaz, a intensidade do sinal real deve ser significativamente maior do que a intensidade do ruído, pois quanto maior a razão sinal-ruído, mais fácil e confiável se torna a detecção de um sinal desejado, distinguindo-o do ruído.

O objetivo fundamental de radares LPI, por outro lado, é reduzir SNR de suas emissões, tornando a detecção pelo inimigo significativamente mais difícil. Essa abordagem

tática visa camuflar o sinal ao manter sua intensidade abaixo do nível de ruído, garantindo que o radar possa operar de forma furtiva e com baixa probabilidade de ser interceptado.

Figura 17 -Sinal do radar LPI (direita) tem potência de pico menor em relação a radares pulsados convencionais (esquerda), ficando abaixo do limiar de detecção de sistemas de detecção passivos e, assim, camuflados no ruído (azul).



Fonte: Melo (2023, p.26).

Dessa forma, o emprego de técnicas que permitam a detecção mais eficiente de sinais de radares LPI, como a detecção por FrFT que será explorada, se justifica como uma importante abordagem frente a esses radares que emitem sinais de difícil detecção.

2.2 Equipamento MAGE

Segundo Skolnik (2001), a detecção passiva, tipicamente realizada por equipamentos de Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica (MAGE), desempenha um papel essencial no reconhecimento de alvos. Ao interceptar o sinal eletromagnético emitido, o sistema MAGE consegue detectar e classificar o tipo de plataforma ou sistema que gerou a emissão. Essa capacidade é vital, visto que os sinais provenientes de aeronaves hostis, por exemplo, geralmente possuem assinaturas distintas e únicas, permitindo o reconhecimento imediato da natureza da ameaça.

No entanto, sistemas de detecção passiva, embora forneçam o reconhecimento da fonte e a medição do ângulo de chegada do sinal emitido, não são capazes de determinar a distância do alvo, diferentemente dos radares. Consequentemente, a ausência da informação de distância impede a formação de um acompanhamento completo do alvo (Skolnik, 2001).

Por um lado, o radar é classificado como um sistema ativo de sensoriamento, pois emite sua própria energia eletromagnética para detectar alvos. A distância de um objeto é determinada com base no tempo de retorno da energia refletida. Em contraste, o sistema MAGE é um sistema essencialmente passivo, que não emite energia eletromagnética. Sua função é detectar, classificar e identificar emissores de energia apenas interceptando os sinais que chegam à sua antena e analisando os parâmetros intra e interpulso desses sinais.

O MAGE contribui para o reconhecimento tático dos emissores radar em um dado ambiente eletromagnético. Este sistema tem a função de interceptar radiações de emissores, determinar sua marcação, registrar o tempo de chegada e medir os seus parâmetros (frequência, presença de modulação intrapulso, largura de pulso e amplitude), separando-os em grupos associados a um determinado radar emissor, classificando o tipo e o modo de operação do radar envolvido e identificando a provável plataforma associada, segundo uma Biblioteca de Emissores.

A capacidade de detecção de um radar – um sistema de detecção ativo – é limitada pela atenuação sofrida pela energia eletromagnética que ele emite, o que determina sua distância máxima de detecção. A onda eletromagnética precisa percorrer o caminho de ida e de volta, do emissor ao alvo, para que possa ser realizada a detecção. A atenuação do sinal no trajeto é influenciada por fatores como umidade do ar, concentração de gases e pressão atmosférica, além de características do alvo e capacidades técnicas do próprio radar. A forma simples da equação do radar expressa o alcance máximo do radar $R_{m\acute{a}x}$ em função dos principais parâmetros do radar e da seção reta radar do alvo, quando a sensibilidade do radar é limitada pelo ruído do receptor. Ela foi escrita da seguinte forma (Skolnik, 2001):

$$R_{m\acute{a}x} = \left[\frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi) 2 S_{min}} \right]^{1/4} \quad (2)$$

Onde:

P_t = Potência transmitida

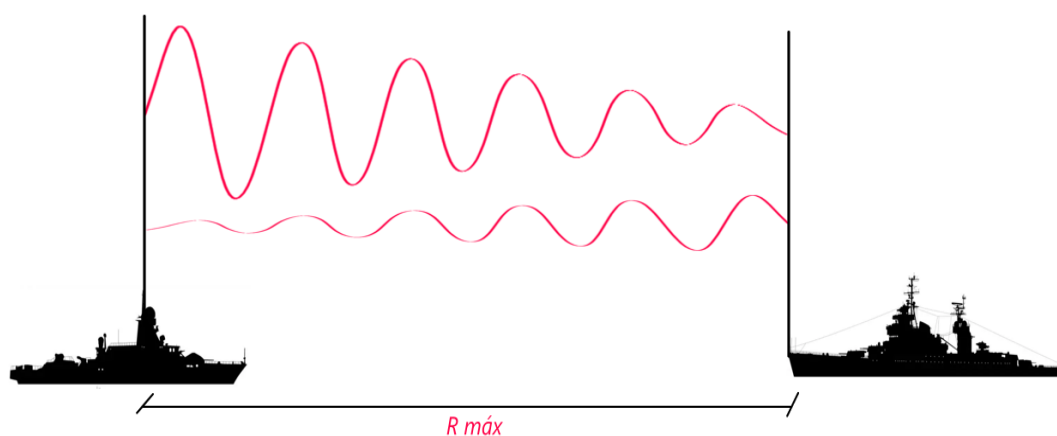
- G = Ganho da antena
 A_e = Área efetiva da antena
 σ = Seção reta radar do alvo
 S_{min} = Mínimo sinal detectável

Em contraste, os sistemas passivos de detecção não emitem energia, operando apenas "ouvindo" os sinais. Por essa razão, a distância de detecção de um sistema passivo pode ser maior do que a de um radar, pois o sinal não precisa retornar à antena para ser processado. Isso lhes confere uma vantagem significativa em cenários onde a detecção à longa distância é prioritária, como pode ser observado nas figuras 18 e 19.

Na Figura 18, uma onda eletromagnética é emitida pelo radar do navio à esquerda, viaja até o alvo e retorna, representando seu processo de detecção. Durante esse percurso, a onda sofre atenuação devido às condições atmosféricas. O mínimo sinal detectável indica a máxima distância que a onda pode percorrer de modo que ainda seja detectada pelo receptor radar.

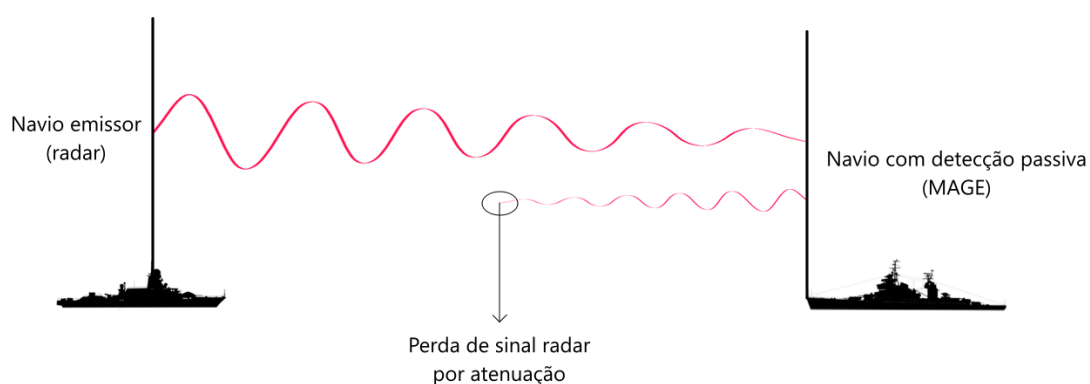
Na Figura 19, o navio à esquerda está a uma distância tal que o sinal de sua onda eletromagnética emitida, após ser refletido pelo navio à direita, é muito fraco para ser detectado por seu sistema de recepção. Neste cenário, o navio à direita, se equipado com MAGE, pode identificar a presença do navio emissor passivamente (sem emissão de onda eletromagnética), mesmo sem ser detectado, apresentando o que é chamado de vantagem MAGE.

Figura 18 – Distância máxima de detecção.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Vantagem MAGE.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.1 Receptor Digital

Segundo Souza (2022), o equipamento MAGE é um sistema tático responsável por detectar e classificar as emissões de radares presentes no cenário operacional, de forma passiva. Os MAGE clássicos utilizam predominantemente circuitos analógicos para detectar a presença de sinais radar. Essa abordagem representa uma tecnologia mais antiga e menos eficiente em comparação com os padrões adotados pelos MAGE mais modernos.

Essa limitação é resolvida com a introdução do Receptor Digital no MAGE DEFENSOR MK3. Com este novo componente, as emissões de radar interceptadas no

ambiente eletromagnético são amostradas e digitalizadas, fato que permite que o sistema utilize técnicas avançadas de processamento digital de sinais (Souza, 2022).

Segundo Molina e Nascimento (2006), o espectro eletromagnético empregado pelos radares na GE é vasto. Os sinais diretamente associados a sistemas de armamentos, por exemplo, situam-se principalmente na faixa de 2 a 18 GHz. Além da abrangência dessa faixa, a complexidade dos sinais é intensificada pelas inúmeras variações nos seus parâmetros operacionais, que incluem o intervalo de repetição de pulsos (PRI), a largura de pulso (LP) e a variação da frequência portadora.

Adicionalmente, a grande quantidade de radares operando em determinados cenários resulta em uma alta taxa de sinais interceptados pelos sistemas receptores. Essa concentração massiva de emissões causa a superposição dos trens de pulsos recebidos, um fenômeno conhecido como *interleaving*⁷. Em ambientes de combate críticos, estima-se que milhões de pulsos por segundo podem atingir um equipamento MAGE (Molina; Nascimento, 2006).

Diante dessa complexidade, torna-se essencial a tarefa conhecida como *deinterleaving*⁸, realizada no receptor digital do MAGE Defensor MK3. Este processo consiste em isolar os trens de pulsos interceptados que estão superpostos, separando-os em conjuntos de pulsos individuais que correspondam a um único emissor (Molina; Nascimento, 2006).

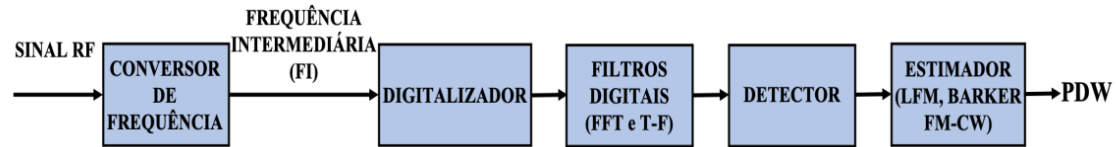
O *deinterleaving*, etapa crítica para a classificação e a identificação dos sinais radar no contexto da GE, é possibilitado pela amostragem e digitalização dos sinais analógicos provenientes do espectro eletromagnético. Esse processo fornece como resultado a organização dos sinais recebidos em PDW (*Pulse Descriptor Words*⁹), saída que descreve as características de cada sinal radar interceptado (Souza, 2022), como pode ser observado na Figura 20:

⁷ Tradução: entrelaçamento de trens de pulsos.

⁸ Tradução: desentrelaçamento de trens pulsos.

⁹ Tradução: palavras descritoras de pulsos.

Figura 20 - Geração da PDW em um Receptor Digital.



Fonte: Souza (2022, p. 15).

A etapa de reorganização dos parâmetros dos sinais que chegam ao receptor digital é essencial e permite essa estruturação em conjuntos de dados de PDW de maneira ordenada. Tal organização é o fator que viabiliza a análise subsequente, permitindo que os emissores de sinais radar sejam classificados e identificados individualmente. Tal processo é essencial para manter a eficácia do sistema MAGE, especialmente em ambientes onde há a superposição de múltiplos sinais eletromagnéticos.

2.3 Processamento de Sinais

Define-se como sinal radar na forma de uma onda portadora não modulada como:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t + \varphi_0) \quad (3)$$

Onde:

$s(t)$ = Sinal da portadora no domínio do tempo

A = Amplitude máxima do sinal

f_c = Frequência da portadora

t = Tempo

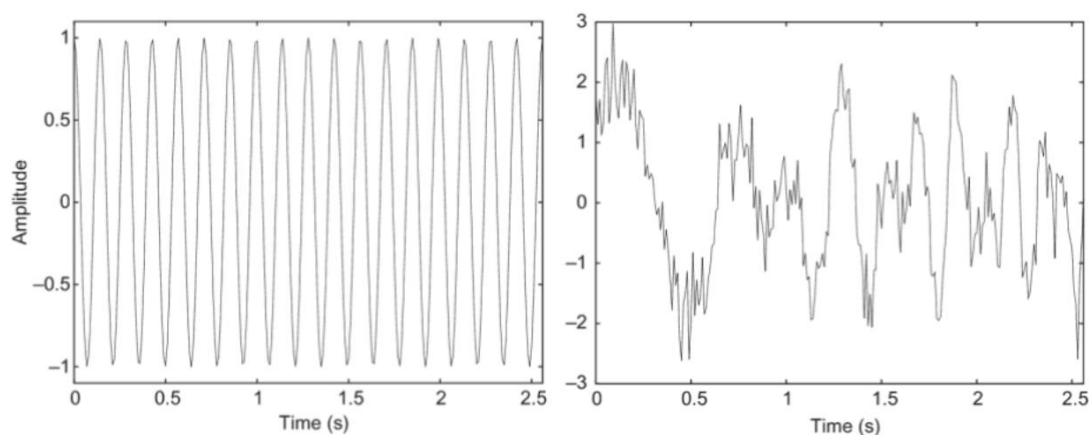
φ_0 = Fase inicial

Existem duas representações clássicas de um sinal: a representação temporal, que ocorre no domínio do tempo (t), e a representação espectral, no domínio da frequência (f). Ambas as representações são fundamentais para a análise e o processamento dos sinais de radar. Uma terceira representação, a representação tempo-frequência, se mostra como uma das principais para uma análise e processamento eficientes de sinais.

2.3.1 Sinais no Domínio do Tempo

Segundo Boashash (2016), a representação no domínio do tempo fornece informações essenciais sobre a existência e a evolução do sinal. Ela revela sua presença, seus tempos de início e fim, sua intensidade e como ela se desenvolve ao longo do tempo. Além disso, essa representação é fundamental para indicar de que forma a energia do sinal está distribuída pelo eixo do tempo t . A largura de pulso e o tempo de subida do sinal são outros parâmetros importantes que podem ser interpretados nessa representação e, dependendo da SNR, pode-se verificar a presença do pulso mesmo somado ao ruído. Representações de sinais no domínio do tempo podem ser observadas na Figura 21:

Figura 21 - Exemplos de sinais no domínio do tempo. À esquerda, uma oscilação senoidal. À direita, um sinal somado a um ruído.

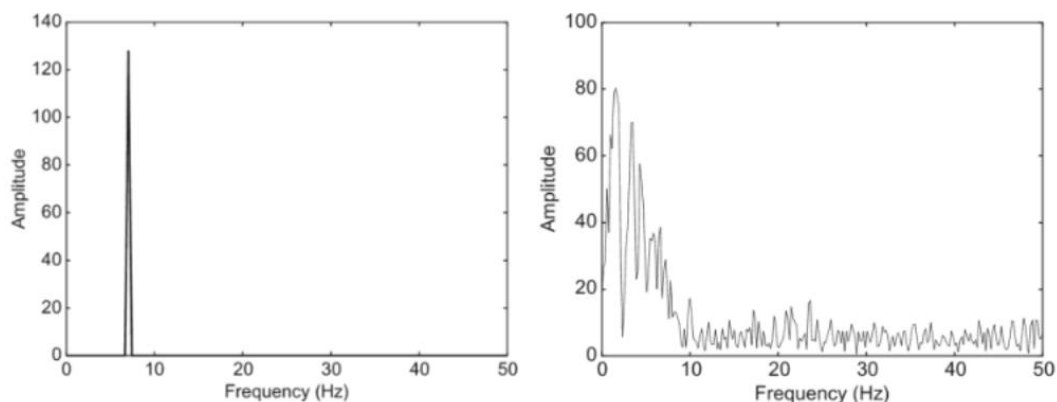


Fonte: Adaptado de (Boashash, 2016, p. 7).

2.3.2 Sinais no Domínio da Frequência

Os sinais apresentados anteriormente no domínio do tempo podem ser representados no domínio da frequência conforme a Figura 22. A Transformada de Fourier (processo que será abordado com mais detalhes na seção 2.3.4) de um sinal oscilatório senoidal, na ausência de ruído, no domínio do tempo resulta em um impulso no domínio da frequência, como ilustrado no lado esquerdo da imagem. Por outro lado, para sinais somados a um ruído AWGN no domínio do tempo, a aplicação exclusivamente da Transformada de Fourier não gera um resultado concentrado em uma frequência, no domínio da frequência. Isso ocorre porque a frequência do ruído varia aleatoriamente ao longo do tempo (Boashash, 2016).

Figura 22 - Representação no domínio da frequência da Transformada de Fourier de um sinal oscilatório senoidal à esquerda. À direita, representação da transformada de um sinal com ruído aleatório no domínio do tempo.



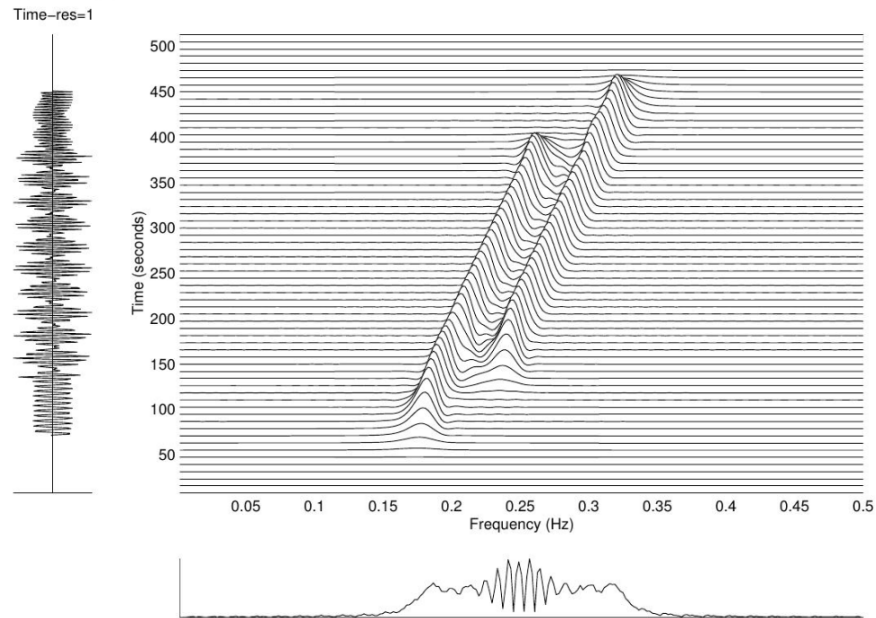
Fonte: Adaptado de (Boashash, 2016, p. 9).

2.3.3 Sinais no Domínio Tempo-Frequência

O processamento de sinais no domínio tempo-frequência engloba um conjunto de métodos, técnicas e algoritmos de processamento de sinais nos quais as duas variáveis naturais, tempo t e frequência f , são usadas simultaneamente. Isso contrasta com os métodos tradicionais de processamento de sinais, nos quais ou o tempo ou a frequência são usados exclusivamente e independentemente um do outro. Este processamento se tornou uma prática padrão de processamento digital de sinais, com aplicações em diversas áreas (Boashash, 2016).

É possível revelar a dependência de tempo e frequência de um sinal ao plotar um gráfico conjunto dessa representação, conforme exemplificado na Figura 23. O gráfico contém dois pulsos LFM cujos tempos de início e fim são distintos. Na escala à esquerda, ao mostrar os sinais no domínio do tempo, quando os dois estão existindo no mesmo instante, suas frequências são misturadas e as informações individuais de cada um são perdidas. Na escala abaixo, representando o domínio da frequência, os tempos em que começa e termina um sinal não são representados de forma direta. Essas informações são mostradas claramente na representação (t, f) , o que permite medições precisas das frequências reais e de suas épocas – os instantes em que elas aparecem.

Figura 23 - Sinal contendo dois pulsos LFM, representados no domínio tempo-frequência.



Fonte: Boashash (2016, p. 10).

Os tempos de início e fim de cada *chirp* são claramente identificáveis no domínio (t, f) , assim como a variação de suas frequências ao longo do tempo. A obtenção simultânea dessas duas informações não pode ser feita diretamente de $s(t)$ ou $S(f)$. As características do sinal dentro de cada pulso incluem detalhes como os tempos em que a potência do sinal está acima ou abaixo de um determinado limiar, além de como o espectro do sinal varia ao longo do tempo. A representação do sinal no domínio tempo-frequência (t, f) é muito útil para aplicações práticas pois facilita a identificação simultânea de características em ambos os domínios, tempo e frequência (Boashash, 2016).

Outra razão importante para usar representações tempo-frequência de sinais é que elas também revelam se o sinal é monocomponente ou multicomponente, algo que não pode ser facilmente identificado pela análise espectral convencional, especialmente quando as componentes individuais mais relevantes do espectro do sinal também variam no tempo (Boashash, 2016).

2.3.4 Transformada de Fourier

Segundo Boashash (2016), a Transformada de Fourier (*Fourier Transform* – FT) estabelece que, sob certas condições, qualquer sinal limitado pode ser expresso como uma

soma ponderada de senos e cossenos – ou exponenciais complexas – em diferentes frequências f . Os coeficientes complexos $S(f)$ definem esses pesos.

A equação 4, comumente conhecida como Transformada Inversa de Fourier, mostra que o valor de $s(t)$ no tempo t é determinado a partir dos valores de $S(f)$ em todas as frequências f , de $-\infty$ a $+\infty$ (Boashash, 2016):

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (4)$$

Os pesos $S(f)$ presentes na equação 4 estabelecem uma representação no domínio da frequência para o sinal determinístico $s(t)$. Essa abordagem possibilita determinar a frequência da portadora do sinal, cuja unidade é o número de oscilações por segundo, expresso em hertz.

A representação espectral $S(f)$ pode ser obtida a partir do sinal $s(t)$ pela aplicação da Transformada de Fourier, conforme a equação 5 (Boashash, 2016):

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (5)$$

Conforme Boashash (2016), essa representação indica quais frequências estão presentes no sinal, suas magnitudes relativas, a frequência mínima, a frequência máxima, a frequência central e a largura de banda formada pela diferença entre a mínima e a máxima.

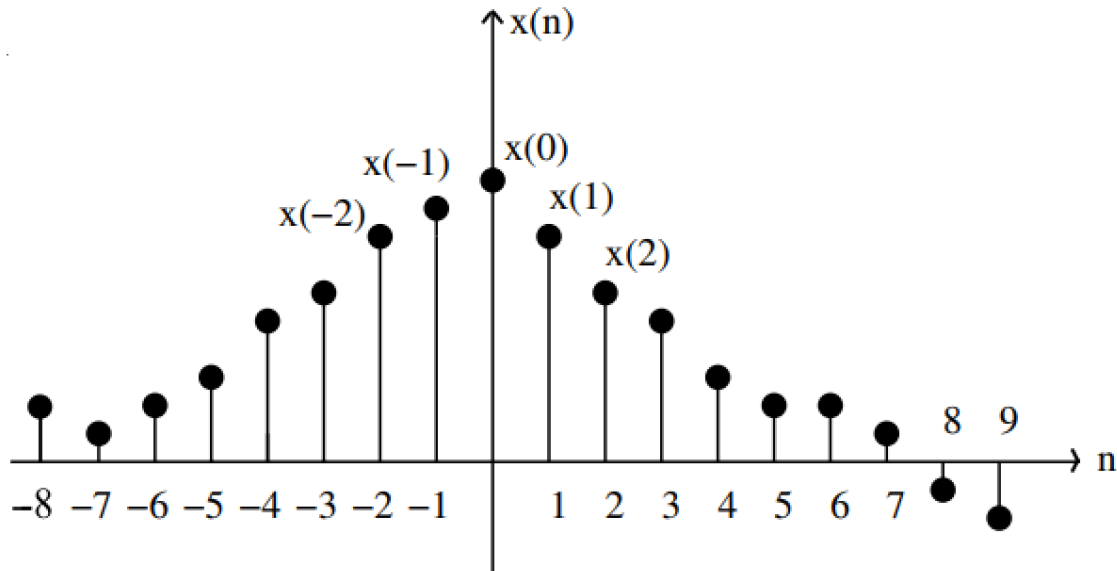
A FT, na sua forma clássica, é um conceito matemático usado para converter um sinal analógico do domínio do tempo para o domínio da frequência. A sua formulação matemática envolve integrais, o que a torna ideal para sinais que não são digitalizados, sendo difícil de ser aplicado diretamente em computadores, onde as informações devem ser digitais. Nesse contexto, surge a necessidade de se utilizar um método adaptado para sinais discretos – a Transformada Discreta de Fourier.

2.3.5 Transformada Discreta de Fourier

A Transformada de Fourier Discreta (*Discrete Fourier Transform* – DFT) é a Transformada de Fourier para sinais em tempo discreto. Enquanto a FT lida com sinais

contínuos, a DFT atua sobre uma série de pontos amostrados, ou seja, dados discretos. Um sinal amostrado é representado na Figura 24:

Figura 24 - Representação gráfica de um sinal discreto no tempo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa adaptação é o que permite que a transformada seja aplicada a computadores e em todos os sistemas digitais atuais. A DFT é, portanto, uma ferramenta matemática essencial para o processamento de sinais digitais, tornando possível analisar e manipular informações em áudio, imagens e outros dados digitais. A Figura 25 ilustra a sutil, mas fundamental diferença entre os sinais contínuos, discretos e digitais.

Segundo Maciel (2022), a DFT é dada por:

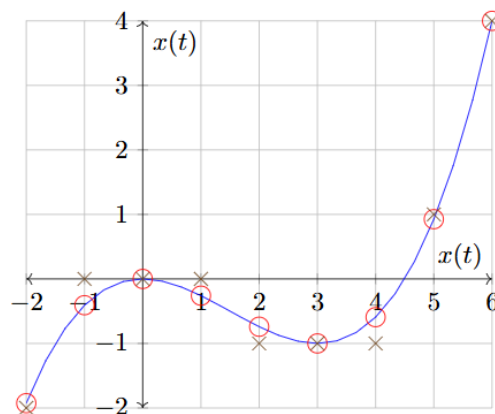
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = [0, 1, 2, 3, \dots, N-1] \quad (6)$$

Onde $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

Segundo Mónica e Mónica (2011), apesar de a Transformada de Fourier ser uma ferramenta teórica extremamente poderosa, sua aplicação prática em sequências de dados é limitada. O grande problema está no enorme custo computacional necessário para executar a

Transformada Discreta de Fourier (DFT) em uma sequência grande de dados, que exige um número de multiplicações proporcional a N^2 , onde N representa o número de amostras na sequência de dados. Dessa forma, a DFT, em sua formulação direta é ineficiente para um grupo de muitas amostras, o que a torna computacionalmente inviável para o processamento de sinais de longa duração, sendo necessária uma abordagem mais prática para implementação em sistemas digitais.

Figura 25 - Representações de um sinal: contínua (curva em azul), discreta (círculos em vermelho) e digital (× em preto).



Fonte (Maciel, 2022, p. 12).

2.3.6 Transformada Rápida de Fourier

A Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* – FFT) é um algoritmo proposto por Cooley e Tukey (1965). Essa inteligente abordagem explora as propriedades de simetria da DFT e diminui significativamente o número de operações realizadas, aliviando sobremaneira o custo computacional.

O algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT), em contraste com a abordagem direta da Transformada Discreta de Fourier (DFT), opera sob o princípio de "dividir e conquistar" para otimizar o processo de cálculo. Em vez de realizar uma única DFT de tamanho N , o método proposto divide o problema em duas transformadas menores, cada uma com $N/2$ pontos: uma para as amostras com índices pares, representada por $G[k]$, e outra para as amostras com índices ímpares, denotada por $H[k]$ (Cooley e Tukey, 1965).

Reescrevendo a DFT em termos pares e ímpares, tem-se:

$$X[k] = \sum_{n_0=0}^{\overbrace{\frac{N-1}{2}}^{\text{índices pares}}} x[2n_0] W_N^{(2n_0)k} + \sum_{n_1=0}^{\overbrace{\frac{N-1}{2}}^{\text{índices ímpares}}} x[2n_1 + 1] W_N^{(2n_1+1)k} \quad (7)$$

Levando-se em consideração a seguinte igualdade:

$$W_N^{2kn} = e^{\frac{-j2\pi 2kn}{N}} = e^{\frac{-j2\pi kn}{N/2}} = W_{N/2}^{kn} \quad (8)$$

Dessa maneira, pode-se reorganizar a equação da DFT em termos de $N/2$:

$$X[k] = \sum_{n_0=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2n_0] W_{N/2}^{n_0 k} + W_N^k \sum_{n_1=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2n_1 + 1] W_{N/2}^{n_1 k} = G[k] + W_N^k H[k] \quad (9)$$

Onde $G[k]$ e $H[k]$ são DFTs com $N/2$ pontos realizadas sobre as posições pares e ímpares de $x[n]$ respectivamente (Maciel, 2022).

O cerne da eficiência desse algoritmo reside na sua capacidade de reestruturar a computação de uma DFT de tamanho N em duas DFTs de tamanho $N/2$, com um custo adicional mínimo para combinar os resultados. Esse processo permite que a complexidade computacional seja da ordem de $N \log(N)$, reduzindo significativamente em relação à DFT de complexidade N^2 .

Ressalta-se que este processo pode ser realizado novamente, dividindo em $N/4$ pontos cada subproblema e assim por diante, até que a unidade de cálculo seja uma DFT de tamanho trivial. Isso permite que o processo seja recursivamente aplicado até que se atinja a eficiência requerida, no que se refere à custo computacional.

O resultado prático dessa abordagem recursiva é uma significativa redução na complexidade computacional. Para ilustrar a magnitude dessa melhoria, considere uma sequência de $N = 1.024$ pontos. Enquanto a DFT exigiria milhões de operações, a FFT completaria a mesma tarefa com apenas cerca de 10.240 operações, o que representa uma redução de aproximadamente 100 vezes. Essa diferença, que se acentua exponencialmente com o crescimento do número de pontos N , solidificou a FFT como um dos algoritmos fundamentais e de maior relevância da ciência da computação moderna.

2.3.7 Transformada Fracionária de Fourier

A Transformada Fracionária de Fourier (*Fractional Fourier Transform* – FrFT) é uma generalização da Transformada de Fourier tradicional, sendo idealmente adequada para a análise de sinais *chirp*.

Para um valor real de α , a TFrF de uma função $f(t)$ é definida pela equação, conforme descrito por Almeida (1994), Ozaktas e Kutay (2001) e Luo (2019):

$$\mathcal{F}^\alpha\{f(t)\} = f^\alpha(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(u, t) f(t) dt \quad (10)$$

Nesta formulação, u representa a frequência, t o tempo, e K_α representa o núcleo da transformada, que é detalhado como:

$$K_\alpha = \begin{cases} \sqrt{(1 - j \cot \alpha)} \times \exp(j\pi(t^2 \cot \alpha - 2ut \csc \alpha + u^2 \cot \alpha)), & \text{para } \alpha \neq n\pi \\ \delta(t + u), & \text{para } \alpha = (2n + 1)\pi \\ \delta(t - u), & \text{para } \alpha = 2n\pi \end{cases} \quad (11)$$

onde j é a unidade imaginária, n é um número inteiro arbitrário, e δ é a função impulso. A TFrF inversa, que permite a recuperação do sinal original, é dada pela equação 12:

$$f(t) = f^{-\alpha}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{-\alpha}(t, u) f^\alpha(u) du \quad (12)$$

Esta transformação matemática se apresenta como uma ferramenta poderosa para a análise de sinais, especialmente aqueles com componentes de frequência variável, pois permite uma representação do sinal em um domínio intermediário entre o tempo e a frequência. Um sinal *chirp*, que tem uma frequência variante linearmente no tempo, aparece como uma linha reta inclinada (*slope*) no plano tempo-frequência. Quando o ângulo de rotação da FrFT é ajustado para corresponder perfeitamente ao *slope* do *chirp*, a linha reta do *chirp* se alinha ao eixo de frequência fracionária.

Enquanto a FT transporta um sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência, o que representa uma rotação característica de 90° no domínio tempo-frequência,

a FrFT transporta o sinal para um domínio fracionário, sendo representada por uma rotação de um ângulo arbitrário de ordem α .

Este método matemático oferece uma análise mais precisa e detalhada no domínio fracionário. Ele consegue concentrar a energia do sinal de frequência variável em um ponto específico nesse domínio, o que torna as análises mais eficientes.

Para atingir essa precisão, a ferramenta utiliza um parâmetro α , que é relacionado diretamente ao sinal que está sendo analisado. Esse parâmetro é crucial, pois ele adapta a análise às características únicas do sinal, permitindo que a energia seja concentrada.

Segundo Capus e Brown (2003), a FrFT é um método superior para a representação tempo-frequência de sinais *chirp*, oferecendo maior precisão que a Transformada de Fourier convencional. Os autores propuseram a equação 13:

$$\mathcal{F}^\alpha f(x) = \frac{\exp[-j(\frac{1}{4}\pi\hat{\varphi}^{-\frac{1}{2}}\varphi)]}{(2\pi|\sin \varphi|)^{1/2}} \exp\left(\frac{1}{2}jy^2 \cot \varphi\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-jxy}{\sin \varphi} + \frac{1}{2}jx^2 \cot \varphi\right) f(x) dx \quad (13)$$

onde, $\alpha \in [0,1]$ define a ordem da transformada, $\varphi = \alpha(\pi/2)$, e $\hat{\varphi} = \text{sgn } \varphi$, onde a função $\text{sgn } \varphi$ é a função sinal. Essa função é um artifício matemático que retorna o sinal de um número real, definida da seguinte forma:

$$\text{sgn } \varphi = \begin{cases} 1, & \text{se } \varphi > 0 \\ 0, & \text{se } \varphi = 0 \\ -1, & \text{se } \varphi < 0 \end{cases} \quad (14)$$

Existem dois casos especiais, de ordem 0 e de ordem 1: $\mathcal{F}^0 f(x)$ é a transformada de identidade, que retorna o mesmo sinal de entrada e $\mathcal{F}^1 f(x)$, é equivalente à transformada de Fourier clássica, representando uma rotação de 90° (Capus; Brown, 2003). Casos de α entre 0 e 1 são os casos fracionários utilizados para análise de *chirps*.

As variáveis x e y são utilizadas para enfatizar a generalidade da FrFT, em vez de se restringir à suposição dos domínios tradicionais de tempo e frequência. Dessa forma, enquanto x representa o domínio de entrada do sinal (geralmente o tempo), a saída da transformada, y , localiza-se em um domínio que não é nem o tempo nem a frequência. Essa saída está situada em um domínio fracionário, ou no plano tempo-frequência rotacionado, exceto nos casos especiais em que a ordem de transformação é $\mathcal{F}^0 f(x)$ e $\mathcal{F}^1 f(x)$.

$$\mathcal{F}^\alpha f(x) = \underbrace{\frac{\exp[-j(\frac{1}{4}\pi\varphi^{-\frac{1}{2}}\varphi)]}{(2\pi|\sin\varphi|)^{1/2}}}_{\text{passo 4}} \underbrace{\exp(\frac{1}{2}jy^2\cot\varphi)}_{\text{passo 3}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\exp\left(\frac{-jxy}{\sin\varphi}\right)}_{\text{passo 2}} \underbrace{+ \frac{1}{2}jx^2\cot\varphi}_{\text{passo 1}} f(x)dx \quad (15)$$

Segundo Almeida (1994), o cálculo da forma integral da Transformada Fracionária de Fourier pode ser descrito em uma sequência de passos. No passo 1, o processo se inicia com a multiplicação do sinal de entrada $f(x)$ por um *chirp*, $\exp(\frac{1}{2}jx^2\cot\varphi)$, cujo *slope* é determinado pela ordem da transformada. Posteriormente, no passo 2, é realizada uma transformada de Fourier escalonada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-jxy}{\sin\varphi}\right) f(x)dx \quad (16)$$

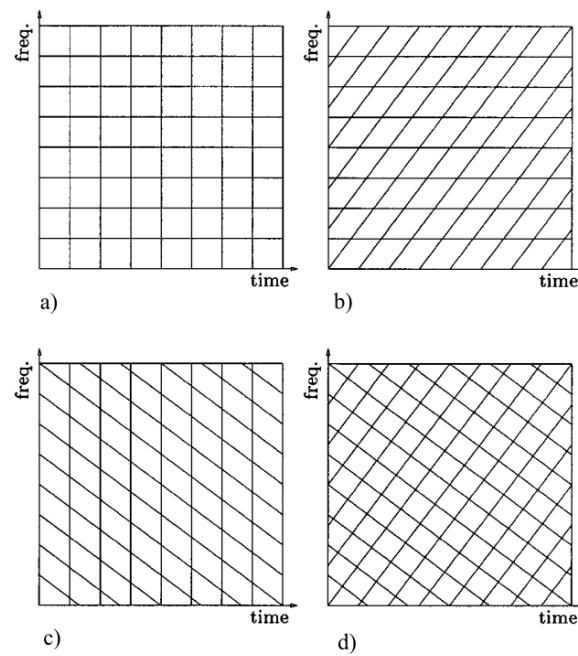
em que o fator de escala também é dependente da ordem da transformada fracionária (Capus; Brown, 2003).

A etapa seguinte envolve uma segunda multiplicação *chirp*, que ocorre no domínio da transformada, sendo indicado pela troca de variáveis x e y , $\exp(\frac{1}{2}jy^2\cot\varphi)$. O processo é finalizado, no passo 4, com a multiplicação pelo escalar complexo:

$$\frac{\exp[-j(\frac{1}{4}\pi\varphi^{-\frac{1}{2}}\varphi)]}{(2\pi|\sin\varphi|)^{1/2}} \quad (17)$$

Segundo Capus e Brown (2003) as duas etapas de multiplicação *chirp* foram descritas em termos de um cisalhamento sequencial do plano tempo-frequência, paralelamente aos eixos de tempo e de frequência. A representação discreta resultante é caracterizada por um conjunto de losangos, produzidos pelo cisalhamento da malha tempo-frequência por $\cos\varphi$ paralelamente ao eixo do tempo e por $\sin\varphi$ paralelamente ao eixo da frequência, conforme apresentado na Figura 26. A combinação dessas operações de cisalhamento resulta em uma rotação dos eixos convencionais de tempo-frequência, com o ângulo de rotação φ dependente da ordem da transformada.

Figura 26 – a) malha tempo-frequência. b) cisalhamento paralelo ao eixo do tempo. c) cisalhamento paralelo ao eixo da frequência. d) cisalhamento de tempo e frequência.



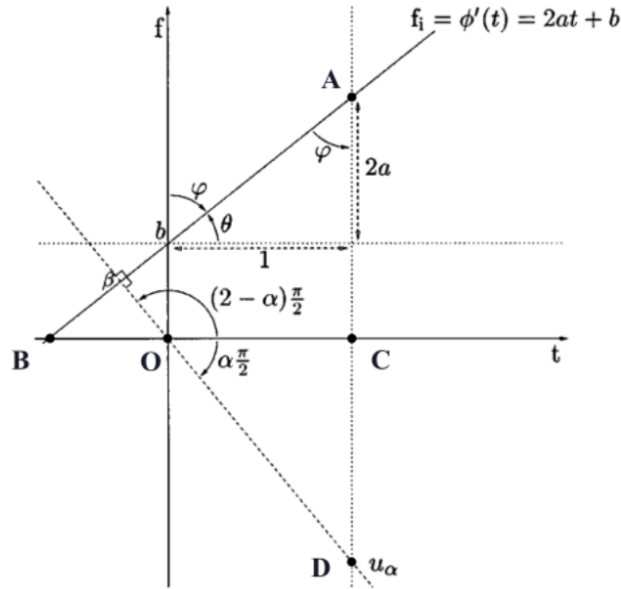
Fonte Capus e Brown (2003, p.3254).

No geral, essas etapas culminam na integração ao longo do plano tempo-frequência, paralelamente ao eixo do tempo rotacionado. O cálculo da transformada de Fourier comum pode ser descrito de forma semelhante como uma integração no plano tempo-frequência ao longo de todo o tempo, mas sem rotação de eixo (Capus; Brown, 2003).

O parâmetro α da Transformada Fracionária de Fourier é usado para ajustar a transformada e fornecer uma resposta ideal a um determinado sinal *chirp*. Quando a rotação do eixo mostrada na Figura 27 corresponde à taxa de *chirp* do sinal, a resposta de magnitude atinge seu valor máximo.

Na fórmula geral de um *chirp* $e^{j(at^2+bt+c)}$, o parâmetro de taxa a é relacionado com a ordem da transformada. Essa relação é descrita geometricamente através de um gráfico da frequência instantânea do sinal, $\varphi'(t) = 2at + b$, calculada pela derivada de sua fase, como mostrado na Figura 27 (Capus; Brown, 2003).

Figura 27 - Interpretação geométrica da relação entre a taxa de *chirp* a e a ordem da FrFT, α .



Fonte: Adaptado de (Capus; Brown, 2003, p.3255).

A semelhança de triângulos existente entre os triângulos ABC e ODC, evidencia que os ângulos BÂC e CÔD são os mesmos, resultando que:

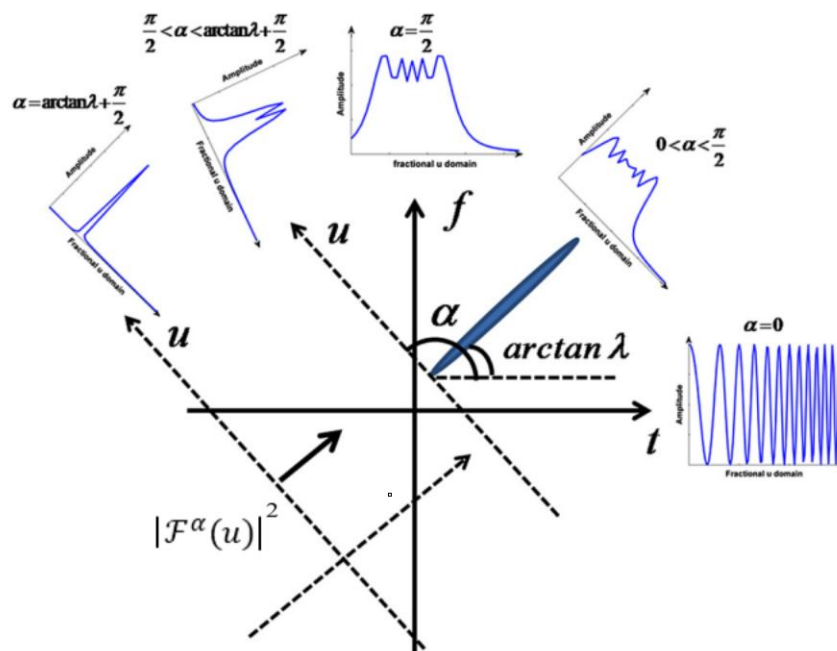
$$\alpha \frac{\pi}{2} = \varphi \rightarrow \alpha_{\acute{o}timo} = \frac{2}{\pi} \varphi \quad (18)$$

Como $\alpha \in [0,1]$, o ângulo ótimo de rotação do sinal pode ser entendido como um valor entre 0 e $\pi/2$, representando uma rotação de 0° a 90° a depender do *slope* do *chirp*. A integração no plano tempo-frequência para a FrFT de ordem α produz uma representação do sinal no domínio definido pelo eixo u_α , domínio fracionário, observado na Figura 27. Duas ordens de transformada que resultam no mesmo domínio de saída são mostradas, com rotações de eixo de $\alpha(\pi/2)$ e $(2-\alpha)(\pi/2)$. Considerando o caso mais simples, e considerando a equação 18, a ordem ideal para este sinal é definida por (Capus; Brown, 2003):

$$\alpha_{\acute{o}timo} = \frac{2}{\pi} \varphi = -\frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1}{2a} \right) \quad (19)$$

Dessa forma, a Transformada Fracionária de Fourier é interpretada como uma rotação do sinal no plano tempo-frequência, com um ângulo arbitrário de ordem α relacionado ao *slope* do *chirp*. Para um ângulo específico, que determina o $\alpha_{ótimo}$, o sinal alcança sua representação mais compacta, concentrando sua energia espectral da maneira mais eficiente possível (Serbes, 2017).

Figura 28 – LFM sendo rotacionado no plano tempo-frequência pela ação da FrFT.



Fonte: Adaptado de (Tu *et al.*, 2011).

A Figura 28 ilustra esse processo, mostrando como um sinal LFM é rotacionado em diferentes ângulos. O objetivo é justamente demonstrar como essa rotação, passo a passo, leva à forma mais compacta do sinal, onde sua energia está maximamente concentrada.

2.3.8 Vantagens da Utilização da FrFT na Análise de Sinais Radar

Sinais *chirp* são fundamentais em muitos radares modernos, pois permitem realizar a compressão de pulso, melhorando simultaneamente o alcance e a resolução do sinal, além de estabelecer maiores dificuldades de detecção por parte do inimigo. Um sinal FMCW quando

amostrado em um período curto, se assemelha a um sinal *chirp*, podendo ser um dos focos de estudo desse trabalho.

A FrFT é a ferramenta matemática ideal para analisar esses sinais LFM porque ela se ajusta perfeitamente à sua natureza de frequência variável. Em vez de espalhar a energia do sinal por todo o espectro, como faria a Transformada de Fourier convencional em um sinal de frequência linearmente variável, a FrFT a concentra, facilitando a detecção e a análise.

Ao concentrar a energia do sinal no domínio fracionário, a FrFT aumenta a SNR. Isso possibilita a melhor detecção de alvos fracos ou distantes, já que o sinal de interesse se destaca mais em meio ao ruído, sendo inclusive de grande importância para detecção de sinais provenientes de radares LPI.

Diferente da Transformada de Fourier padrão, que é mais adequada para sinais estacionários, a FrFT é ideal para sinais não estacionários, como os que têm frequência modulada. Isso é especialmente útil em aplicações de radar que envolvem o monitoramento de alvos em movimento pela utilização do efeito Doppler e em ambientes complexos. Se a plataforma alvo tiver um MAGE instalado e utilizar a FrFT em um receptor digital para detectar esses sinais radar, poderá identificar que está sob ameaça de um radar hostil.

A Transformada Fracionária de Fourier é uma ferramenta otimizada, ideal para a análise de sinais de radar. Ela se destaca por abordar as características específicas de sinais de baixa probabilidade de interceptação, que frequentemente utilizam modulação em frequência.

Graças a essa otimização, a FrFT proporciona uma análise mais precisa e eficiente para a detecção de radares hostis. Ao concentrar a energia desses sinais, ela melhora significativamente a capacidade de detectar e rastrear esses sinais radar, especialmente aqueles que são mais difíceis de serem detectados pelos métodos convencionais.

2.4 Comparação dos Detectores de Sinais

No campo do Processamento Digital de Sinais, a detecção de sinais em ambientes ruidosos é uma tarefa fundamental. Com o objetivo de analisar e comparar o desempenho de diferentes estratégias de detecção, foram implementados três detectores utilizando o *software* MATLAB. Esses detectores foram projetados para avaliar a capacidade de detectar tanto sinais cossenoides não modulados quanto sinais modulados em frequência, como os *chirps*,

em um ambiente onde existe a presença de ruído. A análise é baseada na probabilidade de detecção, que é calculada em função da razão sinal-ruído e de um limiar de detecção pré-estabelecido. Para garantir a robustez e a confiabilidade dos resultados, cada detector utiliza várias iterações por meio de simulações organizadas em laços de programação.

2.4.1 Detector por Energia Total (TED - *Total Energy Detector* ¹⁰)

O Detector por Energia Total (TED) é um método básico e direto de detecção de sinais que tem como premissa fundamental determinar que um sinal está presente, caso a energia total recebida (energia do sinal somado à energia do ruído) ultrapasse um valor predefinido. O raciocínio presente neste detector é o de que a energia do sinal na presença de ruído será significativamente maior do que a energia do ruído isoladamente. Consequentemente, na ausência de um sinal, a energia será suficientemente baixa, de modo a possibilitar que o detector determine inequivocamente a inexistência do sinal de interesse, havendo apenas ruído. Para que esse processo ocorra de maneira eficiente, um limiar de detecção deve ser apropriadamente estabelecido.

O limiar de detecção é definido de acordo com os parâmetros encontrados na simulação do sinal e do ruído, se baseando intimamente em uma probabilidade de falso alarme específica, por exemplo $P_{Fa} = 0,01$. Essa probabilidade determina a chance de o detector indicar que existe um sinal quando na realidade só há ruído e por isso ela deve ser baixa.

Para o caso do Detector por TED, a teoria estatística implementada no código de programação do *software* MATLAB estabelece que a energia de um ruído gaussiano segue uma distribuição qui-quadrada central. Essa distribuição propõe que, ao amostrar o ruído em um intervalo de tempo, a energia dele pode ser definida aproximadamente pela soma dos quadrados das amostras. Quando existe o sinal juntamente ao ruído, a energia total segue uma distribuição qui-quadrado não central. Essa distribuição leva em consideração um parâmetro adicional de não centralidade λ , que é proporcional à energia do sinal de interesse,

¹⁰ Tradução: Detector por Energia Total

sendo definido como a razão entre a energia desse sinal e a densidade espectral do ruído (Urkowitz, 1967).

2.4.2 Detector por FFT

O Detector por FFT procura utilizar a propriedade de concentração de energia em uma frequência específica do sinal recebido. Essa abordagem é mais bem realizada em sinais estacionários, ou seja, com frequência constante, visto que sinais *chirp* têm sua frequência variando com o tempo por definição, não tendo concentração de energia em uma frequência característica.

O limiar de detecção é calculado, de maneira semelhante ao Detector TED, de modo a se ter uma PFa desejada. A detecção ocorre por meio da aplicação da FFT no sinal recebido, a fim de transformá-lo para o domínio da frequência, de forma que se evidencie picos de energia em certas frequências, destacados em meio ao ruído. O evento da detecção é registrado para casos em que a magnitude máxima do pico gerado pela FFT no espectro de frequências ultrapasse o limiar de detecção.

A teoria estatística implementada, no caso do Detector por FFT, estabelece que a magnitude do ruído no domínio da frequência assume uma distribuição de Rayleigh. Segundo Papoulis e Pillai (2002), uma variável aleatória x terá distribuição de Rayleigh com parâmetro σ^2 se sua Função Densidade de Probabilidade for:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & , \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Para casos em que há sinal juntamente ao ruído, o cálculo da curva de Pd foi implementado considerando a distribuição qui-quadrada não central, semelhante ao Detector por TED.

2.4.3 Detector por FrFT

O Detector por FrFT explora a característica de sinais não estacionários, ou seja, sinais com frequência variando no tempo. O objetivo é detectar a presença de um *chirp* em um domínio fracionário fornecido pela FrFT, onde a energia desse sinal se concentra em um único pico, processo análogo ao realizado pelo Detector por FFT de um cossenoide sem modulação em frequência. Encontrar o correto ângulo de rotação, parâmetro fracionário que corresponde ao *slope* do *chirp*, é o ponto crucial para este detector.

A eficácia do Detector por FrFT reside na sua capacidade de concentração de energia, uma característica diretamente ligada ao seu princípio matemático. Enquanto a FFT causa a dispersão da energia de um sinal *chirp* por diversas frequências, a FrFT atua alinhando o *slope* com o eixo do domínio fracionário. Esse alinhamento preciso concentra toda a energia do *chirp* em um único ponto, o que eleva substancialmente a SNR. Tal aumento de SNR é decisivo para a detecção de sinais de baixa probabilidade de interceptação, permitindo que o detector identifique sinais fracos ou distantes que estariam camuflados no ruído para detectores convencionais, como sinais de radares LPI.

O cálculo dessa ferramenta de detecção é tipicamente realizado pelo algoritmo apresentado na equação 15, que garante a eficiência computacional necessária para sistemas digitais. Contudo, essa alta eficiência introduz uma complexidade adicional: o detector precisa realizar uma busca no domínio fracionário para encontrar o *slope* exato do sinal de entrada. Na prática, essa busca se dá através da varredura de um intervalo de *slopes* predefinidos. A acurácia do resultado final depende da precisão com que o *slope* ideal é encontrado, sendo a concordância entre o parâmetro de busca e o *slope* do *chirp* o fator determinante para maximizar a probabilidade de detecção do algoritmo.

O modelo estatístico usado para implementação da curva teórica de Pd na abordagem por FrFT é o mesmo utilizado no Detector por FFT: a distribuição de Rayleigh para a presença apenas de ruído e a distribuição qui-quadrada não central para a presença de sinal juntamente ao ruído.

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Este trabalho objetiva realizar uma análise comparativa entre três técnicas de detecção de sinais radar implementadas no *software* MATLAB, utilizando um programa desenvolvido pelo Instituto de Pesquisas da Marinha (IPqM). O código-fonte integral, utilizado para a simulação e validação dos três detectores, está detalhado no ANEXO.

O principal objetivo desta implementação é ilustrar, por meio de simulação, as diferenças de desempenho entre os detectores de Energia Total (TED), de Transformada Rápida de Fourier (FFT) e de Transformada Fracionária de Fourier (FrFT), diante da recepção de sinais de duas categorias: cossenoides sem modulação e *chirps*.

A simulação oferece um ambiente controlado para a análise de cada procedimento de detecção sob as mesmas condições de ruído e sinal, permitindo uma comparação quantitativa precisa, a fim de comparar a eficiência entre os detectores, em especial para a detecção de sinais do tipo *chirp*.

3.1 Classificação da Pesquisa

Segundo Gil (2002), uma pesquisa pode ser classificada quanto aos seus objetivos, que representam os fins que a pesquisa busca atingir. Contudo, para analisar fatos de forma empírica e confrontar a teoria com a realidade, é preciso um planejamento detalhado, conhecido como delineamento da pesquisa.

O delineamento define o modelo conceitual e operacional do estudo, incluindo a coleta e a análise dos dados. Ele também considera o ambiente de pesquisa e como as variáveis serão controladas, resultando no segundo tipo de classificação da pesquisa, a classificação com base nos procedimentos técnicos, ou quanto aos meios.

A pesquisa aqui desenvolvida é classificada quanto aos fins e quanto aos meios, conforme as diretrizes metodológicas propostas por Gil (2002), da seguinte forma:

3.1.1 Quanto aos Fins

Quanto aos objetivos, o estudo se caracteriza como pesquisa explicativa. O principal propósito deste estudo é ir além da descrição dos detectores de sinais, buscando identificar e explicar os fatores que permitem a comparação de suas respectivas eficiências.

Especificamente, o trabalho visa demonstrar, através de uma abordagem quantitativa, por qual motivo a Transformada Fracionária de Fourier (FrFT) se mostra uma ferramenta de processamento que possibilita uma detecção de sinais do tipo *chirp* em ambientes ruidosos mais eficiente, quando comparado a outras técnicas como a Transformada Rápida de Fourier (FFT) e o Detector de Energia Total (TED).

3.1.2 Quanto aos Meios

No que diz respeito aos procedimentos técnicos, a pesquisa é categorizada como bibliográfica e experimental.

A natureza bibliográfica reside na fundamentação teórica do estudo, que se apoia em um levantamento de obras e artigos científicos para construir o arcabouço conceitual. As referências utilizadas para embasamento teórico sobre conhecimentos estatísticos, sobre Guerra Eletrônica, sobre as transformadas de Fourier utilizadas neste estudo e sobre processamento de sinais, justificam a catalogação deste estudo como pesquisa bibliográfica.

O aspecto experimental, por sua vez, se refere ao ambiente simulado que constitui o principal meio para a coleta de dados empíricos. Através da criação e execução de modelos computacionais em MATLAB, o comportamento dos sinais é modelado, permitindo a análise controlada e a validação do desempenho dos detectores em diferentes cenários, o que seria mais difícil de se realizar em um ambiente real. Dessa forma, o presente estudo assume características de pesquisa experimental, segundo Gil (2002).

3.2 Limitações do Método

Este trabalho utilizou para análise sinais cossenoides sem modulação e sinais modulados em frequência, sem explorar a detecção de outros tipos de sinais radar, como os

com modulações mais elaboradas ou com perfis de frequência não lineares. A implementação de um Detector por FrFT é uma ferramenta a mais que pode ser aproveitada nos MAGE dos navios da Marinha do Brasil. O presente estudo colabora com um conjunto de métodos de detecção a fim de fomentar a evolução das técnicas de detecção em cenários modernos.

O presente estudo também apresenta limitações no que se refere à sua metodologia de simulação. A principal restrição reside na utilização de um modelo idealizado para o ambiente de detecção que, embora fundamental para a validação teórica, não abarca a complexidade das condições do mundo real. As simulações foram conduzidas sob a suposição de um canal com Ruído Gaussiano Branco Aditivo (AWGN), que simplifica a dinâmica de ruídos e interferências mais complexas, como ruídos de banda estreita, ruídos impulsivos, interferências não intencionais, ou retornos de sinais indesejados advindos da reflexão com a superfície da água ou de partes do próprio Navio emissor.

3.3 Coleta e Tratamento de Dados

A implementação dos detectores foi realizada por meio de um código do tipo *Live Script*. Essa ferramenta do MATLAB integra o código de programação com a saída do seu processamento, incluindo gráficos e resultados numéricos, em um único documento interativo. Diferente de um *script* tradicional, o *Live Script* é um recurso que permite que o usuário execute seções de código de forma independente, visualize os resultados imediatamente e altere parâmetros do sinal de entrada de maneira mais intuitiva e interativa. Essa abordagem facilita a usabilidade e a análise, tornando o processo de coleta de dados mais dinâmico e prático, flexibilizando a comparação entre os detectores.

Dessa forma, os parâmetros iniciais do sinal de entrada são escolhidos pelo usuário de maneira a permitir uma análise comparativa e concomitante entre as três diferentes abordagens de detecção. São definidos no início do *script* a frequência de amostragem f_s (MHz), a frequência central f_c (MHz), o número de pontos da FFT, considerando a amostragem do sinal, a fase inicial φ_0 (em graus), o tipo do sinal, se cosseno sem modulação ou *chirp* e o *slope* do sinal de interesse (MHz/ μ s) – escolha habilitada para casos de sinal modulado linearmente em frequência.

Os parâmetros iniciais do Detector por FrFT são definidos pelo usuário posteriormente, de forma semelhante aos do sinal de entrada, começando pela frequência intermediária (MHz). É essencial destacar que os resultados de detecção apresentam melhora significativa quando a frequência intermediária do detector é ajustada para ser de valor igual à frequência central do sinal *chirp*.

Outra etapa importante da escolha dos parâmetros desse detector é o estabelecimento dos dados de busca do *slope*. O usuário determina o *slope* inicial e final, bem como o passo de busca, todos com medida MHz/ μ s. Quando a mais alta eficiência for obtida nesta etapa, o que ocorre quando o passo da busca permite que o valor exato do *slope* do *chirp* seja testado, o *slope* do *chirp* analisado é detectado.

Para a plotagem das curvas de Pd, é estabelecido pelo usuário o valor de PFa desejado, fator que está intimamente relacionado ao limiar de detecção. Posteriormente o usuário define SNR inicial e final, bem como o número de pontos da curva de Pd, que serão igualmente espaçados.

Com esse procedimento primário, o usuário define parâmetros iniciais do ambiente modelado no *software* MATLAB, para que sejam plotadas as curvas de Pd para cada detector. A qualquer mudança de parâmetros realizada pelo usuário, o *Live Script* apresenta novos resultados, realizando novas iterações nos laços de programação implementados em cada detector, fator que gera novos gráficos para cada caso.

A configuração do ambiente de simulação para a geração e análise dos gráficos de Probabilidade de Detecção foi o MATLAB, na versão Online (R2025b). A escolha da versão Online garantiu a compatibilidade e acesso contínuo aos *toolboxes*¹¹ necessários para o processamento de sinais e modelagem estatística.

As simulações foram executadas na seguinte configuração de hardware: processador (CPU): Intel(R) Core (TM) i5-10210U com frequência base de 1.60 GHz e *boost* de 2.11 GHz (10ª Geração); memória RAM de 8 GB; e sistema operacional de 64 bits.

¹¹ Conjunto de ferramentas do *software* MATLAB

A simulação obedeceu a um modelo estatístico de teste de hipótese em meio a um ruído AWGN. Em cada iteração do laço de programação, o sinal recebido r é modelado pela soma do sinal de interesse s com o ruído n , conforme hipótese H_1 ($r = s + n$).

O dado de entrada de cada detector, conhecido como Estatística de Decisão, é fundamentalmente distinto para cada abordagem e representa o valor escalar que será comparado com o limiar. Para o Detector de Energia Total (TED), o dado de entrada é o valor escalar da energia total E , obtido pela norma quadrática do vetor de amostras do sinal no domínio do tempo, conforme a expressão:

$$E = \sum |r[n]|^2 \quad (21)$$

Figura 29 - Implementação do cálculo dos dados de entrada do Detector TED.

```

85     for i =1:1:it
86         r = hilbert(A.*s)+ sqrt(vern).*randn(size(s))+1i.*sqrt(vern).*randn(size(s));
87         x = norm(r)^2;

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 29 ilustra a implementação do dado de entrada do Detector TED no MATLAB, detalhando a construção da Estatística de Decisão que será comparada com o limiar. Conforme observado na linha 86 do código, o sinal recebido r é primeiramente sintetizado sob a hipótese H_1 , posteriormente o sinal de interesse é transformado para complexo pela função Hilbert e, em seguida, somado ao ruído gaussiano branco aditivo (AWGN) complexo. Após a geração do vetor de amostras, o algoritmo realiza a principal operação do Detector por TED na linha 87: o dado de entrada final x , que serve como dado de entrada do detector, é obtido como o resultado da norma quadrática $\text{norm}(r)^2$ do vetor r , o qual representa a energia total do sinal interceptado. Todo o processo de detecção é iterado por meio de um laço de programação – linha 85 – que realiza a repetição da criação do sinal recebido e o cálculo da energia por um número predefinido de vezes para cada ponto de SNR.

Já para o Detector por Transformada Rápida de Fourier (FFT), o dado de entrada é o pico de magnitude máxima no domínio da frequência. Como pode ser observado na Figura

30, o algoritmo aplica primeiro a FFT ao vetor r na linha 128 através de uma função e, em seguida, a magnitude dos valores transformados é calculada e normalizada na linha 129. Um teste é aplicado nas linhas 131 a 133 onde, para valores onde a magnitude ultrapassa o limiar de detecção estabelecido, calculado pela função presente na variável “limiarFFT”, um evento de detecção é contado.

Figura 30 - Seção de código que implementa o cálculo de entrada para o Detector por FFT.

```

126     for i =1:1:it
127         r = hilbert(A.*s)+ sqrt(vern).*randn(size(s))+1i.*sqrt(vern).*randn(size(s));
128         R = fft(r);
129         R_teste = abs(R(indicesBusca))./sqrt(N);
130
131         if max(R_teste)>limiarFFT
132             Nc = Nc + 1;
133         end

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso do Detector por Transformada Fracionária de Fourier (FrFT), o dado de entrada é o pico de magnitude máxima no domínio fracionário. Para isso, pode ser observado na Figura 31 que o vetor de amostras é transformado pela FrFT na linha 181 por uma função que implementa a transformada fracionária. Após a busca pelo parâmetro α ideal pela equação 19, implementada pela função na linha 179, o pico escalar máximo é extraído para comparação com o limiar, calculado pela função presente na variável “limiarFrFT”, como pode ser observado na linha 183, e um evento de detecção é contado para os casos em que o pico ultrapassar o valor do limiar, como pode ser observado na linha 184.

Figura 31 – Seção do código que implementa o cálculo dos dados de entrada para o Detector por FrFT.

```

178         for k = 1:length(slopeVec)
179             a = aM0(k);
180             r = hilbert(A.*s)+ sqrt(varn).*randn(size(s))+1i.*sqrt(varn).*randn(size(s));
181             fy_modB= fracFModB(r,a,shift);
182             X_modB = max(abs(fy_modB));
183             if X_modB>limiarFrFT
184                 Na_modB = Na_modB + 1;
185             end
186         end

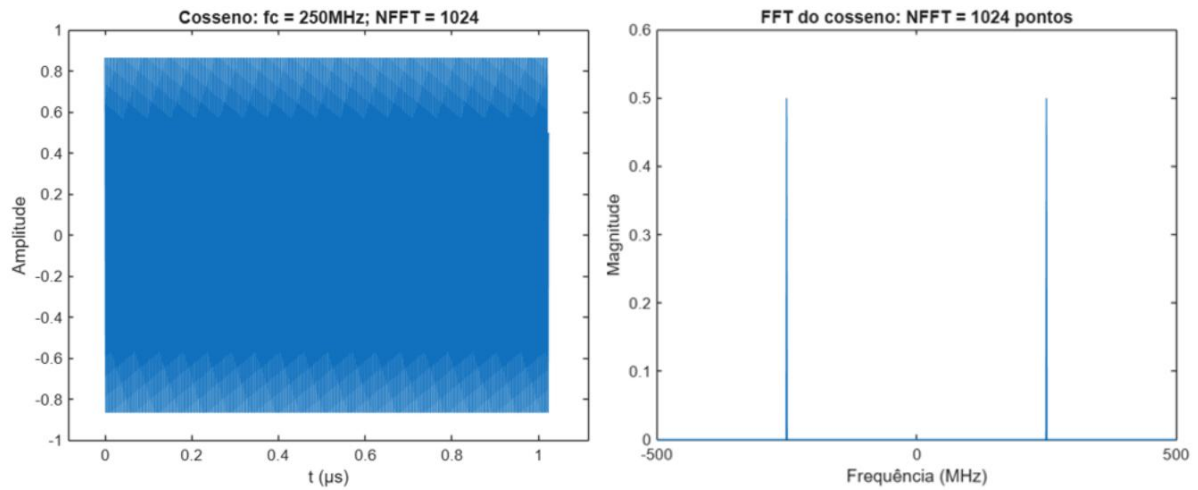
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

4 SIMULAÇÕES E ANÁLISE

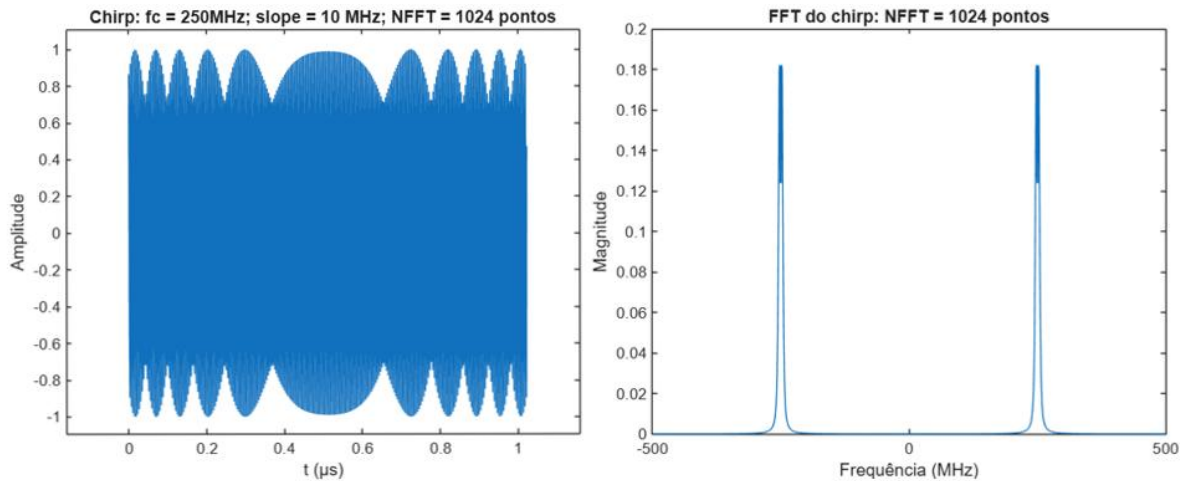
Os dados resultantes, estabelecendo os gráficos de Probabilidade de Detecção por SNR, são gerados e confrontados à medida que os parâmetros de entrada são sucessivamente alterados no ambiente de simulação. A primeira seção de resultados apresenta dois gráficos, sendo o primeiro mostrando o sinal de entrada variando sua amplitude em relação ao tempo (μs); em seguida, o segundo mostra a DFT em um gráfico magnitude por frequência. Para ilustrar, a Figura 32 demonstra essa estrutura para um sinal cossenoide não modulado. O gráfico à esquerda exibe o sinal no domínio do tempo, enquanto o gráfico à direita apresenta o resultado da DFT, com a energia concentrada em picos específicos (magnitude por frequência). É possível observar um espaçamento em frequência nos picos gerado pela DFT em um *chirp*, na Figura 33.

Figura 32 – Cossenoide não modulado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Posteriormente, cada detector desenvolvido gera um gráfico com duas curvas distintas de P_d : uma curva teórica e uma curva simulada. A curva teórica representa o desempenho ideal do detector, previsto pela teoria estatística subjacente a cada método. Por outro lado, a curva simulada reflete o desempenho prático do detector, obtido a partir dos resultados experimentais das simulações e dos parâmetros programados. A principal finalidade dessa dualidade é validar a implementação do código, verificando se os resultados simulados se aproximam dos valores esperados pela teoria.

Figura 33 - Sinal *chirp*.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A proximidade entre as duas curvas é um indicativo da validade e da corretude do modelo de simulação. O alinhamento consistente entre a curva simulada e a curva teórica evidencia a correta implementação do algoritmo, bem como a adequação dos parâmetros empregados na simulação, em relação aos conhecimentos teóricos. Um desvio significativo entre as curvas em um ou mais pontos, no entanto, pode sugerir uma inconsistência. Esse desalinhamento pode ser um indício de falha na implementação do código, um erro de cálculo, ou uma discrepância entre o modelo de simulação e o comportamento previsto pela teoria estatística.

O distanciamento entre curvas teórica e simulada observado na Figura 37, no entanto, ilustra que mesmo com uma correta implementação de algoritmo, a abordagem matemática da utilização da DFT para um sinal *chirp* gera uma perda significativa na eficiência de detecção por conta do espalhamento de energia gerado por essa abordagem no domínio da frequência.

A análise da concordância entre a teoria e a simulação é, portanto, uma etapa essencial para assegurar a acurácia das conclusões obtidas sobre o desempenho de cada detector.

Para a análise das simulações presentes neste trabalho, foi considerado uma Pfa de 0,01 para as três diferentes abordagens de detecção.

4.1 Análise do Detector por TED

O ambiente simulado no MATLAB é definido conforme um conjunto de parâmetros controlados. O ruído é modelado de acordo com um processo aleatório, sendo estabelecido como um ruído AWGN. O sinal de entrada pode ser variado entre cosseno não modulado ou um *chirp*, permitindo avaliação do detector em perspectivas diferentes. O sinal é definido com amplitude A , frequência central f_c e uma duração de N_{FFT} pontos, correspondentes ao número de amostras. A amplitude pode ser ajustada para simular diferentes valores de SNR, o que permite a construção das curvas de desempenho. Um sinal recebido r é definido como sendo a soma do sinal de interesse s com o ruído.

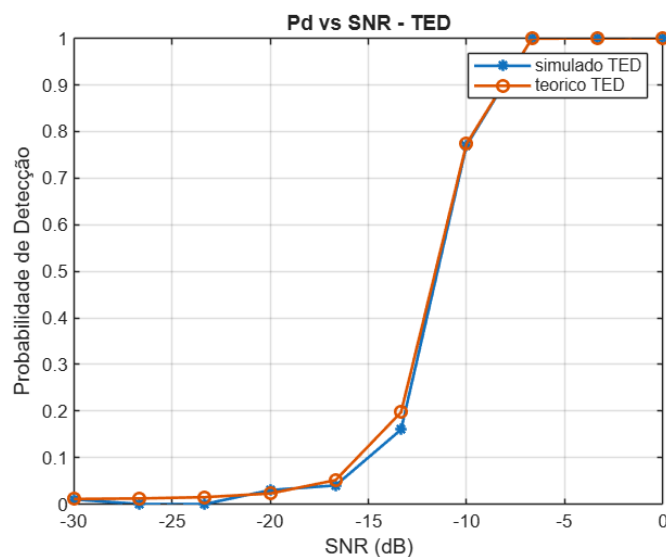
No código do MATLAB proposto, as funções utilizadas para implementação do limiar de detecção utilizam o raciocínio da teoria estatística referente ao Detector TED, exposto no capítulo 2.4.1. Definindo o limiar, o processo segue para a fase de simulação com o propósito de construir a curva de probabilidade de detecção. Para cada valor de SNR, uma grande quantidade de iterações é realizada utilizando laços de simulação, o que contribui para a robustez dos resultados produzidos. A cada iteração são gerados novos valores de sinais com ruído e a energia total é calculada utilizando a norma ao quadrado do vetor de amostras r . Nas ocasiões em que a energia do sinal exceder o limiar de detecção, um evento de detecção é registrado. A curva de P_d simulada é então gerada tendo como base a razão entre o número de detecções bem-sucedidas e o número total de iterações do laço.

A curva de detecção teórica é estabelecida por uma função considerando a teoria estatística, sendo utilizada para fins de comparação com a curva simulada a fim de validar os resultados modelados. A função da curva teórica emprega a distribuição cumulativa qui-quadrada não central, que descreve o comportamento da energia de um sinal em meio ao ruído AWGN. As curvas de P_d para sinais cossenoides não modulados e sinais *chirp*, para o Detector por TED, são representadas nos gráficos apresentados nas figuras 34 e 35 respectivamente.

O Detector TED tem a vantagem de ser um método de detecção simples de implementar, não precisando de informações prévias do sinal de interesse, como sua frequência, forma de onda ou fase. Dessa forma, funciona com qualquer tipo de sinal, detectando-o caso tenha energia suficiente para se destacar do ruído. Esse detector apresenta baixo custo computacional por sua simplicidade de implementação, dado que seu

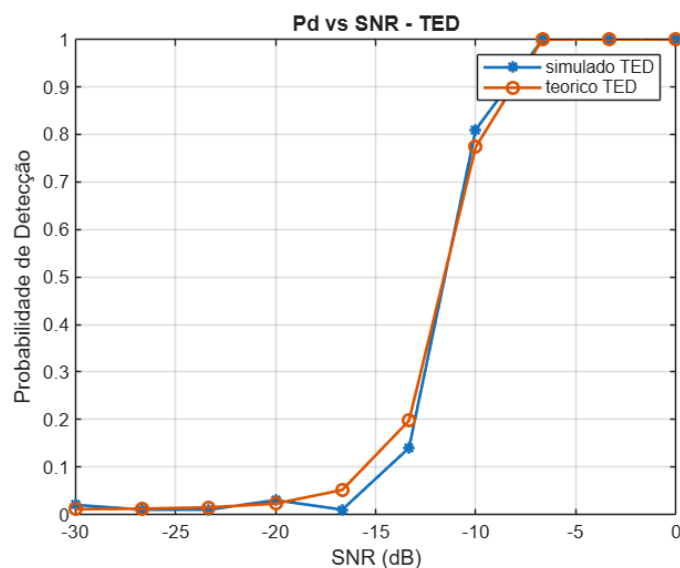
funcionamento se resume a somar os quadrados das amostras, tornando um recurso mais assertivo para sistemas limitados em poder de processamento.

Figura 34 - Curva de Probabilidade de Detecção usando Detector TED, para um cossenoide não modulado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 - Curva de Probabilidade de Detecção usando Detector TED, para um *chirp*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A desvantagem desse método de detecção é evidenciada por ser um processo que se baseia exclusivamente na energia total do sinal recebido, não fazendo a distinção entre a energia do sinal de interesse e a energia de outras fontes de interferência ou ruído. Esse fato o torna menos sensível, exigindo uma SNR maior para que se obtenha uma Pd adequada.

4.2 Análise do Detector por FFT

Uma função é implementada no ambiente simulado do MATLAB, considerando o embasamento teórico estatístico apresentado no capítulo 2.4.2, a fim de encontrar um limiar que corresponda a P_{Fa}, utilizando a distribuição de Rayleigh. De maneira similar ao Detector TED, muitas iterações são realizadas a fim de que seja plotada a curva de Pd por FFT com robustez, utilizando laços de programação. A geração do sinal recebido r também é similar, combinando o sinal de interesse com o ruído AWGN.

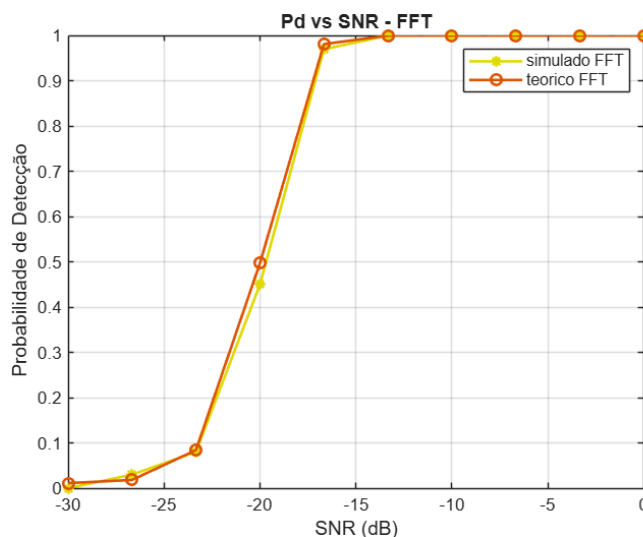
O processo é repetido para cada iteração e a Pd simulada é calculada sendo a razão entre o número de eventos de detecção e o número total de iterações. A curva teórica de probabilidade de detecção utiliza a teoria estatística de distribuição de Rayleigh para o ruído isolado e uma função de distribuição qui-quadrado não central quando existe a presença do sinal de interesse somado ao ruído. Nas Figuras 36 e 37 são representados os gráficos de Probabilidade de Detecção, para a abordagem de detecção por FFT, para sinais estacionários e não estacionários respectivamente.

O Detector por FFT é mais eficiente para detecção de sinais cossenoides em meio a ruído gaussiano devido ao fato de concentrar toda a energia do sinal em um único pico no domínio da frequência. Esse fato é uma vantagem em relação ao Detector TED que realiza o processo de detecção espalhando a energia do sinal por todas as amostras. Dessa forma, o Detector por FFT tem maior sensibilidade para detectar sinais, o que resulta em maior probabilidade de detecção para uma mesma SNR.

A desvantagem reside no fato de sinais não estacionários não serem eficientemente detectados por FFT, uma vez que sua energia se dispersa no domínio da frequência, o que resulta em menor SNR, sendo necessária uma abordagem mais específica para esses sinais. Isso pode ser observado no gráfico de Pd de um *chirp* por FFT, uma vez que a curva simulada se distancia da curva teórica por conta de uma perda de processamento advinda desse

espalhamento da energia gerado pela FFT. Essa diferença evidencia a motivação para a utilização do Detector por FrFT, uma vez que a transformação fracionária não espalha a energia do *chirp* no processo, gerando um pico bem definido no domínio fracionário.

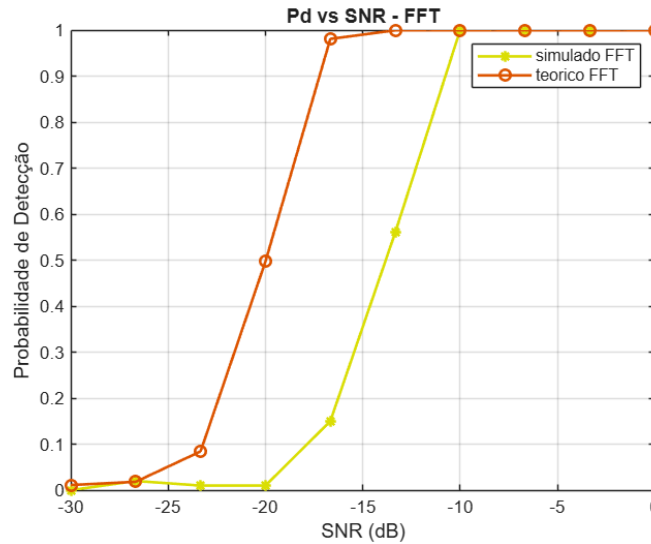
Figura 36 – Curva de probabilidade de detecção usando Detector por FFT, para um cossenoide não modulado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode ser constatado na Figura 36 que o detector atinge Pd de 100% para valores de SNR de aproximadamente -14dB, nos casos de sinal de entrada sem modulação em frequência. Já na Figura 37, a Pd de 100% é alcançada para sinais *chirp* de SNR de aproximadamente -10dB, evidenciando a necessidade de maior SNR para detecção, o que se traduz em uma queda na eficiência do detector para sinais não estacionários pela abordagem de FFT, por conta do espalhamento de energia que o método ocasiona no domínio da frequência.

Figura 37 – Curva de probabilidade de detecção usando Detector por FFT de um sinal chirp.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 Análise do Detector por FrFT

Uma das principais diferenças para os detectores por TED e por FFT é que o Detector por FrFT busca o sinal em um *range*¹² de *slopes*. Esta etapa é determinada pelo usuário, estabelecendo os parâmetros de entrada do detector, a fim de realizar uma busca de diferentes valores de *slopes*, iniciando e encerrando em valores estabelecidos e varrendo o intervalo a um determinado passo. Diante desse cenário, o detector é mais eficiente quando o passo de varredura do *range* permitir que um dos valores testados seja exatamente o *slope* do *chirp* do sinal de interesse. Tomando-se como exemplo o caso em que a função tenha *slope* inicial de -50MHz, *slope* final de 50MHz e passo de 10MHz, caso o *slope* do sinal de interesse seja 15MHz, este valor nunca será testado pela função. Essa discrepância impede o alinhamento perfeito, reduzindo a eficiência de detecção do algoritmo.

Como nos detectores anteriores mencionados, o limiar de detecção é calculado de forma a garantir uma PFa requerida, sendo implementada por uma função no MATLAB. A diferença é que, neste caso, a função que implementa o cálculo do limiar de detecção leva em conta a complexidade da seção de busca dos *slopes*. O limiar é calculado tendo como

¹² Tradução: Intervalo de *slopes*

base teórica estatística a distribuição de Rayleigh, assim como no Detector por FFT, mas considerando o número total de testes que também está relacionado à busca nos diferentes *slopes*.

O sinal recebido r é gerado pela combinação do sinal de interesse s com um ruído gaussiano n , assim como nos últimos casos. Uma função é implementada a fim de transcrever o cálculo do parâmetro de ordem α da FrFT para cada *slope*. A relação entre a ordem α e o *slope* é realizada por meio da equação 19.

O cálculo da Transformada Fracionária de Fourier é implementado por uma função no MATLAB através do algoritmo de multiplicações por *chirp* apresentado na equação 15. Para cada FrFT o código calcula a magnitude máxima do resultado para posteriormente comparar com o limiar de detecção. Quando qualquer pico de magnitude no domínio fracionário passar o limiar, um evento de detecção é observado.

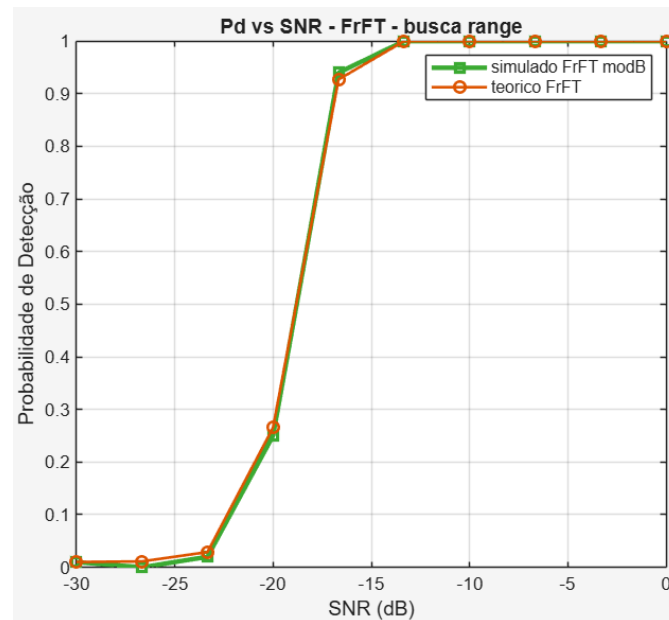
Através de laços de programação, o processo de detecção é repetido em diversas iterações e a curva de Pd simulada é gerada por meio da razão entre o número de detecções observadas e a quantidade total de iterações. De processo similar aos detectores anteriormente mencionados, a curva de Pd teórica é plotada utilizando-se uma função implementada no MATLAB, a fim de validar os resultados da curva simulada. A curva teórica leva em consideração as distribuições estatísticas de Rayleigh e qui-quadrada não central de busca por múltiplos *slopes*. As figuras 38 e 39 mostram as curvas de Pd, para o Detector por FrFT, para sinais com frequência constante e sinais modulados em frequência.

A principal vantagem desse tipo de detector é sua utilização em sinais não estacionários. Se por um lado a detecção por FFT espalha a energia do *chirp* no espectro de frequências, por outro, o Detector por FrFT concentra a energia em um pico bem definido no domínio fracionário, o que torna mais sensível e adequado para análise desse tipo de sinal de interesse.

A principal limitação desse método é a complexidade computacional que sua implementação emprega. O processo de busca por múltiplos *slopes* torna o custo computacional mais dispendioso do que o cálculo da FFT ou a soma dos quadrados das amostras no Detector TED. Adicionalmente, a eficiência de detecção é diretamente proporcional ao conhecimento prévio do *slope* do sinal de interesse. Para otimizar a detecção,

o *range* de busca por *slopes* deve ser ajustado para coincidir com o *slope* do *chirp* de entrada, permitindo atingir uma maior eficiência na detecção.

Figura 38 – Curva de probabilidade de detecção usando Detector por FrFT, para um cossenoide não modulado.

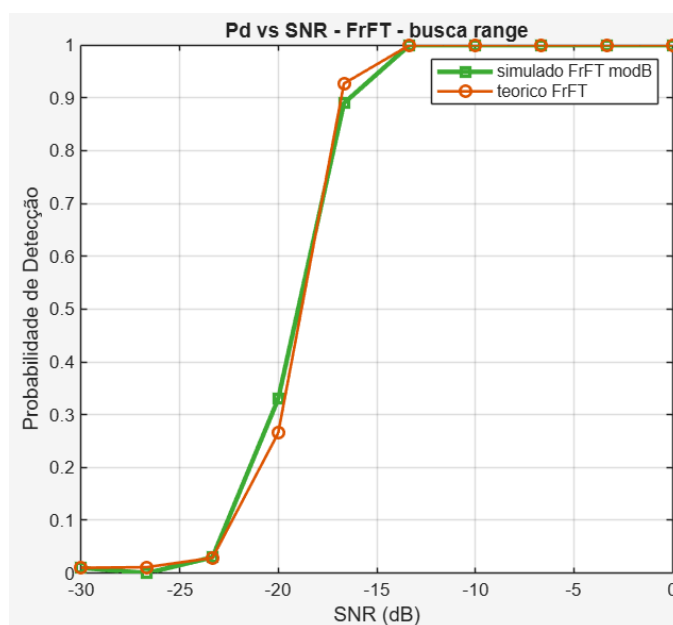


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 38 é constatado que é atingido uma Pd de 100% para sinais de SNR com valores de aproximadamente -14dB, em casos cossenoides sem modulação em frequência. A Figura 39 evidencia o aprimoramento na eficiência do método de detecção por FrFT em relação aos métodos convencionais ao ilustrar que é alcançado a Pd de 100% para sinais *chirp* com SNR de aproximadamente -14dB.

Os valores próximos de SNR para os dois diferentes tipos de sinais de entrada no Detector por FrFT corroboram com a teoria que estabelece que esse método é essencialmente uma generalização da FT tradicional. Como visto, para casos em que $\alpha = 1$ o processo realizado pela FrFT resulta a mesma transformação que a FT simples de um sinal estacionário, sugerindo que para valores de α fracionários, o método entregaria a mesma eficiência do que para o caso particular, caso fosse aplicado a um sinal estacionário.

Figura 39 – Curva de probabilidade de detecção usando Detector por FrFT de um sinal *chirp* com *range* da busca *slope* casado com *slope* do *chirp*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4 Análise Comparativa entre os Detectores para um *Chirp*

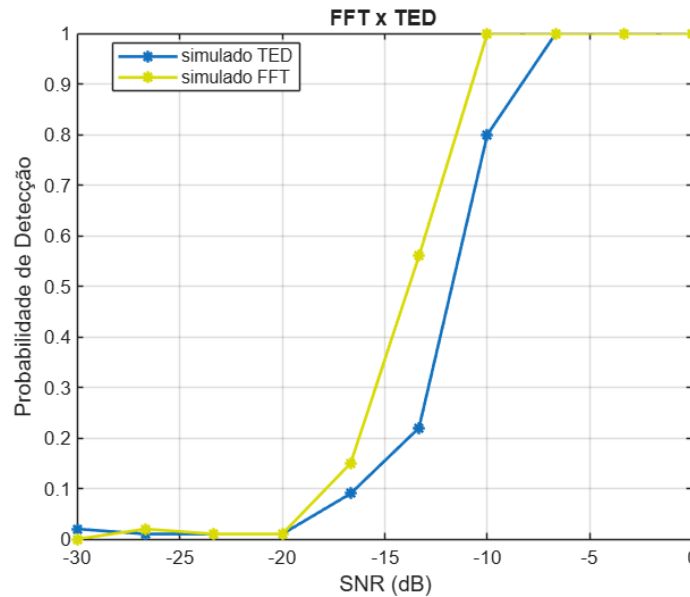
Com o objetivo de estabelecer uma análise comparativa detalhada entre as três metodologias de detecção, foram elaborados gráficos da Pd em função da SNR, para uma PFa de 0,01. Para essa finalidade, as curvas de desempenho de cada detector foram primeiramente plotadas em pares (dois a dois). Adicionalmente, um gráfico consolidado foi gerado para comparar o desempenho dos três detectores simultaneamente.

O critério de avaliação de desempenho é baseado no princípio de que o detector que alcançar uma Pd igual à 1 com o menor valor de SNR de entrada demonstrará a melhor eficiência de detecção. Os desempenhos serão comparados levando-se em consideração um sinal de entrada com modulação em frequência, representando um *chirp*.

A Figura 40 apresenta o gráfico comparativo de desempenho entre o Detector de Energia Total (TED) e o Detector por Transformada Rápida de Fourier (FFT). Os resultados demonstram que, para uma entrada de sinal *chirp*, o Detector por FFT requer uma SNR significativamente menor para alcançar uma Pd igual 1. Essa diferença de desempenho evidencia a superioridade do método baseado em FFT sobre o TED, mostrando que a análise

no domínio da frequência é inerentemente mais eficiente do que a simples soma da energia total do sinal recebido.

Figura 40 - Comparação de desempenho entre o Detector por TED e o Detector por FFT.

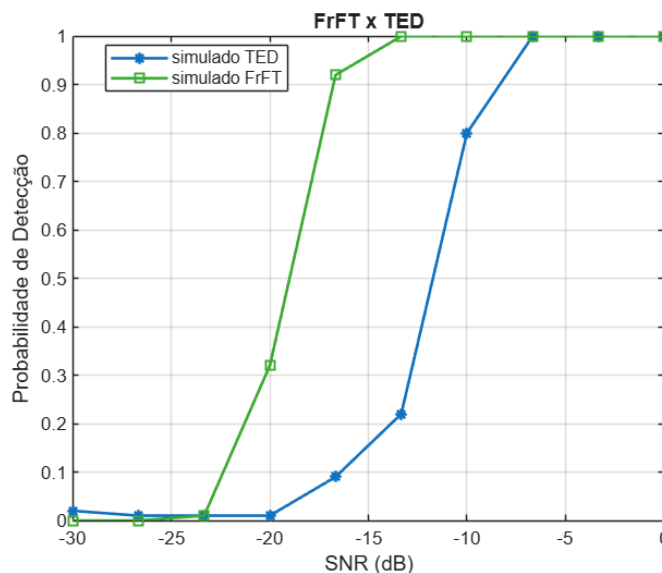


Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse fator indica que o Detector por FFT é capaz de detectar um sinal *chirp* com uma SNR inferior àquela exigida pelo Detector por TED, confirmando a maior eficiência da abordagem de análise no domínio da frequência em comparação com a medição da energia total. Observa-se que, enquanto o Detector TED atinge a P_d desejada quando a SNR atinge o valor aproximado de -6 dB, o Detector por FFT atinge essa mesma P_d quando a SNR está em torno de -10 dB.

A Figura 41 evidencia a análise comparativa entre o Detector por TED e o Detector por Transformada Fracionária de Fourier (FrFT), a fim de que possa ser verificado a diferença de eficiência de cada abordagem. Os dados obtidos pela apresentação gráfica dessa comparação permitem concluir que o Detector por FrFT mostra um considerável aumento na eficiência de probabilidade de detecção em relação ao Detector por TED, uma vez que necessita de um valor de SNR menor para apresentar a P_d igual a 1.

Figura 41 - Comparação de desempenho entre o Detector por TED e o Detector por FrFT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado apresentado no gráfico corrobora plenamente com a teoria matemática do processamento de sinais modulados em frequência. A superioridade da Transformada Fracionária de Fourier se deve à sua capacidade de concentrar a energia do sinal modulado em um pico bem definido no domínio fracionário. Essa concentração de energia é o fator determinante que facilita o evento de detecção, uma vez que o pico resultante ultrapassa o limiar de detecção com maior facilidade e com uma potência de entrada significativamente menor.

Essa diferença de eficiência é claramente quantificada pela SNR necessária para a detecção. Enquanto o Detector de Energia Total exige uma SNR de aproximadamente -6 dB para que a Probabilidade de Detecção seja de 100%, o Detector por FrFT atinge o mesmo objetivo com valor aproximado de apenas -14 dB. A diferença de 8 dB é significativa no cenário de processamento de sinais e indica que a abordagem baseada na FrFT é capaz de detectar sinais muito mais fracos, evidenciando sua eficiência superior em relação ao método de detecção por energia total.

O gráfico apresentado na Figura 42 demonstra a comparação de eficiência entre o Detector por FFT e o Detector por FrFT, confirmando a vantagem superior da Transformada Fracionária de Fourier para sinais com modulação em frequência.

A ineficiência do Detector por FFT reside no fato de que ele corresponde a um ângulo de rotação fixo de 90° , de ordem $\alpha = 1$, no plano tempo-frequência. Quando um sinal *chirp* é transformado por essa abordagem, sua energia é dispersa no domínio da frequência, pois o sinal é não estacionário.

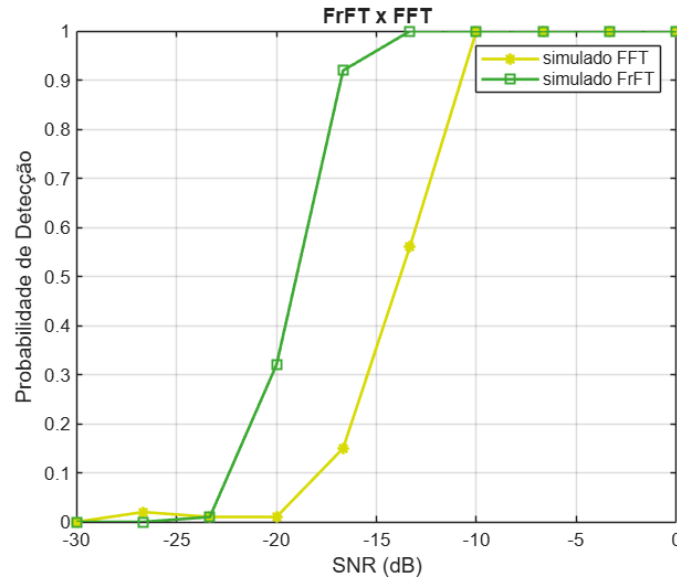
Em contrapartida, sinais *chirp* são caracterizados por um *slope* específico, que corresponde a uma ordem fracionária arbitrária contida no intervalo de $0 < \alpha < 1$. Para esses sinais, é necessária uma rotação em um ângulo característico e arbitrário no plano tempo-frequência, tarefa que a FrFT realiza. Essa rotação otimizada gera um pico bem definido em um domínio fracionário ao concentrar a energia do sinal de interesse nesse domínio. Consequentemente, a detecção se torna significativamente mais eficiente, visto que a energia concentrada ultrapassa o limiar de detecção com uma SNR muito menor do que a abordagem por FFT, que espalha essa energia por múltiplas frequências, fato que torna necessária uma SNR maior.

Embora o Detector por FFT já demonstre uma melhoria significativa em relação ao Detector de Energia Total, ele ainda necessita de uma SNR de aproximadamente -10 dB para que a Pd seja de 100%. Em contrapartida, o Detector por FrFT, otimizado para sinais *chirp* por sua característica de concentração de energia em um domínio fracionário, atinge 100% de Pd com uma SNR de apenas -14 dB, como pode ser constatado na Figura 42.

Essa diferença de 4dB é relevante no cenário de GE e representa um ganho direto na sensibilidade do sistema de detecção passiva. Esse valor se traduz na capacidade de detectar emissões com potências 2,51 vezes mais fracas que, na prática, indicaria um aumento direto na sensibilidade do receptor digital do MAGE MK3, permitindo a detecção de radares hostis a distâncias consideravelmente maiores, o que se traduz em maior vantagem tática.

O gráfico apresentado na Figura 43 oferece uma visualização consolidada e abrangente da comparação de desempenho entre as três metodologias de detecção. Esta representação unificada possibilita a análise simultânea do Detector de Energia Total (TED), do Detector por FFT e do Detector por FrFT, permitindo a visualização mais clara e direta da superioridade da abordagem baseada na Transformada Fracionária de Fourier (FrFT) para a detecção de sinais *chirp*.

Figura 42 - Comparação de desempenho entre o Detector por FrFT e o Detector por FFT.

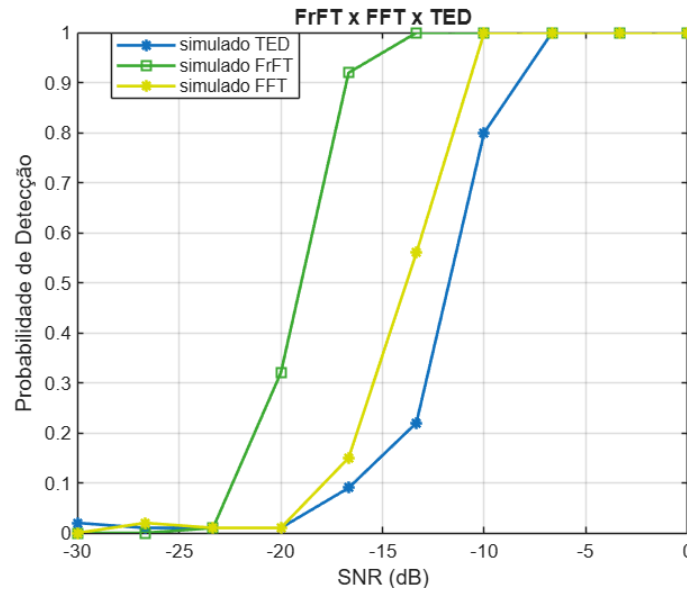


Fonte: Elaborado pelo autor.

A visualização unificada é fundamental para o entendimento do desempenho das três abordagens. A curva de Probabilidade de Detecção do Detector por FrFT está posicionada de forma proeminente mais à esquerda das demais, o que indica que ele atinge a Pd de 100% com os menores valores de SNR.

Dessa forma, fica evidenciada a maior eficiência de detecção de sinais *chirp* pela FrFT em comparação com as outras técnicas avaliadas, mostrando ser uma implementação viável e duradoura para os modernos sistemas de detecção passiva, como o MAGE DEFENSOR MK3, que buscam operar com o máximo de sensibilidade em ambientes ruidosos.

Figura 43 - Comparação de desempenho entre o Detector por FrFT, o Detector por FFT e o Detector por TED.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo central contribuir para o avanço das Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica (MAGE) por meio da análise comparativa da eficácia de três algoritmos de detecção, visando a detecção otimizada de sinais *chirp*. A pesquisa, de natureza explicativa e aplicada, utilizou um modelo de simulação no *software* MATLAB para confrontar o desempenho do Detector de Energia Total (TED) e do Detector por Transformada Rápida de Fourier (FFT) com o Detector por Transformada Fracionária de Fourier (FrFT), provando a hipótese de que a FrFT é a ferramenta mais eficaz para lidar com sinais não estacionários do tipo *chirp*.

A análise inicial demonstrou a ineficiência inerente ao Detector por TED que, por se basear apenas na soma da energia, exige uma SNR de aproximadamente -6 dB para 100% de Pd, em um cenário de PFa de 0,01. Em contrapartida, a abordagem no domínio da frequência, utilizando a FFT, representou uma melhoria, visto que o detector alcançou a mesma Pd com uma SNR de aproximadamente -10 dB. No entanto, a limitação da FFT em lidar com o *slope* do *chirp* foi observada, uma vez que o detector é penalizado pela dispersão da energia do

signal no domínio da frequência, o que comprova sua subotimalidade para este tipo de forma de onda.

O ponto focal do estudo foi a validação do Detector por FrFT como a solução mais adequada. A simulação confirmou que a FrFT, ao alinhar o sinal com o domínio fracionário através do ajuste do parâmetro α , concentra a energia do *chirp* em um único pico no domínio fracionário, superando a perda de eficiência causada pela FFT. Os resultados demonstram que o Detector por FrFT atinge 100% de Pd com uma SNR de aproximadamente -14 dB, para uma PFa de 0,01, o que estabelece a sua superioridade e robustez.

Em termos práticos, a superioridade da FrFT é quantificada pelos ganhos de sensibilidade. Em relação ao método mais simples (TED), a FrFT obteve um ganho de aproximadamente 8dB. Em relação ao Detector por FFT, a FrFT demonstrou uma vantagem de 4dB. Esse ganho significativo traduz-se diretamente na capacidade de detectar emissões cuja potência é 2,51 vezes mais fraca do que o exigido pelo Detector de FFT, reforçando a aptidão da FrFT em detectar de maneira mais eficiente radares de Baixa Probabilidade de Interceptação (LPI).

Dessa forma, o trabalho conclui que a Transformada Fracionária de Fourier é uma ferramenta essencial para o desenvolvimento de receptores digitais em equipamentos MAGE. Ao fornecer um método de detecção e análise superior para sinais *chirp*, a FrFT garante maior consciência situacional e confere uma vantagem tática e estratégica às plataformas navais.

5.1 Considerações Finais

O sucesso na identificação do melhor desempenho de detecção de sinais *chirp* foi possível devido à correta modelagem estatística do ambiente de detecção e à precisão da metodologia de simulação. A demonstração de que o Detector por FrFT atinge 100% de Pd com -14 dB de SNR para uma PFa de 0,01 valida o princípio de que o processamento digital avançado é a chave para superar os desafios impostos por sinais LPI. Esse resultado sugere a implementação desse detector em receptores digitais, como o presente no MAGE DEFENSOR MK3, que permitem empregar algoritmos matemáticos complexos para extrair informações que não são mensuráveis em sistemas analógicos.

O conhecimento gerado por esta pesquisa tem implicações diretas e imediatas para a segurança das operações navais. A capacidade de detectar com acurácia um sinal com potência 2,51 vezes menor do que a segunda melhor abordagem de detecção comparada (FFT) traduz-se em maior alcance de detecção passiva e maior tempo de reação contra ameaças. Ao validar a eficácia do detector baseado em FrFT, este trabalho fornece o subsídio técnico para que as equipes de pesquisa e desenvolvimento integrem este detector de *chirp* como uma nova capacidade, permitindo detectar e estimar mais sinais que podem ser acrescentados à Biblioteca de Emissores, o que possibilita também aprimorar a classificação de sinais baseada na extração precisa dos parâmetros do *slope* e da frequência.

5.2 Sugestões para Futuros Trabalhos

O conhecimento consolidado sobre a Transformada Fracionária de Fourier na detecção de sinais eletromagnéticos abre um horizonte promissor para a aplicação dessa metodologia em um campo conceitualmente análogo: a Acústica Submarina. Assim como a Guerra Eletrônica lida com ondas de rádio (EEM) em um meio denso e ruidoso, a detecção acústica trata da propagação de ondas sonoras em um meio igualmente complexo – o oceano.

O sinal *chirp*, que foi o foco principal deste trabalho, não é exclusivo de radares; ele também é uma das formas de onda mais utilizadas em sonares ativos. Nesses sistemas, pulsos acústicos modulados linearmente em frequência (LFM) são transmitidos para obter alta resolução e alcance sob a superfície.

Portanto, sugere-se como trabalho futuro a investigação da aplicabilidade do Detector por Transformada Fracionária de Fourier (FrFT) ao processamento de sinais sonar. Esta pesquisa de seguimento poderá focar em adaptar o Detector FrFT para processar e detectar pulsos *chirp* LFM em canais de ruído subaquático; utilizar a FrFT para extrair o *slope* e a frequência de pulso de sinais submersos, contribuindo para a classificação de assinaturas acústicas de plataformas navais, como submarinos ou minas; comparar a eficiência da FrFT com as técnicas convencionais de compressão de pulso utilizados atualmente em sonares, quantificando o ganho de SNR no cenário acústico; ou implementar a técnica de detecção por FrFT à detectores passivos de ondas acústicas.

Essa linha de pesquisa representa a transição ideal do conhecimento em detecção por GE para a aplicação em Acústica Submarina, permitindo que a expertise adquirida no domínio tempo-frequência seja alavancada para o avanço da capacidade de defesa e detecção naval brasileira no ambiente submarino.

A transição para a pesquisa em Acústica Submarina alinha-se diretamente com os objetivos estratégicos da Marinha. Nesse sentido, a citação da missão do Instituto de Estudos do Mar Almirante Paulo Moreira (IEAPM) reflete essa convergência de propósitos:

Realizar atividades de pesquisa, desenvolvimento, inovação e prestação de serviços tecnológicos na área de Ciências do Mar, a fim de contribuir para a ampliação do conhecimento e a eficaz utilização do meio ambiente marinho, no interesse da MB e do desenvolvimento socioeconômico do País (Brasil, 2025a).

Ademais, com o sucesso da abordagem de detecção de sinais *chirp* explorada neste estudo, sugere-se a aplicação de técnicas de Inteligência Artificial (IA) em trabalhos futuros, visando o aprimoramento da classificação dos diferentes sinais detectados. A eficiente detecção de sinais *chirp* proveniente da FrFT, aliada a uma classificação rápida e automatizada por meio da utilização de redes neurais, permitiria buscar e reconhecer padrões essenciais nos parâmetros dos sinais interceptados. Essa integração entre a FrFT e a IA tornaria altamente eficaz o processo automatizado de detecção e classificação de diversas formas de onda presentes no Espectro Eletromagnético (EEM), aprimorando significativamente a consciência situacional dos equipamentos MAGE existentes na Marinha do Brasil.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. B., 1994, “The fractional Fourier transform and time-frequency representations”. **IEEE Transactions on Signal Processing**, [s. l.], v. 42, n. 11, p. 3084-3091.

BOASHASH, B., 2016, **Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference**. 2. ed. Oxford: Elsevier.

BRASIL. Marinha do Brasil. Instituto de Estudos do Mar Almirante Paulo Moreira. **Institucional: Missão**. Rio de Janeiro, 2025. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/icapm/node/17> . Acesso em: 29 set. 2025.

BRASIL. Marinha do Brasil. Instituto de Pesquisas da Marinha. **Teste de Aceitação em Fábrica do MAGE Defensor Mk3**. Rio de Janeiro, 2025. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/ipqm/node/468> . Acesso em: 13 set. 2025.

BRASIL. Marinha do Brasil, Centro de Guerra Acústica e Eletrônica da Marinha. **Introdução à Guerra Eletrônica**. Rio de Janeiro, RJ: CGAEM, 2023.

CAPUS, Chris; BROWN, Keith, 2003, “Short-time fractional Fourier methods for the time-frequency representation of chirp signals”, **Journal of the Acoustical Society of America**, Melville, NY, v. 113, n. 6, p. 3253-3263.

CHEN, Victor C., 2011, **The Micro-Doppler Effect in Radar**, 2. ed. Boston: Artech House.

CHENG, Yongqiang *et al.*, 2016, “The geometry of signal detection with applications to radar signal processing”. **Entropy**, v. 16, n. 10, p. 1-19.

COOLEY, James W.; TUKEY, John W., 1965, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”, **Mathematics of Computation**, v. 19, n. 90, p. 297-301.

FIGUEIREDO, R. S., 2019, **Abordagens para análise e extração de características de radares LPI**. Dissertação, Mestrado em Engenharia Elétrica – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

GIL, Antonio Carlos, 2002, **Como elaborar projetos de pesquisa**, 4^a ed. São Paulo: Atlas.

JANKIRAMAN, M., 2018, **FMCW Radar Design**. Boston: Artech House.

LAVINSKY, Amanda Assis *et al.*, 2023, **Simulação Computacional de Seção Reta Radar (RCS) para Levantamento de Padrões de Assinaturas Eletromagnéticas**. Trabalho de Conclusão de Curso, Graduação em Engenharia da Computação e Engenharia de Comunicações - Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2023.

LUO, Yiran *et al.*, 2019, “A Novel Doppler Rate Estimator Based on Fractional Fourier Transform for High-Dynamic GNSS Signal”. **IEEE Access**, Piscataway, NJ, v. 7, p. 29575-29597.

MACIEL, Carlos Dias, 2022, **Processamento de sinais**. São Carlos: EESC-USP.

MELO, F. G. de, 2023, **Detecção de Sinais Radar Chirp por Receptores MAGE Digitais de Banda Larga**. 67 f. Monografia - Trabalho de Conclusão de Curso, Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Guerra Eletrônica – Centro de Instrução Almirante Alexandrino, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MOLINA, André Luiz Bandeira; NASCIMENTO, Francisco Assis de Oliveira, 2006, “Identificação de Sinais Radar Pulsados por meio de Transformada de Wavelet Contínua e Redes Neurais”, **Simpósio de Aplicações Operacionais em Áreas de Defesa**, v. 1, p. 1-5.

MÓNICA, Paulo; MÓNICA, Diogo, 2011. **Momento e oportunidade: Uma nota na história da Transformada Rápida de Fourier**. Boletim da SPM, Lisboa, v. 65, p. 59-61.

OZAKTAS, H. M.; KUTAY, M. A., “The fractional Fourier transform”, **IEEE Eur. Control Conf. (ECC)**, Sep. 2001, pp. 1477–1483.

PAPOULIS, Athanasios; PILLAI, S. Unnikrishna, 2002, **Probability, random variables, and stochastic processes**. 4. ed. New York: McGraw-Hill.

SERBES, Ahmet, 2017, “Compact fractional Fourier domains”, **IEEE Signal Processing Letters**, v. 24, n. 4, p. 427-431.

SILVA, Maximiliano Barbosa da, 2019, “Radar de baixa probabilidade de interceptação: A arte de "ver e não ser visto" na guerra eletrônica”, **Passadiço**, Rio de Janeiro, ano XXXII, n. 39, p. 12-15.

SOUZA, Thadeu César Dias de, 2022, **Análise do grau de relevância da classificação dos sinais polifásicos para um estimador baseado em duas redes em cascata**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Sistemas de Armas) – Centro de Instrução Almirante Wandenkolk, Rio de Janeiro, 2022.

SKOLNIK, Merrill I., 2001, **Introduction to Radar Systems**. 3. ed. New York: McGraw-Hill.

TABOADA, Fernando L, 2002, **Detection and classification of low probability of intercept radar signals using parallel filter arrays and higher order statistics**. 238 f. Dissertação, Mestrado em Engenharia de Sistemas - Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 2002.

TU, Tao *et al.*, 2011, “Chirp-modulated visual evoked potential as a generalization of steady state visual evoked potential”. **Journal of Neural Engineering**, v. 9, n. 1, p. 1-11.

UNITED STATES. Joint Force Commander. **Joint Electromagnetic Spectrum Operations**, 2020.

URKOWITZ, Harry, 1967, “Energy detection of unknown deterministic signals”, **Proceedings of the IEEE**, v. 55, n. 4, p. 523-531.

WALKER, J., 2024, **Radio vs Optical Spectrum**, NASA, Disponível em: <https://www.nasa.gov/directorates/somd/space-communications-navigation-program/radio-vs-optical-spectrum/>. Acesso em: 13 set. 2025.

ANEXO – CÓDIGO FONTE DA SIMULAÇÃO (IPqM)

INSTITUTO DE PESQUISAS DA MARINHA (IPqM). Código-Fonte para Análise Comparativa de Detectores de Sinais Radar (TED, FFT e FrFT). Rio de Janeiro, 2025.

Estudo sobre Detecção

Nesta etapa nós vamos comparar os resultados para a probabilidade de detecção entre diferentes métodos de detecção.

Parâmetros do sinal

```
clear all
close all
```

Frequência de amostragem (MHz):

```
fs = 1000; %MHz
```

Frequência central do sinal (MHz):

```
fc = 250; %MHz
```

Número de pontos da FFT (vai ser igual ao comprimento do sinal):

```
N_FFT = 1024 ; %número de pontos da FFT
A = 1 ; % Amplitude - só para plot - ela vai variar para a curva
varn = 1; %variância do ruído - sigman^2
```

Fase inicial do sinal:

```
phi0 = 30; % fase inicial do cosseno em graus
```

Slope do chirp (MHz/us):

```
slope = 10; %MHz/us
%cria o cosseno
```

Escolha um tipo de janelamento:

```
wSTR = "Nenhuma";
w = retornaJanela(wSTR, N_FFT);
```

Escolha o tipo de sinal (chirp ou sinal sem modulação - cosseno):

```
wTipo = 'cosseno'; % "cosseno"; % ou 'chirp'
```

Plota o sinal real no tempo:

```
flagPlota = false;
%plota o cosseno real
if strcmp(wTipo, 'cosseno') == 1
    s = fazCossenoReal(A, fs, fc, phi0, N_FFT, w);
```

```

elseif strcmp(wTipo,'chirp') == 1
    s = fazChirpReal(fs, fc,N_FFT,A,phi0,slope,w);
end
if flagPlota == 1
    t = (0:1:N_FFT-1)./(fs); %tempo em us
    figure;
    plot(t,s)
    xlabel('t (us)')
    ylabel('Amplitude')
    title([ wTipo '- fc = ' num2str(fc) 'MHz NFFT = ' num2str(N_FFT) ])

    S = fft(s)./(N_FFT);
    f = (0:1:N_FFT-1).*fs/N_FFT -fs/2;
    figure;plot(f,fftshift(abs(S)));
    % hold on
    % stem(fc,A/2)
    title(['FFT do ' wTipo ' N = ' num2str(N_FFT)])
    xlabel('freq (MHz)')
    ylabel('magnitudo')

end

```

Parâmetros do Detector FrFT

Esse detector faz a FrFT com o parâmetro fracionário setado para um range de busca de slopes que vai de slope Inicial até o slope final em um dado passo e verifica se o máximo encontrado está acima de um limiar. O limiar é determinado de forma a garantir uma dada probabilidade de falso alarme.

Frequência intermediária da FrFT - quando é igual à frequência central do chirp é quando encontramos os melhores resultados.

```

fi = 250;
shift = fi*N_FFT/fs;

```

Parâmetros para a busca do detector baseado em um vetor de slopes (MHz/us)

```

slopeIni = -50;%MHz/us
slopeFim = 50; %MHz/us
passo = 10;%MHz/us
slopeVec = slopeIni:passo:slopeFim;

```

Parâmetros para as curvas

Parâmetros para montar as curvas de probabilidade de detecção

Probabilidade de falso alarme:

```

pfa = 0.01;

```

SNR inicial e SNR final, em dB, e número de pontos da curva que serão igualmente espaçados.

```
snrIni = -30;
snrFim = 0;
Npontos = 10;
```

Número de interações do primeiro ponto (SNR mais baixa):

```
Nit1 = 100; %número de interações do primeiro ponto (SNR mais baixa)
```

Número de interações dos outros pontos:

```
Nit = 100; %número de interações dos outros pontos
if isempty(snrIni) || isempty(snrFim)
    msgbox('Valores inválidos RSR inicial ou final.');
```

```
    return
end
if snrIni > snrFim
    msgbox('RSR final menor que a inicial');
```

```
    return
end
if Npontos <= 0 || isempty(Npontos)
    msgbox('Número de pontos inválido.');
```

```
    return
end
if pfa <= 0
    msgbox('pfa inválida.');
```

```
    return
end
snr = linspace(snrIni, snrFim, Npontos);
```

Método de detecção por energia (Total Energy Detector)

Faz a curva de probabilidade de detecção por SNR usando o método de detecção por energia - Total Energy Detectors (TED)

```
geraCurvaTED = true;
if geraCurvaTED == 1
    N = length(s);
    limiarTED = limiarTeoricoEnergiaSummation(pfa, varn, N);
    P_threTED = zeros(size(snr));
    snr_lin = 10.^(snr./10);
    A_vec = sqrt(2*varn.*snr_lin);
    it_vec = ones(size(snr)).*Nit; %000; %10000;
    it_vec(1) = Nit1;

    f = waitbar(0, 'Calculando Pd do TED.');
```

```
    for j = 1:length(A_vec)
        waitbar(j/length(A_vec));
        A = A_vec(j);
        Nc = 0;
        it = it_vec(j);
```

```

    for i =1:1:it
        r = hilbert(A.*s)+ sqrt(varn).*randn(size(s))
        +1i.*sqrt(varn).*randn(size(s));
        x = norm(r)^2;

        if x>limiarTED
            Nc = Nc + 1;
        end

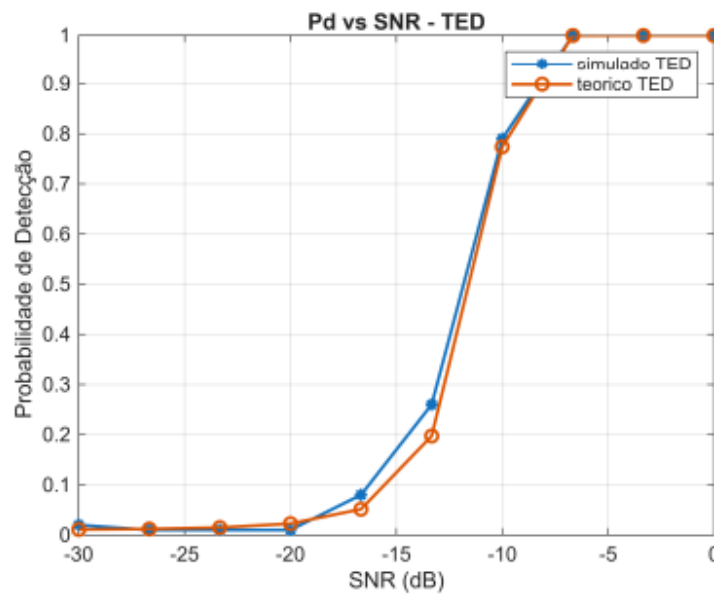
        %         end
    end
    %     P_thre(j) = Nc/(it.*length(amplitude));

    P_threTED(j) = Nc./(it);

end
delete(f);
% Pd_teorico_1 = ncx2cdf(limiar,2,A_vec_fft^2/varn,'upper');
Pd_teorico = calculaPdTeoricoEnergiaSummation(A_vec, varn,limiarTED,N);

figure
%
plot(snr,P_threAMB,snr,P_threCED,snr,P_threTED,snr,P_threMF,snr,P_threGLRT);
plot(snr,P_threTED,'-*',snr,Pd_teorico,'-o','LineWidth',1.5);
legend('simulado TED','teorico TED')
grid on
xlabel('SNR (dB)')
ylabel('Probabilidade de Detecção')
title(['Pd vs SNR - TED'] )
end

```



Detecção no domínio da frequência

Faz a curva de probabilidade de detecção por SNR usando o método de detecção na frequência. Verifica a maior magnitude após a FFT do sinal e compara com um dado limiar.

```

geraCurvaFreq = true;
if geraCurvaFreq == 1
N = length(s);
limiarFFT = limiarTeoricoFFT(pfa,varn,N);
P_threFFT = zeros(size(snr));
f = waitbar(0,'Calculando Pd da FFT. ');
indicesBusca = 2:1:floor(N/2)-2;
for j = 1:1:length(A_vec)
    waitbar(j/length(A_vec));
    A = A_vec(j);
    Nc = 0;
    it = it_vec(j);
    for i = 1:1:it
        r = hilbert(A.*s) + sqrt(varn).*randn(size(s))
+1i.*sqrt(varn).*randn(size(s));
        R = fft(r);
        R_teste = abs(R(indicesBusca))./sqrt(N);

        if max(R_teste)>limiarFFT
            Nc = Nc + 1;
    end
end

```

```

end

% end
end
% P_thre(j) = Nc/(it.*length(amplitude));

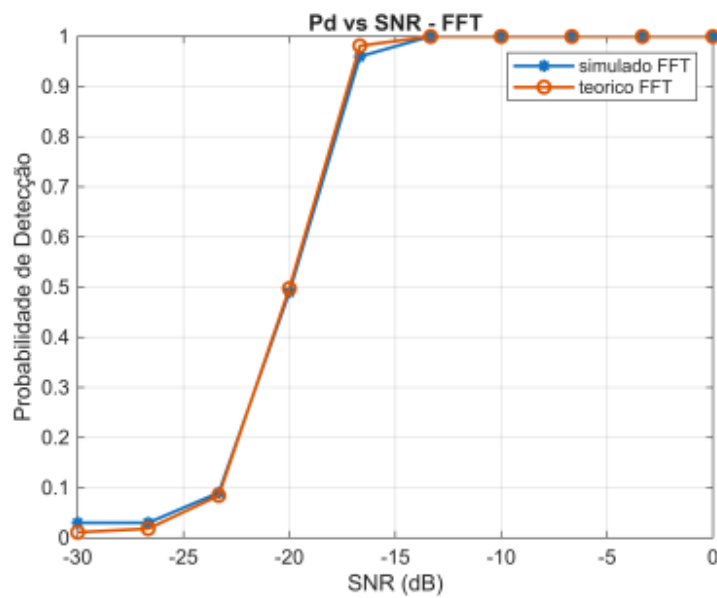
P_threFFT(j) = Nc./(it);

end
delete(f);
% Pd_teorico_1 = ncx2cdf(limiar,2,A_vec_fft^2/varn,'upper');

Pd_teorico = calculaPdTeoricoFFT(A_vec.*sqrt(N), varn,N,limiarFFT);

figure
%
plot(snr,P_threAMB,snr,P_threCED,snr,P_threTED,snr,P_threMF,snr,P_threGLRT);
plot(snr,P_threFFT,'-o',snr,Pd_teorico,'-o','LineWidth',1.5);
legend('simulado FFT','teorico FFT')
grid on
xlabel('SNR (dB)')
ylabel('Probabilidade de Detecção')
title(['Pd vs SNR - FFT'] )
end

```



Detecção por FrFT para um range de Slopes

Faz a curva de probabilidade de detecção por SNR usando o método de detecção por FrFT em um range de busca de slopes.

```

geraCurvaFrFT = true;
if geraCurvaFrFT == 1
    aMO = achaOrdem(fs,s,slopeVec);
    %no range o N não é o comprimento do sinal.
    Nit = 100;
    Nit1 = 100;
    it_vec = ones(size(snr)).*Nit;%000; %10000;
    it_vec(1) = Nit1;

    limiarFrFT = limiarTeoricoFrFT(pfa,varn,length(s),length(slopeVec));

    P_threFrFT_modB = zeros(size(snr));
    f = waitbar(0,'Calculando a Pd da FrFT. ');
    for j = 1:1:length(A_vec)
        waitbar(j/length(A_vec),f);
        A = A_vec(j);
        Nc_modB = 0;
        it = it_vec(j);
        for i = 1:1:it
            r = hilbert(A.*s)+ sqrt(varn).*randn(size(s))
            +1i.*sqrt(varn).*randn(size(s));
            Na_modB = 0;
            for k = 1:1:length(slopeVec)
                a = aMO(k);

                fy_modB= fracFModB(r,a,shift);
                X_modB = max(abs(fy_modB));
                if X_modB>limiarFrFT
                    Na_modB = Na_modB + 1;
                end
            end

            if Na_modB > 0
                Nc_modB = Nc_modB + 1;
            end

        end
        P_threFrFT_modB(j) = Nc_modB./(it);
    end
    delete(f);

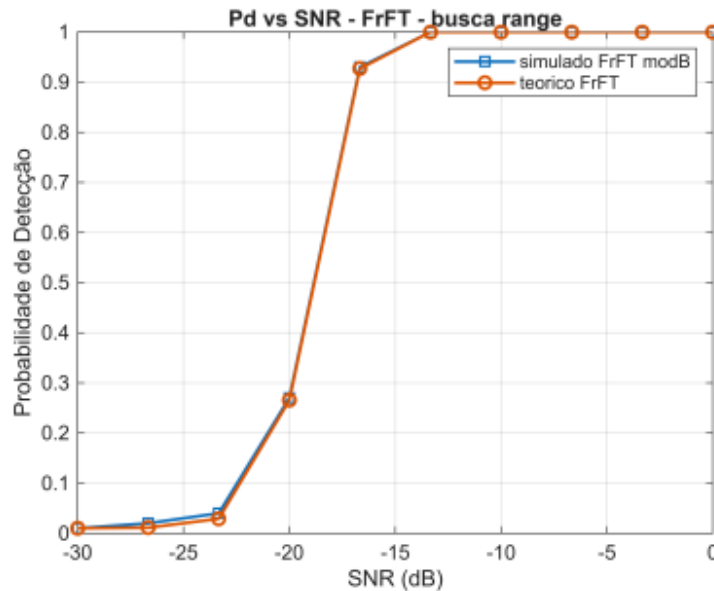
```

```

Pd_teorico =
calculaPdTeoricoFrFT(A_vec.*sqrt(length(s)),1,limiarFrFT,length(slopeVec),len
gth(s));

figure
plot(snr,P_threFrFT_modB,'-square',snr,Pd_teorico,'-o','LineWidth',1.5);
legend('simulado FrFT modB','teorico FrFT')
grid on
xlabel('SNR (dB)')
ylabel('Probabilidade de Detecção')
title(['Pd vs SNR - FrFT - busca range'] )
end

```



```

function limiarFrFT = limiarTeoricoFrFT(pfa,varn,N_buscaSlope,N_buscaf)
% NtGLRT = ceil(N/NFFT);
% Nw_GLRT = NFFT;%/2 - 2;
Ntotal = N_buscaSlope*N_buscaf;
pG = 1- (1-pfa)^(1/Ntotal);
limiarFrFT = raylinv(1-pG,varn);
end

function Pd_teorico = calculaPdTeoricoFrFT(A_vec,varn,limiarFrFT,N_slope,Nu)
% p1 = ncx2cdf(limiarGLRT^2,2,A_vec.^2/varn,'upper');
gamma_vec = A_vec.^2/varn;
NT2 = 1;
p1= ncx2cdf(limiarFrFT^2,2*NT2,gamma_vec,'upper');

```

```

p0 = raylcdf(limiarFrFT,varn,'upper');
%      NtGLRT = Nt;%ceil(N/NFFT);
%      Nw_GLRT = Nw;%NFFT/2 - 2;
%      Ntotal = NtGLRT*Nw_GLRT;
%      pG = 1- (1-pfa)^(1/Ntotal);

%      p1 = marcumq(A_vec./sqrt(2*varn),limiarGLRT/sqrt(2*varn));
%probabilidade de uma estar acima do limiar
N_busca = N_slope*Nu;
Pd_teorico = 1-(1-p0)^(N_busca-1)*(1 - p1); %probabilidade de nenhuma estar
acima do limiar;
end

function limiar = limiarTeoricoEnergiaSummation(pfa,sigman2,N)
limiarNormalizado = chi2inv(1-pfa,2*N);
%artigo urkowitz 1967
limiar = limiarNormalizado*sigman2;

end

function w = retornaJanela(wSTR,N_FFT)
if strcmp(wSTR,'Nenhuma')
    w = 1;
elseif strcmp(wSTR,'Hamming')
    w = hamming(N_FFT);
elseif strcmp(wSTR,'Hanning')
    w = hann(N_FFT);
end
end

function Pd_teorico = calculaPdTeoricoEnergiaSummation(A_vec,
sigman2,limiar,N)
%%----- forma correta usando a cdf da non-central chi square
nu = 2*N;
Pd_teorico = ncx2cdf(limiar/sigman2,nu,N*A_vec.^2/(sigman2),'upper');
end

function s = fazCossenoReal(A,fs,fc,phi0, N_FFT,w)
t = (0:1:N_FFT-1)./(fs*1e6); %tempo em segundos

s =A.*w.*cos(2*pi*(fc*1e6).*t+phi0*pi/180);
% figure;
% plot(t./1e-6,s)
% xlabel('t (us)')
% ylabel('Amplitude')
% title(['Cosseno - fc = ' num2str(fc) 'MHz NFFT = ' num2str(N_FFT) ])

end

```

```

function s = fazChirpReal(fs, fc, N_FFT, A, phi0, slope, w)
fc = fc*1e6;
fs = fs*1e6;
duracao = N_FFT/fs;
t = 0:1/(fs):duracao-1/fs;
deltaF = slope*duracao.*1e12;
s = w.*A.*chirp(t,fc-deltaF/2,duracao,fc+deltaF/2,'linear',phi0);
end

function Pd_teorico = calculaPdTeoricoFFT(A_vec, varn, N, limiarFFT)
%      p1 = ncx2cdf(limiarGLRT^2,2,A_vec.^2/varn,'upper');
N_busca = floor(N/2)-2;
gamma_vec = A_vec.^2/varn;
NT2 = 1;
p1 = ncx2cdf(limiarFFT^2,2*NT2,gamma_vec,'upper');
p0 = raylcdf(limiarFFT,varn,'upper');
Pd_teorico = 1-(1-p0)^(N_busca-1)*(1 - p1).^(1); %probabilidade de nenhuma
estar acima do limiar;

end

function limiarFFT = limiarTeoricoFFT(pfa,varn,NFFT)

Nw_busca = floor(NFFT/2)- 2;
pG = 1- (1-pfa)^(1/Nw_busca);
limiarFFT = raylinv(1-pG,varn);
end

function [F] = fracFModB(f,a,s)
if nargin < 3
    s = 0;
    warning('No shift parameter, using default (s = 0)')
end

% Check if the length of f1 is not even
f = f(:);
N = length(f);
if mod(N, 2) ~= 0
    error('The input array f1 must have an even length. Current length: %d',
length(f));
end

switch a
    case 0
        F = f;
        return;
    case {-2,2}

```

```

        F = flipud(f);
        return;
    otherwise
        % resampled x2 (see papers)
        f = bizinter(f(:));
        % Test a intervals
        if (a>0 && a<0.5) || (a>1.5 && a<2)
            a = a-1;
            f = fracFcoreB(f,1,s);
        end
        if (a>-0.5 && a<0) || (a>-2 && a<-1.5)
            a = a+1;
            f = fracFcoreB(f,-1,s);
        end
        F = fracFcoreB(f,a,s);
    end
    % Decimation
    F = F(1:2:end);
end

function [F] = fracFcoreB(f,a,s)
% Make sure parameter a was adjusted before
if any(abs(a) < 0.5 | abs(a) > 1.5)
    error('At least one value is outside the interval [0.5, 1.5].');
end

N = length(f); % expanded length
A = length(a);

% Transform Parameter
D = sqrt(N/2); % delta
phi = a.*pi/2; % phi a.k.a alpha

% Create chirp A
n = (-N/2:N/2-1)/(2*D);
Achirp = (exp(-1j*pi*(n.*n).*tan(phi/2))).';

% Chirp multiplication #1
g = Achirp.*f;

% Create chirp B
m = (-N:N-1)/(2*D);
l = 2*s/D;
Bchirp = exp(1j*pi*((l.*m) + csc(phi).*(m.*m))).';

% Chirp convolution
G = ifft(fft([g ; zeros(N,A),]).*fft(Bchirp));

% Compensate for shifted B
if(s < 0)

```

```

    G = [G(N+1-2*s:2*N,:) ; G(1:-2*s,:)];
else
    G = G(N+1-2*s:2*N-2*s,:);
end

% Create complex amplitude factor
Aphi = sqrt(1-1j*cot(phi)).';

% Chirp multiplication #2 (Cchirp same as Achirp)
F = (Aphi/(2*D)).*G.*Achirp;
end
function aMO = achaOrdem(fs,s,slope)
fs = fs.*1e6;
aMO = -(2/pi).*atan(fs^2/length(s)./(slope.*1e12));
end

function xint=bizinter(x)

N=length(x);
im = 0;
if sum(abs(imag(x)))>0
    im = 1;
    imx = imag(x);
    x = real(x);
end;

x2=x(:);
x2=[x2.'; zeros(1,N)];
x2=x2(:);
xf=fft(x2);
if rem(N,2)==1 %N = odd
    N1=fix(N/2+1); N2=2*N-fix(N/2)+1;
    xint=2*real(ifft([xf(1:N1); zeros(N,1) ;xf(N2:2*N)].'));
else
    xint=2*real(ifft([xf(1:N/2); zeros(N,1) ;xf(2*N-N/2+1:2*N)].'));
end;
if ( im == 1)
    x2=imx(:);
    x2=[x2.'; zeros(1,N)];
    x2=x2(:);
    xf=fft(x2);
    if rem(N,2)==1 %N = odd
        N1=fix(N/2+1); N2=2*N-fix(N/2)+1;
        xmint=2*real(ifft([xf(1:N1); zeros(N,1) ;xf(N2:2*N)].'));
    else
        xmint=2*real(ifft([xf(1:N/2); zeros(N,1) ;xf(2*N-N/2+1:2*N)].'));
    end;
    xint = xint + i*xmint;
end;
end;

```

```
xint = xint(:);  
end
```