



Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

David de Oliveira Azevedo Junior

Análise e Implementação de Estratégias de Controle para Mancais Magnéticos em Sistemas Rotativos

Campinas

2026

David de Oliveira Azevedo Junior

Análise e Implementação de Estratégias de Controle para Mancais Magnéticos em Sistemas Rotativos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na área de Automação.

Dissertation presented to the Faculty of Electrical and Computer Engineering of the University of Campinas (UNICAMP) in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering, in the area of Automation.

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Barreto

Este trabalho corresponde à versão final da dissertação defendida.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizângela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

Az25a Azevedo Junior, David de Oliveira, 1984-
Análise e implementação de estratégias de controle para mancais magnéticos em sistemas rotativos / David de Oliveira Azevedo Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2026.

Orientador: Gilmar Barreto.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Mancais. 2. Modelagem matemática. 3. Controladores ótimos. 4. Controle preditivo. 5. Controle H [infinito]. I. Barreto, Gilmar, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações complementares

Título em outro idioma: Analysis and implementation of control strategies for magnetic bearings in rotating systems

Palavras-chave em inglês:

Bearings

Mathematical modeling

Optimal control

Predictive control

H [infinity] control

Área de concentração: Automação

Títuloção: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Gilmar Barreto [Orientador]

Mateus Giesbrecht

Celso José Munaro

Data de defesa: 04-02-2026

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)

Não se aplica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0006-8201-2479>

- Currículo Lattes do autor: <https://lattes.cnpq.br/5624559991200054>

FOLHA DE APROVAÇÃO

David de Oliveira Azevedo Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, defendida na data de 04/02/2026.

Composição da Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Gilmar Barreto
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Mateus Giesbrecht
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Celso José Munaro
Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo

Dedico este trabalho a minha esposa Marcela, minhas filhas Rafaela e Manuela, e aos meus pais David e Maraíza (in memoriam).

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e por ter me dado forças e sabedoria para enfrentar as dificuldades ao longo de minha trajetória.

À minha família: minha esposa Marcela e minhas filhas Rafaela e Manuela, pela compreensão e apoio incondicional durante toda esta jornada.

Aos meus pais, David e Maraíza, que foram minha base, e sem eles não teria chegado até aqui.

Ao Professor Dr. Gilmar Barreto, pela confiança em mim depositada e pelo suporte ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

À Marinha do Brasil, que propiciou a oportunidade de realizar este mestrado, e ao CC (EN) Barbosa, pelo acompanhamento e orientação.

E a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a concretização deste objetivo.

*“Aja como se tudo dependesse de você, sabendo que, na realidade, tudo depende de Deus”
(Santo Inácio de Loyola)*

Resumo

Neste trabalho é apresentada a modelagem matemática de um sistema mancal-rotor e a implementação de três estratégias de controle avançado para o posicionamento dinâmico do eixo girante. O sistema é composto por dois mancais magnéticos ativos e um rotor rígido posicionado horizontalmente. A dinâmica dos mancais é descrita a partir das equações de Maxwell, enquanto o rotor é representado pelas equações de movimento de Newton-Euler. A partir da formulação desenvolvida, obtém-se o modelo não linear do conjunto e a representação linearizada expressa na forma de espaço de estados, a qual é utilizada para o projeto dos controladores.

As estratégias adotadas são o controle ótimo LQG (*Linear Quadratic Gaussian*), o controle H_∞ e o controle preditivo baseado em modelo MPC (*Model Predictive Control*). O desenvolvimento é realizado utilizando o software Matlab/Simulink[®], ambiente em que são conduzidos os testes e a validação dos controladores através da aplicação ao modelo não linear do sistema. O desempenho de cada controlador é analisado com base em critérios quantitativos relacionados à resposta transitória e ao regime estacionário. Os resultados obtidos em diferentes cenários de simulação demonstraram a superioridade do MPC em testes de rastreamento de referência, nos quais apresentou os melhores tempos de resposta e índices integrais baseados no erro quadrático. Em contrapartida, os controles LQG e H_∞ se destacaram nos testes de rejeição a perturbações, com o H_∞ superando na média as outras estratégias em praticamente todos os critérios avaliados.

Palavras-chaves: controle avançado, mancais magnéticos ativos, LQG, H_∞ , MPC.

Abstract

In this work, the mathematical modeling of a rotor–bearing system and the implementation of three advanced control strategies for the dynamic positioning of the rotating shaft are presented. The system is composed of two active magnetic bearings and a rigid rotor positioned horizontally. The bearing dynamics are described based on Maxwell’s equations, while the rotor is represented by the Newton–Euler equations of motion. From the developed formulation, a nonlinear model of the assembly is obtained, as well as a linearized representation expressed in state-space form, which is used for controller design.

The adopted strategies are LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) optimal control, H_∞ control, and MPC (*Model Predictive Control*). The development is carried out using the Matlab/Simulink[®] software, within which the tests and validation of the controllers are performed through their application to the nonlinear model of the system. The performance of each controller is analyzed based on quantitative criteria related to transient response and steady-state behavior. The results obtained under different simulation scenarios demonstrated the superiority of the MPC in reference-tracking tests, where it achieved the best response times and the lowest integral performance indices based on the squared error. In contrast, the LQG and H_∞ controllers showed superior performance in disturbance rejection tests, with the H_∞ controller outperforming the other strategies on average across nearly all evaluated criteria.

Keywords: advanced control, active magnetic bearings, LQG, H_∞ , MPC.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Linhas de fluxo magnético geradas por corrente em um condutor. Fonte: [Autor]	28
Figura 2.2 – Linhas de fluxo magnético geradas por corrente em uma espira. Fonte: [Autor]	28
Figura 2.3 – Circuito magnético básico. Fonte: [Adaptado de Stephan <i>et al.</i> (2013)] .	29
Figura 2.4 – Circuito elétrico equivalente. Fonte: [Adaptado de Stephan <i>et al.</i> (2013)]	31
Figura 2.5 – Levitação simples. Fonte: [Adaptado de Stephan <i>et al.</i> (2013)]	33
Figura 2.6 – Posicionamento horizontal. Fonte: [Adaptado de Stephan <i>et al.</i> (2013)]	34
Figura 2.7 – Posicionamento planar. Fonte: [Adaptado de Stephan <i>et al.</i> (2013)] . .	34
Figura 2.8 – Mancal magnético com oito polos. Fonte: [Autor]	35
Figura 3.1 – Configuração do sistema mancal-rotor. Fonte: [Autor]	36
Figura 3.2 – Geração de forças na direção x. Fonte: [Autor]	37
Figura 3.3 – Geração da força F_{m1} na direção x. Fonte: [Autor]	37
Figura 3.4 – Circuito de ativação diferencial. Fonte: [Adaptado de Schweitzer <i>et al.</i> (2009)]	38
Figura 3.5 – Diagrama básico do mancal em malha fechada. Fonte: [Adaptado de Schweitzer <i>et al.</i> (2009)]	40
Figura 3.6 – Detalhamento do sistema mancal-rotor. Fonte: [Autor]	43
Figura 3.7 – Configuração do sistema mancal-rotor MBC500. Fonte: [(MORSE <i>et al.</i> , 1996)]	46
Figura 4.1 – Diagrama de blocos de sistema em malha fechada. Fonte: [Autor] . . .	53
Figura 4.2 – Relação entre as funções T e S. Fonte: [Autor]	54
Figura 4.3 – Forma padrão para projeto de controle. Fonte: [Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2005)]	56
Figura 4.4 – Forma padrão para projeto de controle. Fonte: [Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2005)]	57
Figura 4.5 – Controlador LQG com ação integral. Fonte: [Autor]	63
Figura 4.6 – Esquema de implementação dos algoritmos MPC. Fonte: [Autor]	65
Figura 5.1 – Estrutura interna do simulador. Fonte: [Autor]	67
Figura 5.2 – Simulador do sistema. Fonte: [Autor]	69
Figura 5.3 – Valores singulares do sistema. Fonte: [Autor]	71
Figura 5.4 – Controlador H_∞ integrado ao simulador do sistema. Fonte: [Autor] . .	72
Figura 5.5 – Valores singulares de S e $1/W_1$. Fonte: [Autor]	73
Figura 5.6 – Valores singulares de T e $1/W_3$. Fonte: [Autor]	74

Figura 5.7 – Valores singulares da função de malha aberta L. Fonte: [Autor]	74
Figura 5.8 – Deslocamentos sob controle H_∞ para variação na referência. Fonte: [Autor]	75
Figura 5.9 – Ações do controlador H_∞ para variação na referência. Fonte: [Autor]	75
Figura 5.10–Deslocamentos sob controle H_∞ sob perturbação. Fonte: [Autor]	76
Figura 5.11–Ações do controlador H_∞ sob perturbação. Fonte: [Autor]	76
Figura 5.12–Controlador LQG integrado ao simulador do sistema. Fonte: [Autor]	77
Figura 5.13–Deslocamentos sob controle LQG para variação na referência. Fonte: [Autor]	79
Figura 5.14–Ações do controlador LQG para variação na referência. Fonte: [Autor]	79
Figura 5.15–Deslocamentos sob controle LQG sob perturbação. Fonte: [Autor]	80
Figura 5.16–Ações do controlador LQG sob perturbação. Fonte: [Autor]	80
Figura 5.17–Controlador MPC integrado ao simulador do sistema. Fonte: [Autor]	81
Figura 5.18–Deslocamentos sob controle MPC para variação na referência. Fonte: [Autor]	83
Figura 5.19–Ações do controlador MPC para variação na referência. Fonte: [Autor]	83
Figura 5.20–Deslocamentos sob controle MPC sob perturbação. Fonte: [Autor]	84
Figura 5.21–Ações do controlador MPC sob perturbação. Fonte: [Autor]	84
Figura 6.1 – Deslocamentos para referência degrau de 0,4V. Fonte: [Autor]	86
Figura 6.2 – Ações de controle para referência degrau de 0,4V. Fonte: [Autor]	86
Figura 6.3 – Deslocamentos para referência degrau de -0,4V. Fonte: [Autor]	87
Figura 6.4 – Ações de controle para referência degrau de -0,4V. Fonte: [Autor]	87
Figura 6.5 – Deslocamentos para referência escada de 0,4V. Fonte: [Autor]	88
Figura 6.6 – Ações de controle para referência escada de 0,4V. Fonte: [Autor]	88
Figura 6.7 – Deslocamentos para referência senoidal de 1V. Fonte: [Autor]	89
Figura 6.8 – Ações de controle para referência senoidal de 1V. Fonte: [Autor]	89
Figura 6.9 – Deslocamentos para perturbação tipo impulso de 0,2 V. Fonte: [Autor]	93
Figura 6.10–Ações de controle para perturbação tipo impulso de 0,2 V. Fonte: [Autor]	93
Figura 6.11–Deslocamentos para perturbação tipo impulso de 0,4 V. Fonte: [Autor]	94
Figura 6.12–Ações de controle para perturbação tipo impulso de 0,4 V. Fonte: [Autor]	94
Figura 6.13–Deslocamentos para perturbação tipo impulso de 0,6 V. Fonte: [Autor]	95
Figura 6.14–Ações de controle para perturbação tipo impulso de 0,6 V. Fonte: [Autor]	95
Figura 6.15–Deslocamentos para perturbação tipo impulso de 0,8 V. Fonte: [Autor]	96
Figura 6.16–Ações de controle para perturbação tipo impulso de 0,8 V. Fonte: [Autor]	96

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Variáveis e parâmetros do sistema. Fonte: [Autor]	43
Tabela 3.2 – Dados do sistema de referência MBC500. Fonte: [(MOMENTS, 1995)] .	47
Tabela 3.3 – Coeficientes do modelo dinâmico do sistema. Fonte: [Autor]	50
Tabela 3.4 – Polos localizados no semiplano direito. Fonte: [Autor]	51
Tabela 5.1 – Restrições para estados e entradas Fonte: [Autor]	70
Tabela 5.2 – Parâmetros de sintonia do controlador MPC. Fonte: [Autor]	82
Tabela 6.1 – Índices de desempenho no modo rastreamento para degrau de 0,4 V. Fonte: [Autor]	90
Tabela 6.2 – Índices de desempenho no modo rastreamento para escada de $\pm 0,4$ V. Fonte: [Autor]	90
Tabela 6.3 – Índices de desempenho no modo rastreamento para referência senoidal de ± 1 V. Fonte: [Autor]	91
Tabela 6.4 – Índices de desempenho no modo regulatório para impulso de 0,6 V. Fonte: [Autor]	97

Lista de Abreviaturas e Siglas

AMB *Active Magnetic Bearing*

API *American Petroleum Institute*

FEMM *Finite Element Method Magnetics*

FLC *Fuzzy Logic Control*

IAE *Integral of Absolute Error*

ISE *Integral of Squared Error*

ISO *International Organization for Standardization*

ITAE *Integral of Time Absolute Error*

ITSE *Integral of Time Squared Error*

LFT *Linear Fractional Transformation*

LPV *Linear Parameter-Varying*

LQG *Linear Quadratic Gaussian*

LQR *Linear Quadratic Regulator*

LTR *Loop Transfer Recovery*

MIMO *Multiple Input Multiple Output*

MMA *Mancal Magnético Ativo*

MPC *Model Predictive Control*

NMPC *Nonlinear Model Predictive Control*

PD *Proporcional-Derivativo*

PID *Proporcional-Integral-Derivativo*

PSM *Parameter Set Mapping*

RBEMCE *Reference Based Error with Minimum Control Effort*

RBMSEMCE *Reference Based in Mean Squared Error with Minimum Control Effort*

RHC *Receding Horizon Control*

RMS *Root Mean Square*

rpm rotações por minuto

SISO *Single Input Single Output*

SMC *Sliding Mode Control*

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Considerações Iniciais	17
1.2	Mancais Magnéticos	18
1.3	Revisão Bibliográfica	19
1.3.1	Revisão Histórica sobre Levitação Magnética	19
1.3.2	Revisão sobre Controle de Mancais Magnéticos	20
1.3.2.1	Aplicação do Controle LQG	21
1.3.2.2	Aplicação do Controle H_∞	22
1.3.2.3	Aplicação do Controle MPC	23
1.4	Objetivos	24
1.5	Motivação	24
1.6	Estrutura do Trabalho	25
2	Fundamentos da Levitação Magnética	27
2.1	Circuitos Magnéticos	27
2.2	Circuito Elétrico Equivalente	30
2.3	Levitação Magnética	32
3	Modelagem do Sistema Mancal-Rotor	36
3.1	Modelagem do Mancal Magnético	36
3.2	Modelagem do Atuador e do Sensor do Mancal	39
3.3	Modelagem do Rotor	41
3.4	Integração dos Modelos do Sistema Mancal-Rotor	43
3.4.1	Modelo Não Linear	44
3.4.2	Modelo Linearizado	47
3.5	Problema de Controle do Sistema Mancal-Rotor	50
4	Conceitos e Estratégias de Controle	52
4.1	Teoria Básica para Controle Multivariável	52
4.2	Estratégia de Controle H_∞	55
4.2.1	Problema Padrão	55
4.2.2	Problema S/T/KS	57
4.2.3	Síntese do controlador H_∞	59
4.3	Estratégia de Controle LQG	60
4.3.1	Controle LQR	61
4.3.2	Filtro de Kalman	62
4.3.3	LQG como caso especial do controle H_2	63

4.4	Estratégia de Controle MPC	64
5	Projeto, Implementação e Validação do Controle	67
5.1	Simulador do Sistema Mancal-Rotor	67
5.2	Implementação do Controlador H_∞	70
5.3	Implementação do Controlador LQG	77
5.4	Implementação do Controlador MPC	81
6	Ensaio e Análise de Resultados	85
6.1	Ensaio em Modo Rastreamento	85
6.1.1	Testes em Modo Rastreamento	85
6.1.2	Discussão dos Resultados em Modo Rastreamento	89
6.2	Ensaio em Modo Regulatório	92
6.2.1	Testes em Modo Regulatório	92
6.2.2	Discussão dos Resultados em Modo Regulatório	96
7	Conclusão	98
7.1	Conclusão	98
7.2	Trabalhos Futuros	99
	Referências	101
	APÊNDICE A Controlabilidade e Observabilidade	104
	APÊNDICE B Critérios de Desempenho	106
	APÊNDICE C Códigos Matlab	109

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Os mancais são dispositivos que tem como propósito básico suportar e guiar elementos em um sistema mecânico. Uma aplicação comum desses equipamentos é o suporte de eixos girantes, em que exercem os esforços necessários para garantir que o movimento de rotação ocorra de forma adequada, conforme os requisitos de operação. Os mancais mais tradicionais são os puramente mecânicos, sem nenhum dispositivo elétrico/eletrônico, que podem se diferenciar pelo mecanismo de funcionamento, mas que têm em comum a presença de atrito e a necessidade de lubrificação.

Esses fatores podem constituir limitações críticas dependendo da aplicação, especialmente em regimes de operação a altas velocidades ou quando os rotores estão sujeitos a perturbações externas significativas. Entre essas perturbações destacam-se as forças de processo, comumente presentes em máquinas-ferramenta, as forças eletromagnéticas em sistemas de acionamento, as interações com escoamentos de fluido em turbomáquinas, bem como forças não conservativas associadas a folgas mecânicas e sistemas de vedação. Adicionalmente, a dinâmica de rotores representa uma área particularmente desafiadora da mecânica, em virtude da complexidade de seu comportamento dinâmico. Dependendo da velocidade de operação, o sistema pode apresentar fenômenos fortemente não lineares, tais como efeitos vibratórios, acoplamentos giroscópicos e instabilidades dinâmicas.

Para lidar com esses desafios operacionais, os mancais puramente mecânicos evoluíram para sistemas ativos, com mecanismos que permitem uma atuação contínua, evitando que perturbações externas afetem o funcionamento do rotor ou seus efeitos sejam minimizados. Mancais com acionamento hidráulico ou pneumático são exemplos citados em Breńkacz *et al.* (2021), que apresenta uma revisão abrangente do estado da arte desses dispositivos.

Dentre as tecnologias de mancais ativos, destacam-se os mancais magnéticos, que se sobressaem em relação aos seus concorrentes puramente mecânicos por serem capazes de operar no vácuo, sem necessidade de lubrificação e nenhum contato mecânico. Estes dispositivos são os mais recomendados para aplicações que requerem altas velocidades, alto grau de pureza, operação sem lubrificação, ausência de atrito e alta confiabilidade (STEPHAN *et al.*, 2013).

Além dessas vantagens, os mancais magnéticos ativos possibilitam o controle preciso do posicionamento do rotor, da rigidez e do amortecimento do sistema, o que per-

mite lidar com variações de carga e perturbações externas de modo automático. Ademais, essa capacidade pode ser utilizada para diagnóstico de operação em tempo real, possibilitando a tomada de ações corretivas e a consequente redução dos custos de manutenção.

1.2 Mancais Magnéticos

O mancal magnético ativo (MMA), conhecido na literatura em inglês como AMB (*Active Magnetic Bearing*), representa apenas um entre os diversos tipos de mancais magnéticos existentes. Esses dispositivos distinguem-se principalmente pela forma de geração e representação da força magnética, pelos materiais empregados e pela configuração construtiva adotada. Segundo Schweitzer *et al.* (2009), é possível estabelecer uma classificação sistemática que divide os mancais magnéticos em dois grandes grupos: o primeiro reúne aqueles cujo princípio de funcionamento baseia-se na força de relutância magnética, enquanto o segundo compreende os que operam com base na força de Lorentz.

A partir dessa primeira classificação e considerando as demais características construtivas e funcionais, os mancais magnéticos são categorizados em oito tipos distintos. Dentre eles, cinco são classificados como passivos, isto é, não permitem o controle direto da força magnética de atuação. Esses mancais utilizam como fonte geradora da força magnética materiais como ímãs permanentes, materiais diamagnéticos ou supercondutores, os quais têm em comum o elevado custo de aquisição.

Essas características acabam por restringir significativamente o uso prático desses dispositivos, limitando sua aplicação a cenários específicos, nos quais se requer baixa intensidade de força magnética ou em que os benefícios operacionais obtidos justifiquem o investimento elevado associado à sua implementação. Por outro lado, os outros três tipos são classificados como ativos por permitirem o controle dinâmico da força de sustentação, uma vez que empregam atuadores eletromagnéticos alimentados por correntes controladas em tempo real. Nesses mancais, a combinação de sensores de posição e estratégias de controle em malha fechada possibilita o ajuste contínuo da força magnética aplicada, garantindo a estabilização do rotor em sua posição de equilíbrio, mesmo na presença de perturbações externas.

Dentre esses, o mancal pertencente ao grupo da força de relutância corresponde ao comumente conhecido como MMA. Esse é o modelo de mancal mais amplamente estudado na literatura e empregado em aplicações industriais, como em máquinas rotativas, compressores, turbinas, sistemas de armazenamento de energia (*flywheels*) e dispositivos aeroespaciais, onde a ausência de atrito e de desgaste mecânico representa uma vantagem significativa em relação aos mancais convencionais. Este tipo é o objeto de estudo deste trabalho.

Os outros dois classificados como ativos, pertencentes ao grupo da força de Lorentz, referem-se aos chamados motores-mancais, dispositivos que integram, em um único sistema eletromagnético, as funções de suporte e acionamento do rotor. Apesar de apresentarem grande potencial tecnológico, esses sistemas ainda se encontram restritos a aplicações específicas, em razão de sua maior complexidade construtiva e de controle, conforme discutido em Stephan *et al.* (2013).

Existem alternativas que oferecem soluções intermediárias, como os dispositivos que empregam ímãs permanentes em conjunto com os atuadores eletromagnéticos. Os ímãs, neste caso, geram a força mínima constante para manter o rotor na posição de equilíbrio e os atuadores agem para ajuste de posição ou atenuação de perturbações. Esta configuração reduz o consumo energético, o aquecimento e o dimensionamento do circuito eletrônico necessário. Em contrapartida, além do custo mais elevado por conta dos ímãs, possuem também estrutura mais complexa, o que restringe seu uso de forma extensiva.

1.3 Revisão Bibliográfica

1.3.1 Revisão Histórica sobre Levitação Magnética

A utilização de forças eletromagnéticas para levitação de objetos já é tema de estudo há mais de 100 anos. Em 1848, Earnshaw (1848) demonstrou que é impossível levitar de forma estável um conjunto de ímãs estáticos utilizando somente a gravidade e um arranjo de ímãs fixos. Essa impossibilidade pode ser explicada pelas equações de Maxwell, que demonstram que a existência de máximos locais da magnitude do campo magnético no espaço livre não é permitida, condição esta necessária para o equilíbrio estável (SCHWEITZER *et al.*, 2009).

Pesquisas posteriores revelaram exceções práticas ao teorema de Earnshaw. Uma das formas de alcançar o equilíbrio estável em um campo magnético permanente é através da utilização de corpos em rotação, que poderiam sob certas condições ser mantidos suspensos de forma estável devido ao efeito giroscópico (SIMON *et al.*, 1997). Outra possibilidade é utilizar materiais diamagnéticos, que respondem a campos magnéticos com repulsão moderada. A susceptibilidade negativa destes materiais resulta na exigência de um mínimo, em vez de um máximo, na magnitude do campo, tornando possível a estabilidade (GEIM *et al.*, 1999).

Entretanto, devido às restrições de aplicação, essas exceções são de pouco interesse técnico. No caso dos materiais diamagnéticos, por exemplo, as forças magnéticas geradas são muito pequenas, o que limita significativamente seu uso prático. Foi a introdução dos materiais ferromagnéticos, operando sob campos magnéticos ajustáveis através

do controle de correntes elétricas, que permitiu a geração de forças magnéticas com as magnitudes necessárias para aplicações industriais.

Essa inovação permitiu, em 1937, o registro da primeira patente relevante nessa área (KEMPER, 1937). Wu e Zhang (2025) destacam que esse trabalho traçou o curso para o desenvolvimento subsequente, gerando dois ramos de vanguarda: mancais magnéticos e trens de alta velocidade com suspensão magnética. Eles apresentam um levantamento das principais criações realizadas desde o século passado que fazem uso de mancais magnéticos, como equipamentos de centrifugação, volantes de inércia para guiagem de satélites, máquinas-ferramentas de alta precisão, bombas de vácuo de alto desempenho, entre outros.

Uma análise da literatura revela uma diversidade de trabalhos que exploram a aplicação dos mancais magnéticos, assim como as técnicas de controle já implementadas, que variam desde as convencionais até as mais modernas.

1.3.2 Revisão sobre Controle de Mancais Magnéticos

Em Huang *et al.* (2024), é apresentada uma revisão abrangente e exaustiva sobre os atributos estruturais, mecanismos de modelagem, estratégias de controle aplicáveis e as principais tendências de desenvolvimento futuro para os mancais magnéticos. Destaca-se o levantamento realizado neste trabalho em que é demonstrado que a teoria de controle moderno tem obtido 50% de melhoria na precisão do posicionamento e no tempo de resposta em relação ao controlador PID (Proporcional–Integral–Derivativo) tradicional. Zhang e Zhu (2017) seguem a mesma abordagem, mas com foco nos mancais magnéticos radiais, apresentando uma análise comparativa detalhada entre as diferentes topologias, modelos e métodos de controle já implementados.

Já em Kamath *et al.* (2025), encontra-se um estudo focado nas principais técnicas de controle empregadas em mancais magnéticos, dentre as quais se destacam: o PID, controle adaptativo, controle por realimentação de estados, SMC (*Sliding Mode Control*), MPC, FLC (*Fuzzy Logic Control*) e controle robusto H_∞ . O artigo apresenta os princípios, vantagens e limitações de cada uma delas, além de, a partir de uma análise dos trabalhos disponíveis, um resumo dos desempenhos obtidos em estudos de simulação, validações experimentais e implementações práticas. O artigo mostra que o PID ainda ocupa posição dominante, principalmente em aplicações de baixa velocidade. Isso se justifica pela sua estrutura simples e facilidade de implementação. Já para aplicações de alta velocidade, as técnicas avançadas apresentam melhor desempenho quando comparadas ao PID.

A seguir, são apresentados trabalhos realizados utilizando as estratégias de controle selecionadas para esse estudo.

1.3.2.1 Aplicação do Controle LQG

Dentre as técnicas de controle por realimentação de estados, o LQR (*Linear Quadratic Regulator*) é uma escolha comum, pois também é de fácil implementação e baixo custo computacional. Porém, o LQR puro não é uma solução realista, visto que depende da realimentação de todos os estados da planta, os quais normalmente nem sempre estão disponíveis. Na prática, o controlador LQR é frequentemente implementado em conjunto com um observador de estados, como o Filtro de Kalman, configuração esta conhecida como LQG.

Feeley (1993) apresenta o LQG aplicado a um modelo de MMA que incorpora um estado adicional correspondente à aceleração do rotor, a qual é modelada como um processo estocástico. Esta abordagem permite a estimação da aceleração por meio do filtro de Kalman, mesmo quando apenas a posição é medida, contornando limitações práticas de sensoriamento. O objetivo foi alcançar por meio do controle uma solução de compromisso entre uma resposta transiente rápida e a atenuação de forças geradas pelo movimento do rotor que podem ser transmitidas aos mancais. Segundo o artigo, essas forças causam movimentos indesejáveis em satélites.

Em Yoon *et al.* (2012) é proposto um método de sintonia iterativo para o controlador LQG aplicado a um MMA do tipo radial em um compressor centrífugo de alta velocidade. O objetivo é obter o ajuste ideal para os pesos associados aos estados e às entradas de controle, parâmetros de sintonia deste controlador, que resulte no melhor desempenho e robustez, levando em conta requisitos operacionais das normas API 617 (API, 2002) e ISO 14839 (ISO, 2006), aplicáveis a esse tipo de dispositivo. Testes experimentais demonstraram os ganhos obtidos com este método comparados a resultados preliminares com o controlador PID.

Apesar do LQG ser na prática a solução realizável do LQR na maioria dos casos, Skogestad e Postlethwaite (2005) demonstram, contudo, que essa configuração leva a uma redução de robustez. Para atenuar essa limitação, emprega-se normalmente a técnica LTR (*Loop Transfer Recovery*), que tem por objetivo restaurar parcialmente as propriedades de robustez perdidas na integração do observador ao controlador ótimo. Em Monaco (2012), os resultados obtidos evidenciam a eficácia dessa abordagem, demonstrando melhor desempenho do LQG/LTR frente a estratégias híbridas baseadas em controle ON/OFF combinado com compensação de avanço e atraso de fase. Já em Ahad *et al.* (2021), a comparação é realizada com o PID clássico, cujos resultados demonstram redução do sobressinal por um fator de dez e a capacidade de rejeição de distúrbios incrementada em cinco vezes.

1.3.2.2 Aplicação do Controle H_∞

Conforme Skogestad e Postlethwaite (2005), o LQG pode ser visto como um caso especial do controle H_2 , cuja formulação é baseada na minimização da norma H_2 , ou seja, da energia média da resposta do sistema a ruídos brancos gaussianos. Já o controlador H_∞ , como o próprio nome já diz, tem como fundamento a norma H_∞ , que busca minimizar o pior ganho possível entre entrada e saída.

Em Nair *et al.* (2009) é apresentado um método de projeto H_∞ generalizado, com algoritmos de seleção automática das funções peso, que pode ser aplicado a mancais magnéticos ativos de diferentes especificações. O procedimento de projeto proposto é validado ao se alcançar soluções de controle H_∞ estabilizantes para diferentes condições operacionais, submetidos a incertezas do modelo e distúrbios. Os resultados dos testes mostraram ainda que, além de estáveis, os sistemas controlados apresentaram alto nível de desempenho e robustez. O artigo destaca que soluções como esta podem facilitar a aceitação desse controlador em aplicações práticas na indústria.

Em Nair e Sangeetha (2011), o objetivo é reduzir a corrente inicial quando a levitação é iniciada e mantê-la baixa em estado estacionário, quando alcança a posição desejada. Para isto, é proposta uma configuração híbrida, que combina o H_∞ com o PID. Neste caso, é demonstrado que os controladores são complementares, pois o PID apresenta corrente de ativação mais baixa que o H_∞ , mas em compensação corrente mais alta depois que o ponto de operação é atingido. O artigo destaca que essa solução é especialmente interessante para máquinas com alta frequência de chaveamento entre estados ligado/-desligado, quando altas correntes de ativação podem significar consideráveis perdas de energia.

Noshadi *et al.* (2017) propõem também uma estratégia de controle híbrido para MMA, combinando um controlador H_∞ com um controlador baseado em observador de perturbações, visando a rejeição eficaz de perturbações devidas a dinâmicas não modeladas, tais como desbalanceamento de massa do rotor e forças centrífugas geradas pela rotação. Diferentemente de abordagens tradicionais, como filtros notch e controladores com escalonamento de ganhos, que dependem do conhecimento prévio das frequências dos distúrbios, o método apresentado dispensa essa informação ao estimar e compensar perturbações e incertezas do modelo em tempo real. Os resultados experimentais demonstram desempenho significativamente superior em termos de atenuação de vibrações e rejeição de perturbações quando comparado a controladores analógicos convencionais, mantendo o rotor próximo ao centro geométrico em toda a faixa de operação.

Já em Hongphan *et al.* (2022), é realizado o projeto de um controlador H_∞ em que as funções peso são escolhidas para reproduzir as características de um filtro notch. O

objetivo é a redução do consumo energético em um sistema de armazenamento de energia que utiliza volante de inércia através da minimização da corrente RMS (*Root Mean Square*) nas bobinas do MMA. Testes experimentais demonstraram que o controlador H_∞ manteve a suspensão de forma estável e reduziu o consumo energético em 42% em comparação com o controlador PD (Proporcional–Derivativo) convencional. Além disso, o controlador foi capaz de prevenir instabilidade vibracional do modo de nutação do rotor.

1.3.2.3 Aplicação do Controle MPC

A possibilidade de definição de restrições operacionais, como o controle da corrente citado anteriormente, é uma característica desejável para os controladores. O estabelecimento de limites, tanto para as variáveis manipuladas quanto para as variáveis controladas, é muitas vezes um requisito do processo. Nesse quesito, o MPC se destaca pois permite a definição de restrições de forma direta durante o projeto. Essa característica somada à capacidade de otimizar a ação de controle com base no comportamento futuro da planta, são os principais diferenciais do controle MPC em relação ao LQG e ao H_∞ .

Dentre os sistemas mecatrônicos, os mancais magnéticos também têm sido objeto de estudo em configurações de controle com o MPC. Em Morsi *et al.* (2020) é apresentada a implementação do controle MPC discretizado sujeito a restrições de entrada e estados de um sistema mancal-rotor. O controlador é validado por meio de um simulador que implementa o modelo não linear do sistema. São realizados testes em modo servo e modo regulatório e os resultados obtidos atestam o melhor desempenho do MPC quando comparados com o clássico PID.

Saini *et al.* (2021) incluem, além do PID, o LQR na comparação de desempenho com o MPC. A análise comparativa é realizada por meio de simulações utilizando um modelo de um sistema mancal-rotor. Os testes confirmaram o desempenho superior do MPC em aspectos como velocidade de resposta, erro mínimo e eliminação dos efeitos de perturbações. Entretanto, cabe ressaltar que o modelo utilizado para o sistema considera somente a dinâmica translacional do rotor, o que pode limitar a abrangência e a aplicabilidade dos resultados obtidos.

Morsi *et al.* (2021) apresentam a implementação do MPC aplicado a um MMA baseado em um modelo do tipo LPV (*Linear Parameter-Varying*), obtido a partir da representação não linear do sistema. Para reduzir o número de parâmetros do modelo resultante e torná-lo praticável, é utilizada a técnica PSM (*Parameter Set Mapping*). Nesta configuração, o algoritmo proposto no trabalho mostrou alto desempenho nos testes em modo servo sujeito à restrições, com resultados comparáveis a um esquema LPV-MPC mais sofisticado desenvolvido recentemente e a uma abordagem NMPC (*Nonlinear MPC*) padrão.

Tarisciotti *et al.* (2021) propõem a aplicação do MPC em um MMA que integra uma ponte de Wheatstone em seu circuito de atuação. O MPC implementado inclui a capacidade de estimar a indutância das bobinas do mancal, que pode ser utilizada para melhorar o desempenho do sistema de controle, mas também de prover uma estimativa da posição do rotor, o que eliminaria a necessidade de sensores de posição convencionais. A relação entre posição do rotor e a indutância nas bobinas é encontrada através da modelagem do sistema por meio de elementos finitos. O bom desempenho da proposta foi demonstrado por meio de simulações.

1.4 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo, em um primeiro momento, descrever de forma detalhada a modelagem matemática de um sistema mancal-rotor, constituído por dois mancais magnéticos ativos (MMAs) e um rotor rígido, a fim de evidenciar sua dinâmica de funcionamento e a problemática associada ao seu controle. Além disso, essa etapa visa possibilitar o desenvolvimento de um simulador baseado no modelo não linear obtido, cujo propósito é servir como ferramenta de testes e validação das estratégias de controle.

Em seguida, a partir do modelo linearizado do sistema, são projetadas e implementadas três estratégias de controle avançado — LQG, H_∞ e MPC — com o intuito de avaliá-las comparativamente considerando critérios quantitativos de desempenho medidos em diferentes cenários de simulação.

1.5 Motivação

A crescente demanda por eficiência e confiabilidade nos sistemas industriais tem impulsionado o uso de técnicas avançadas de controle, capazes de lidar com a complexidade e as restrições inerentes a processos modernos. Em diversas aplicações, especialmente aquelas que envolvem dinâmicas não lineares, acoplamento entre variáveis e regimes operacionais amplos, os controladores convencionais do tipo PID tornam-se insuficientes para garantir desempenho e robustez adequados. Essa limitação tem motivado o desenvolvimento e a aplicação de estratégias de controle mais sofisticadas, que conciliam desempenho ótimo e robustez frente a incertezas e perturbações.

Entre as abordagens mais consolidadas nesse contexto destacam-se o LQG, o H_∞ e o MPC. O LQG implementa uma estratégia que busca minimizar a energia média da resposta do sistema, oferecendo bom desempenho nominal, mas com robustez limitada diante de incertezas de modelo. Por outro lado, o controle H_∞ fundamenta-se na

minimização do pior ganho possível entre entrada e saída, em toda a faixa de frequência, proporcionando desempenho mais robusto, especialmente em sistemas sensíveis a variações paramétricas e perturbações externas. Já o MPC representa uma abordagem com capacidade preditiva, que antecipa o comportamento futuro do sistema através do uso de um modelo explícito do processo, e que permite a inclusão de restrições de atuação e limites operacionais.

Diante dessas características distintas, torna-se relevante compreender como cada uma dessas técnicas se comporta sob as mesmas condições de operação. Apesar da ampla literatura existente sobre o controle de mancais magnéticos, muitos trabalhos analisam essas técnicas de forma isolada ou as comparam apenas com o controle PID, cuja formulação não é adequada para lidar com a complexidade dos sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*).

Uma comparação direta entre LQG, H_∞ e MPC, sob condições equivalentes e utilizando um modelo representativo do sistema mancal-rotor, ainda não foi explorada. Tal investigação busca evidenciar as vantagens e limitações dessas estratégias, contribuindo para o avanço do conhecimento na área de controle ótimo e robusto aplicado a mancais magnéticos.

1.6 Estrutura do Trabalho

Este trabalho encontra-se dividido em 7 capítulos. A seguir, apresenta-se o conteúdo resumido de cada um.

- **Capítulo 1** - Apresenta a introdução, com considerações iniciais sobre o assunto abordado neste trabalho, uma breve descrição dos mancais magnéticos, além da revisão bibliográfica, objetivos, motivação e a estrutura deste trabalho;
- **Capítulo 2** - Introduz os fundamentos básicos sobre geração da força magnética que explicam o processo de levitação simples, o posicionamento horizontal e o posicionamento planar, que são a base do funcionamento dos mancais magnéticos;
- **Capítulo 3** - Demonstra a modelagem do mancal magnético, do rotor e a integração destes para obtenção de um simulador do sistema mancal-rotor e sua representação em espaço de estados para o projeto dos controladores. Ao fim, é realizada uma análise do modelo obtido do ponto de vista de controle;
- **Capítulo 4** - Descreve os conceitos e teoria de controle aplicados neste trabalho, que incluem uma conceituação básica para controle de sistemas multivariáveis e o detalhamento da estrutura dos controladores LQG, H_∞ e MPC;

- **Capítulo 5** - Apresenta a implementação do simulador integrado do sistema mancal-rotor e dos controladores, que incluem o processo de sintonia e validação dos mesmos;
- **Capítulo 6** - Apresenta os ensaios e a análise comparativa dos controladores, que consiste na discussão dos resultados com base nos critérios de desempenho adotados;
- **Capítulo 7** - Expõe as conclusões sobre os resultados obtidos no presente trabalho, além de propostas de trabalhos futuros.

Nos Apêndices, encontram-se descritos os conceitos de controlabilidade e observabilidade, os critérios de desempenho utilizados para análise das estratégias de controle e os códigos em Matlab[®] desenvolvidos ao longo deste trabalho.

2 Fundamentos da Levitação Magnética

Este capítulo apresenta a conceituação básica que explica o funcionamento dos mancais magnéticos que utilizam a força de relutância. É abordada, inicialmente, a teoria de eletromagnetismo utilizada em circuitos magnéticos, que tem como base as equações de Maxwell, e sua equivalência com circuitos elétricos. Em seguida é apresentado o problema de levitação simples, com apenas um grau de liberdade, em que a força eletromagnética gerada por um eletroímã é utilizada para suspender verticalmente um objeto. Por fim, o problema da levitação simples é expandido para o posicionamento horizontal e planar, em que, utilizando-se um conjunto de eletroímãs, é possível realizar o controle de posição de um objeto suspenso com dois graus de liberdade.

2.1 Circuitos Magnéticos

As quatro equações de Maxwell são as leis fundamentais do eletromagnetismo que estabelecem como são gerados os campos elétricos e campos magnéticos e a relação entre eles. Dessas equações, apenas a segunda e a quarta, que correspondem respectivamente à lei de Gauss para o magnetismo e à lei de Ampère, são necessárias para o estudo de circuitos magnéticos (SCHWEITZER *et al.*, 2009).

A segunda equação, a lei de Gauss para o magnetismo, estabelece que

$$\oint B \cdot dA = 0, \quad (2.1)$$

em que B é densidade de fluxo magnético e dA é o diferencial de área.

A partir desta equação, deduz-se que o fluxo magnético total em um circuito fechado é constante. Isso pode ser verificado observando que quando uma corrente passa por um condutor, é gerado em seu entorno um campo magnético, cujas linhas de fluxo formam um laço fechado. Para ilustrar esse comportamento, foi simulada, utilizando o software FEMM (*Finite Element Method Magnetics*), a passagem de corrente em um condutor e em uma espira, com os resultados apresentados na Figura 2.1 e na Figura 2.2, respectivamente.

Este comportamento significa que, diferentemente das linhas de um campo elétrico que iniciam em uma carga positiva e terminam em uma carga negativa, as linhas de fluxo magnético não possuem início nem fim, pois não há fontes nem sumidouros de fluxo magnético.

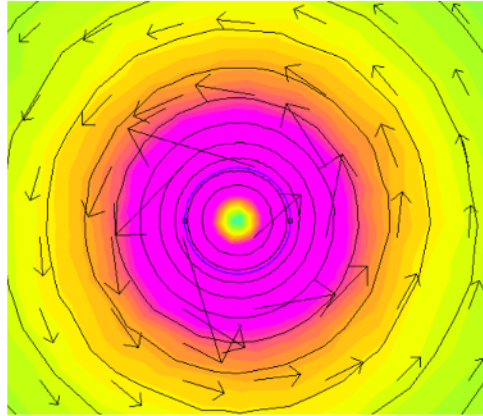


Figura 2.1 – Linhas de fluxo magnético geradas por corrente em um condutor. Fonte: [Autor]

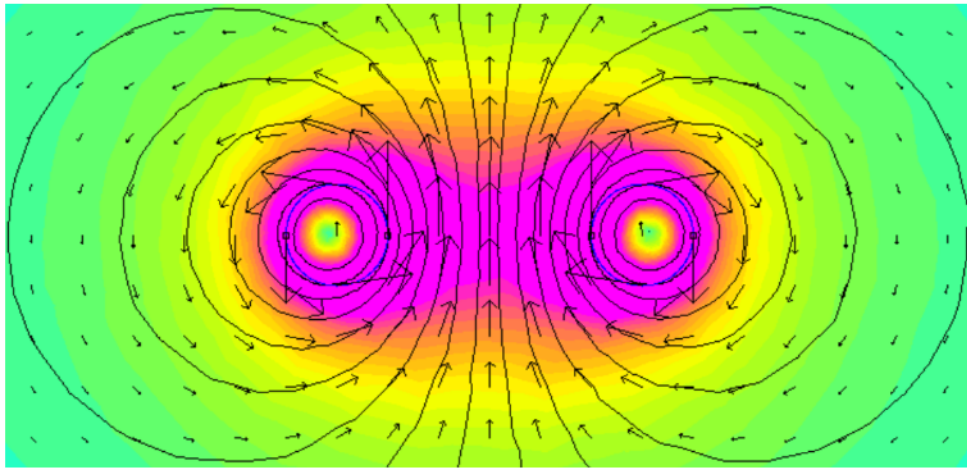


Figura 2.2 – Linhas de fluxo magnético geradas por corrente em uma espira. Fonte: [Autor]

A quarta equação de Maxwell, a lei de Ampère, estabelece que

$$\int H \cdot dl = Ni, \quad (2.2)$$

em que H é a intensidade do campo magnético, dl é o diferencial de comprimento do trecho do circuito, N é o número de espiras da bobina e i é a corrente. De acordo com Stephan *et al.* (2013), a aplicação desta lei pode ser exemplificada através de um circuito magnético básico, apresentado na Figura 2.3.

O circuito é composto por uma bobina, um núcleo composto por material ferromagnético e dois espaçamentos que correspondem ao entreferro. Assumindo que a intensidade do campo magnético é constante no interior do material ferromagnético, assim como no entreferro, pode-se considerar que a soma das parcelas Hl é igual ao produto Ni (chamado de força magnetomotriz - F_{mm}), de forma que

$$Ni = H_{fe}l_{fe} + 2dH_{ar}, \quad (2.3)$$

em que l_{fe} é o caminho médio do fluxo magnético no núcleo, H_{fe} é a intensidade do campo magnético no núcleo, d é o comprimento do entreferro e H_{ar} é a intensidade do campo magnético no entreferro.

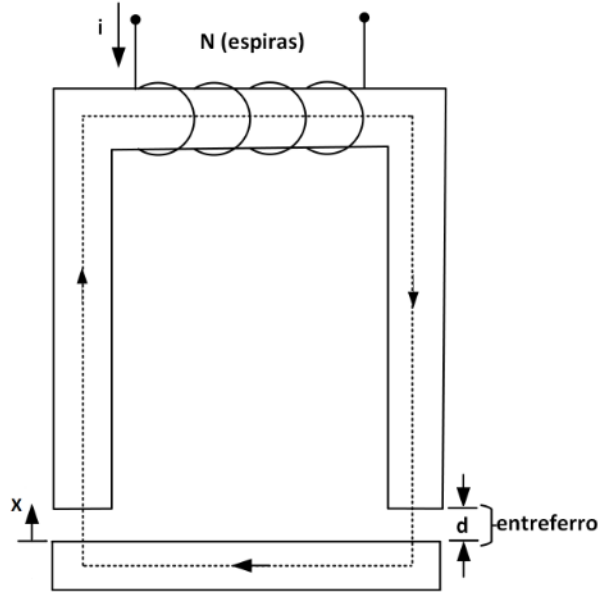


Figura 2.3 – Circuito magnético básico. Fonte: [Adaptado de Stephan *et al.* (2013)]

É possível estabelecer, a partir da lei de Gauss, que os fluxos magnéticos no núcleo e no entreferro são iguais, de modo que

$$\Phi_{fe} = B_{fe}A_{fe} = B_{ar}A_{ar} = \Phi_{ar}. \quad (2.4)$$

Considerando ainda o entreferro suficientemente pequeno, pode-se desprezar a dispersão do campo magnético nessa região e assumir que as áreas da interface do material e do ar são iguais. Assim, tem-se

$$B_{fe} \approx B_{ar}. \quad (2.5)$$

Utilizando material isotrópico, a relação entre densidade de fluxo (B) e intensidade de campo (H) é dada por

$$B = \mu H, \quad (2.6)$$

em que μ é a permeabilidade magnética, que relaciona a medida da magnetização produzida no material em resposta a um campo magnético aplicado a ele.

Já a permeabilidade do vácuo (μ_0), cujo valor é igual a $4\pi \times 10^{-7}$ H/m, é o valor de referência adotado no Sistema Internacional (SI), também utilizada para repre-

sentar a permeabilidade no espaço livre. A razão entre a permeabilidade do material e a permeabilidade do vácuo é chamada de permeabilidade relativa (μ_r):

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (2.7)$$

A partir dessas definições, tem-se que

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{\frac{l_{fe}}{\mu_r} + 2d}. \quad (2.8)$$

Sabendo-se que a permeabilidade relativa de materiais ferromagnéticos é normalmente muito maior que um, pode-se negligenciar sua magnetização, simplificando 2.8 para

$$B \approx \frac{\mu_0 Ni}{2d}. \quad (2.9)$$

Com isso, o fluxo magnético é dado então por

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ni A}{2d}. \quad (2.10)$$

2.2 Circuito Elétrico Equivalente

Outra forma de se chegar à equação do fluxo magnético apresentada em 2.10 é através do método do circuito elétrico equivalente (STEPHAN *et al.*, 2013). O método recebe este nome por sua equivalência com a teoria válida para circuitos elétricos. Como visto na seção anterior, o fluxo magnético em um circuito fechado é constante, portanto, semelhante à corrente elétrica regida pela lei de Kirchoff de Corrente.

Esta equivalência pode também ser aplicada à tensão em um circuito elétrico. De acordo com a segunda lei de Kirchoff, o somatório das quedas de tensão é igual ao somatório de tensão das fontes, o que pode ser comparado à soma das parcelas Hl ser igual ao produto Ni em um circuito magnético.

A partir desta analogia e sabendo que

$$Ni = Hl = \frac{Bl}{\mu} = \Phi \frac{l}{\mu A}, \quad (2.11)$$

sendo l o comprimento total do circuito, pode-se dizer que Ni está para tensão total, o fluxo Φ está para corrente e o termo $l/\mu A$ seria então o equivalente da resistência elétrica, que no caso de circuitos magnéticos é chamada de relutância.

Para o caso do circuito magnético básico apresentado na Figura 2.3, a relutância total é a soma da relutância do material ferromagnético (R_{fe}) e do entreferro (R_{ar}) que são dadas, respectivamente, por

$$R_{fe} = \frac{l_{fe}}{\mu_0 \mu_r A}, \quad (2.12)$$

$$R_{ar} = \frac{2d}{\mu_0 A}. \quad (2.13)$$

Com isso, é possível representar o circuito magnético através de um circuito elétrico equivalente, como apresentado na Figura 2.4.

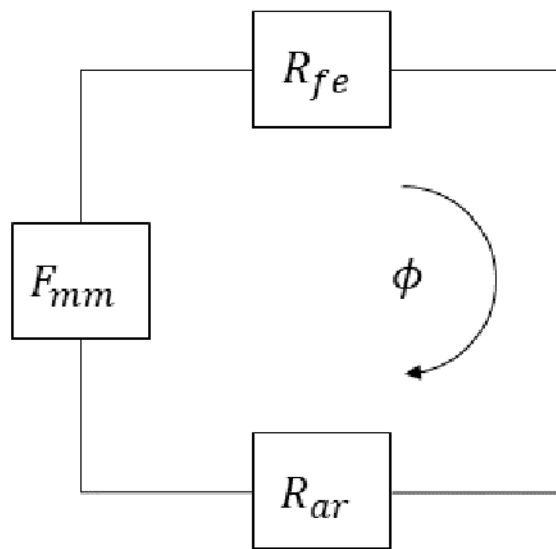


Figura 2.4 – Circuito elétrico equivalente. Fonte: [Adaptado de Stephan *et al.* (2013)]

A partir deste circuito, pode-se chegar à seguinte relação para a densidade de fluxo:

$$\Phi = \frac{Ni}{R_{fe} + R_{ar}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni}{2d + \frac{l_{fe}}{\mu_r}}. \quad (2.14)$$

Considerando a permeabilidade relativa do material $\mu_r \gg 1$, tem-se

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2d}, \quad (2.15)$$

ou seja, o mesmo resultado obtido na seção anterior.

2.3 Levitação Magnética

Conforme Stephan *et al.* (2013), em um sistema eletromecânico, o princípio da conservação de energia permite estabelecer que a energia de entrada (E_e) é igual ao somatório da energia armazenada no sistema (E_a), a energia relacionada às perdas (E_p) e à energia mecânica de saída (E_s):

$$E_e = E_a + E_p + E_s. \quad (2.16)$$

De forma resumida, derivando-se a equação 2.16 em relação ao tempo, que resulta na relação das potências, desprezando-se as perdas no sistema e aplicando as devidas substituições, chega-se à seguinte equação:

$$i \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dE_a}{dt} + f \frac{dx}{dt}, \quad (2.17)$$

em que a potência de entrada é determinada pela corrente (i) multiplicada pela derivada do fluxo concatenado ($\lambda = N\Phi$), e a potência de saída é dada pela força (f) multiplicada pela derivada da posição (x), que pode estar associada a um movimento de rotação ou de translação.

Da equação 2.17, verifica-se que a energia armazenada (E_a) é uma função do fluxo concatenado e da posição. Aplicando-se as derivadas parciais, tem-se que a força (f) é dada pela taxa de variação da energia armazenada com relação à posição:

$$f = -\frac{\partial E_a}{\partial x}. \quad (2.18)$$

Sabe-se também que a energia armazenada em uma região submetida a um campo magnético é dada pela integral de volume:

$$E_a = \frac{1}{2} \int B \cdot H dV, \quad (2.19)$$

em que V é o volume da região considerada.

Para o caso circuito magnético básico apresentado na Figura 2.3, a energia armazenada pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$E_a = \frac{1}{2} BHA^2x. \quad (2.20)$$

Desenvolvendo 2.18 a partir de 2.15 e 2.20, obtém-se então a expressão da força de relutância (F_m) gerada nesse circuito:

$$F_m = -\frac{1}{\mu_0} B^2 A = -\frac{1}{4} \mu_0 N^2 A \left(\frac{i}{x}\right)^2 = -k \left(\frac{i}{x}\right)^2, \quad (2.21)$$

em que $k \triangleq \frac{1}{4} \mu_0 N^2 A$ é chamada de constante eletromagnética.

Como pode ser observado, a força de relutância é diretamente proporcional ao quadrado da corrente na bobina e inversamente proporcional ao quadrado do comprimento do entreferro. O sinal negativo na expressão significa que se trata de uma força de atração.

Uma aplicação prática desta força é seu uso para a suspensão ativa de objetos. Conforme ilustrado na Figura 2.5, um exemplo comum é a levitação simples, em que se utiliza um eletroímã para realizar a suspensão na direção vertical através da geração de uma força de magnitude suficiente para compensar a força peso (F_p) do objeto. Neste caso, o valor de x na equação 2.21 corresponde à diferença entre a altura total (S) do eletroímã e a altura desejada (s) que se deseja manter o objeto.

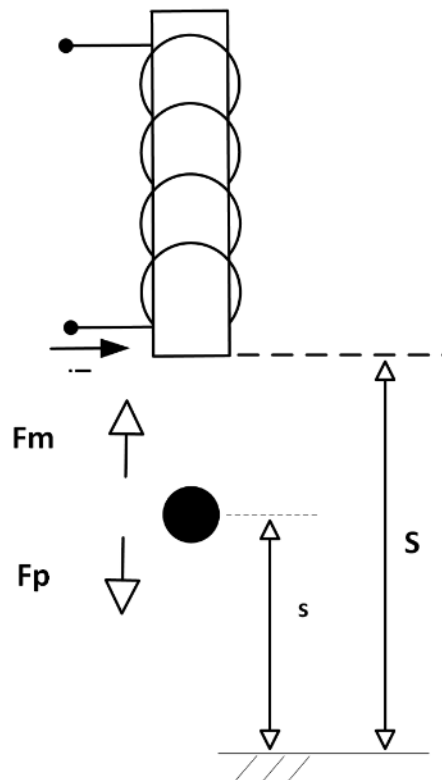
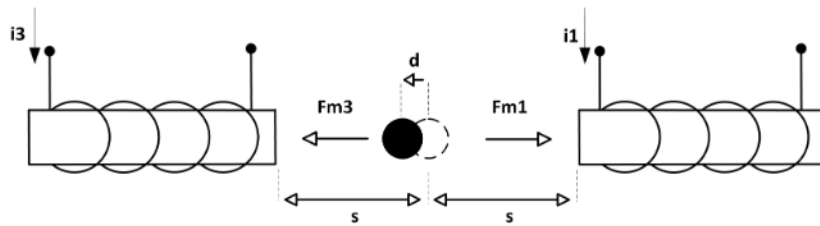


Figura 2.5 – Levitação simples. Fonte: [Adaptado de Stephan *et al.* (2013)]

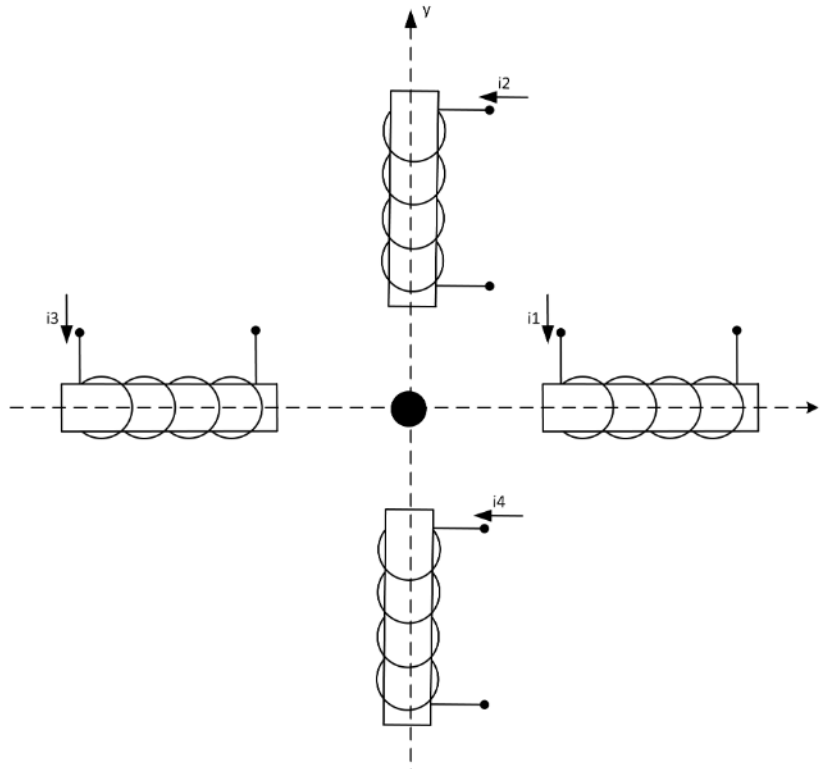
Para a realização do posicionamento dinâmico do objeto numa mesma direção (i.e., com um grau de liberdade) é necessária a inclusão de um segundo eletroímã, de modo que seja possível exercer uma força controlável em sentido oposto à força exercida pelo primeiro. O arranjo apresentado na Figura 2.6 ilustra o controle de posição na direção horizontal.


 Figura 2.6 – Posicionamento horizontal. Fonte: [Adaptado de Stephan *et al.* (2013)]

Considerando que a posição de equilíbrio corresponde a uma distância s dos dois eletroímãs, as forças de relutância F_{m1} e F_{m3} são dadas, respectivamente, por

$$F_{m1} = -k \left(\frac{i_1}{s+d} \right)^2 \quad e \quad F_{m3} = -k \left(\frac{i_3}{s-d} \right)^2. \quad (2.22)$$

Para o posicionamento planar, ou seja, o ajuste preciso de posição em um plano com coordenadas (x, y) , são necessários então quatro eletroímãs, conforme ilustrado na Figura 2.7. Nesta configuração, é possível realizar o controle das forças aplicadas nas direções horizontal e vertical, permitindo, portanto, o movimento com dois graus de liberdade. Esse é o arranjo básico que explica de forma simplificada o funcionamento dos mancais magnéticos ativos.


 Figura 2.7 – Posicionamento planar. Fonte: [Adaptado de Stephan *et al.* (2013)]

Na prática, os mancais magnéticos ativos podem ser encontrados em diferentes configurações, dependendo do tipo de aplicação. Com base na função exercida, eles se

dividem em axial, radial, ou uma combinação dos dois (HUANG *et al.*, 2024). A diferença consiste basicamente na direção das forças transmitidas por estes dispositivos. O radial suporta forças perpendiculares ao eixo de rotação, mantendo o rotor centralizado nos eixos x-y, impedindo o deslocamento lateral. Já o axial, posicionado normalmente no fim do rotor, impede o deslocamento longitudinal ao longo do eixo z por meio de forças paralelas ao eixo de rotação.

Em relação ao número de polos, para o caso do mancal radial, a quantidade mínima suficiente para gerar forças nas duas direções ortogonais é três. Entretanto, essa configuração, apesar de ser a mais compacta e de menor custo, apresenta alto acoplamento entre os dois eixos do mancal o que impossibilita a adoção de um processo de linearização convencional (MEEKER; MASLEN, 2006). Por este motivo, os mancais radiais com arranjos simétricos, em especial o com oito polos, são os mais utilizados em aplicações industriais (ZHANG; ZHU, 2017).

Nesta configuração, como pode ser visto na Figura 2.8, gerada utilizando o software FEMM, os pares de polos dispostos simetricamente em oposição – 2 pares por eixo – geram laços magnéticos independentes que produzem forças de atração nas quatro direções, igualmente independentes umas das outras. Essa característica facilita significativamente o controle de posição do rotor.

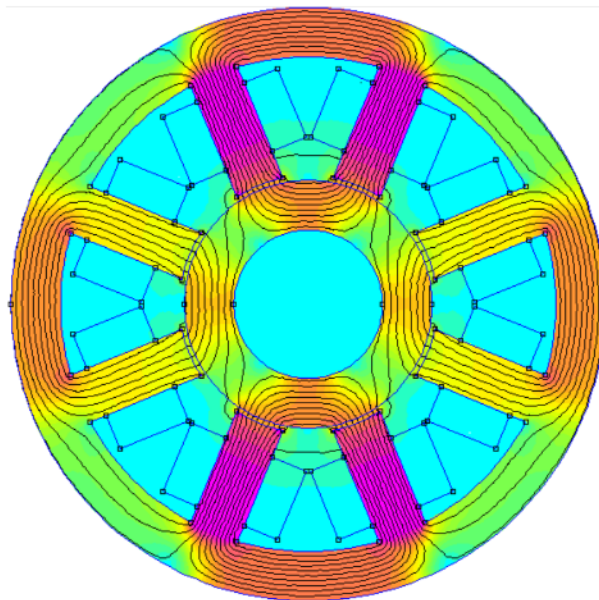


Figura 2.8 – Mancal magnético com oito polos. Fonte: [Autor]

Por ser o modelo mais comumente empregado, o mancal magnético ativo radial com oito polos é a configuração adotada neste trabalho.

3 Modelagem do Sistema Mancal-Rotor

Este capítulo apresenta a modelagem que descreve o comportamento do sistema mancal-rotor. Conforme o diagrama esquemático simplificado ilustrado na Figura 3.1, o sistema a ser modelado é composto por um rotor rígido, dois conjuntos de mancais magnéticos (M1 e M2) e dois sensores de posição (S1 e S2), localizados nas extremidades do rotor. De forma implícita aos mancais, e não representados na ilustração, existem os circuitos amplificadores de potência associados às bobinas dos polos magnéticos.

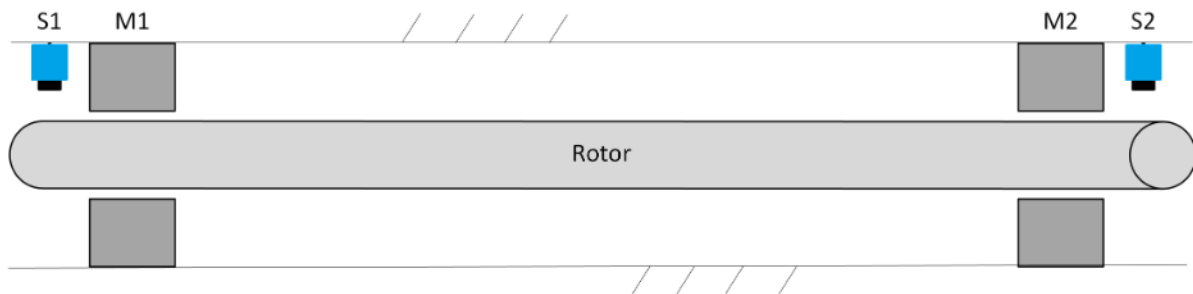


Figura 3.1 – Configuração do sistema mancal-rotor. Fonte: [Autor]

As modelagens do mancal e do rotor são realizadas separadamente. Em seguida, os modelos desenvolvidos são integrados de modo a se obter uma representação do sistema completo. Por fim, de posse das equações que representam o sistema, é realizada uma breve análise sob a perspectiva de controle que demonstra as características intrínsecas deste tipo de sistema, tais como a instabilidade e a alta não linearidade.

3.1 Modelagem do Mancal Magnético

Como exemplificado no capítulo anterior, o mancal a ser modelado possui oito polos organizados em 4 pares, sendo dois pares para posicionamento na direção x e os outros dois para posicionamento na direção y . As bobinas dos polos de um mesmo par são conectadas em série, portanto, ambas são energizadas pela mesma corrente. Esse arranjo é o que faz com que os fluxos magnéticos sejam independentes. A Figura 3.2 ilustra essa configuração, mostrando as forças geradas por cada conjunto de bobinas na direção x .

Utilizando os conceitos de circuitos magnéticos e de seu equivalente elétrico, pode-se chegar à equação que expressa a força de relutância gerada nesse tipo de mancal. Tomando como exemplo o par de polos ativados pela corrente i_1 , a força F_{m1} é a resultante das forças geradas por cada um dos polos (f_{1a} e f_{1b}), visto que estão posicionados a um ângulo α em relação ao eixo de controle, conforme apresentado na Figura 3.3.

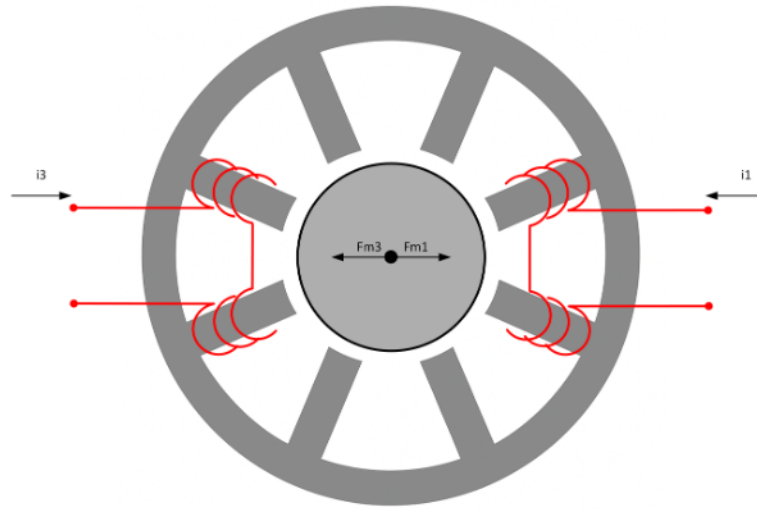


Figura 3.2 – Geração de forças na direção x. Fonte: [Autor]

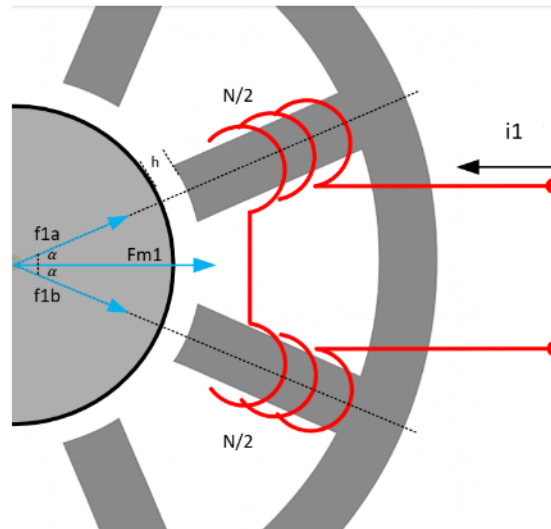


Figura 3.3 – Geração da força F_{m1} na direção x. Fonte: [Autor]

Considerando que não há diferenças entre os polos, que a área da face do polo é igual à área do entreferro ($A_{fe} = A_{ar} = A$), a permeabilidade relativa do material $\mu_r \gg 1$ e desprezando-se as perdas, pode-se supor que os fluxos nos dois polos são iguais e dados por

$$\phi_{1a} = \phi_{1b} = \frac{F_{mm}}{R_{ar}} = \frac{\frac{N}{2}i_1}{\frac{h}{\mu_0 A}} = \frac{N\mu_0 Ai_1}{2h}. \quad (3.1)$$

Com isso, a densidade de fluxo (B) é

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{N\mu_0 i_1}{2h}. \quad (3.2)$$

Utilizando a equação 2.21, calcula-se então a força gerada em cada polo:

$$f_{1a} = f_{1b} = \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \frac{1}{8} N^2 A \mu_0 \left(\frac{i_1}{h} \right)^2. \quad (3.3)$$

Desta forma, como a força resultante (F_{m1}) é dada pela soma das forças em cada polo, tem-se:

$$F_{m1} = (f_{1a} + f_{1b}) \cos \alpha = k \left(\frac{i_1}{h} \right)^2 \cos \alpha. \quad (3.4)$$

Para o caso do mancal magnético radial com 4 pares de polos, o valor do ângulo α é igual a $22,5^\circ$.

As correntes de ativação são compostas por uma componente fixa (i_0) e uma componente variável ($i_{x,y}$) para controle. A componente fixa i_0 é conhecida por corrente de base e calculada para gerar a força necessária para manter o rotor na posição de referência. Como na direção y incide a força peso, a corrente i_0 aplicada nesse canal normalmente tem maior magnitude que a aplicada no canal de controle de posição na direção x.

A corrente $i_{x,y}$ é a componente manipulável utilizada para realizar o controle de posicionamento e reação a perturbações. O circuito para geração dessas correntes opera no modo diferencial, ou seja, a corrente é aplicada com a mesma magnitude, mas com sinais invertidos aos pares opostos de um mesmo canal. A Figura 3.4 apresenta o diagrama do circuito de ativação para o canal de controle na direção y.

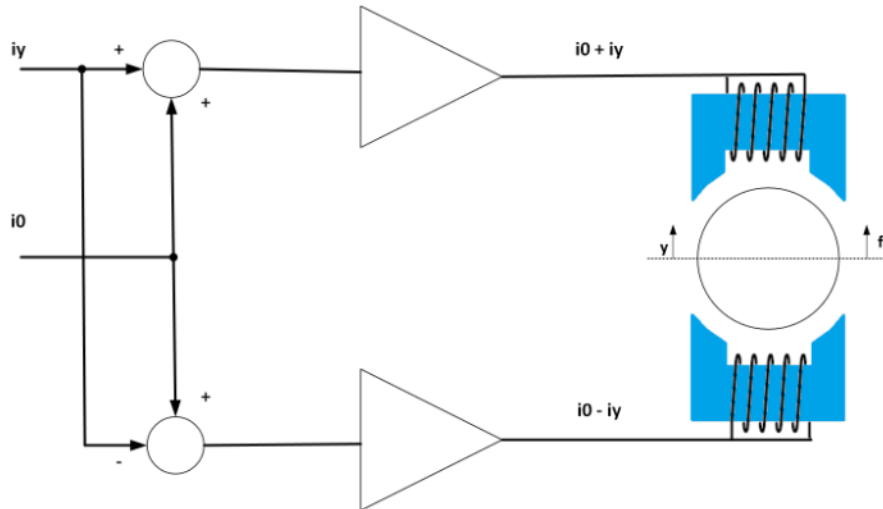


Figura 3.4 – Circuito de ativação diferencial. Fonte: [Adaptado de Schweitzer *et al.* (2009)]

Considerando esse modo de ativação e ainda a variação no comprimento do entreferro, incluída na equação 2.22, pode-se definir as equações finais para as forças magnéticas resultantes nas direções x e y, respectivamente, como

$$F_x = k \left(\frac{(i_0 + i_x)^2}{(h - x)^2} - \frac{(i_0 - i_x)^2}{(h + x)^2} \right) \cos \alpha, \quad (3.5)$$

$$F_y = k \left(\frac{(i_0 + i_y)^2}{(h - y)^2} - \frac{(i_0 - i_y)^2}{(h + y)^2} \right) \cos \alpha. \quad (3.6)$$

Essas equações são não lineares e demonstram a alta sensibilidade do sistema a variações na corrente e no comprimento do entreferro. Contudo, de acordo com Schweitzer *et al.* (2009), quando são consideradas apenas pequenas variações em torno de um ponto de operação, é possível obter versões linearizadas das equações dessas forças. Aplicando a expansão da série de Taylor de primeira ordem em torno da origem $P_0 = (0, 0)$, obtém-se as seguintes expressões:

$$F_x = \left. \frac{\partial F_x}{\partial x} \right|_{P_0} x + \left. \frac{\partial F_x}{\partial y} \right|_{P_0} y + \left. \frac{\partial F_x}{\partial i_x} \right|_{P_0} i_x + \left. \frac{\partial F_x}{\partial i_y} \right|_{P_0} i_y, \quad (3.7)$$

$$F_y = \left. \frac{\partial F_y}{\partial x} \right|_{P_0} x + \left. \frac{\partial F_y}{\partial y} \right|_{P_0} y + \left. \frac{\partial F_y}{\partial i_x} \right|_{P_0} i_x + \left. \frac{\partial F_y}{\partial i_y} \right|_{P_0} i_y. \quad (3.8)$$

Resolvendo as derivadas parciais, tem-se:

$$F_x = k_{sx}x + k_{ix}i_x \text{ e } F_y = k_{sy}y + k_{iy}i_y, \quad (3.9)$$

em que as constantes k_s (fator força-deslocamento) e k_i (fator força-corrente) são dadas por

$$k_s = \frac{\mu_{0A}N^2i_0^2}{h^3}(\cos \alpha) \text{ e } k_i = \frac{\mu_{0A}N^2i_0}{h^2}(\cos \alpha). \quad (3.10)$$

3.2 Modelagem do Atuador e do Sensor do Mancal

O mancal magnético é um dispositivo inerentemente instável em malha aberta. Portanto, sua aplicação só é possível em um circuito em malha fechada com um controlador operando de forma contínua para manter o rotor na posição de referência. A Figura 3.5 apresenta um diagrama simplificado deste circuito que, além do controlador, envolve o sensor de posição do rotor e um amplificador de potência que é o atuador em conjunto com a bobina.

A partir do sinal do sensor, o controlador calcula o sinal de controle e o envia ao amplificador de potência que faz a conversão para corrente de ativação da bobina no polo do mancal. Há duas formas principais de controlar as bobinas: controle por corrente ou controle por tensão. A maioria dos mancais industriais utilizam o controle por corrente por ser uma solução que permite a estabilização do sistema utilizando o convencional PID, o que torna mais prática sua implementação.

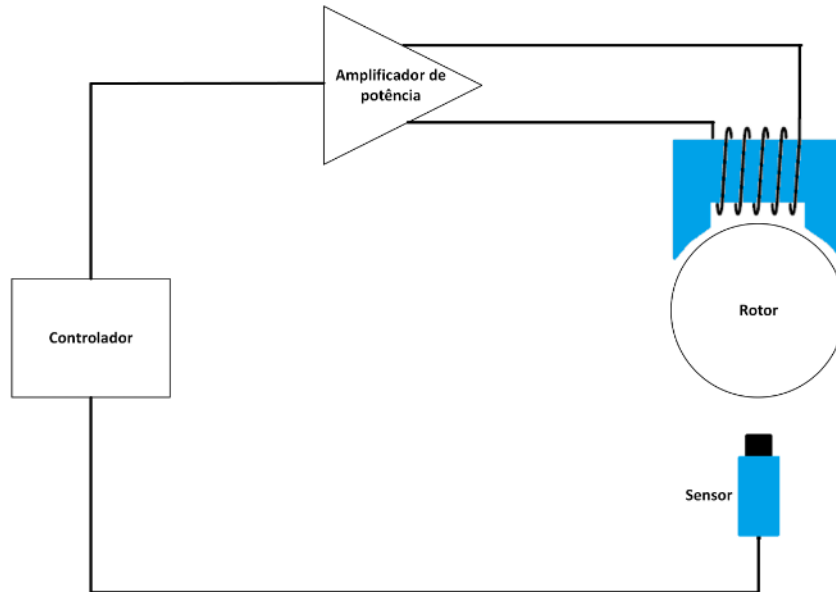


Figura 3.5 – Diagrama básico do mancal em malha fechada. Fonte: [Adaptado de Schweitzer *et al.* (2009)]

Em compensação, o *hardware* do amplificador de corrente possui uma arquitetura mais complexa, pois implementa internamente uma malha de controle de corrente que tem por objetivo compensar a dinâmica adicional no sistema introduzida pela indutância da bobina. Essa solução possui, portanto, um custo mais elevado.

Por outro lado, utilizando o amplificador de tensão, a dinâmica causada pela indutância (L) é considerada no cálculo do sinal de controle (u):

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + k_u \frac{dx}{dt}, \quad (3.11)$$

em que i é a corrente e R é a resistência da bobina. O termo $k_u \dot{x}$ representa a tensão induzida na bobina que é proporcional à velocidade do rotor (\dot{x}) na direção do movimento. De acordo com Schweitzer *et al.* (2009), baseado na teoria de conversão eletromecânica, pode ser demonstrado que a constante k_u é teoricamente igual ao fator força-corrente k_i .

A utilização do amplificador de tensão requer, entretanto, o emprego de algoritmos de controle mais complexos, uma vez que a estabilização do sistema com o PID torna-se difícil devido à posição dos polos do sistema em malha aberta (SCHWEITZER *et al.*, 2009). Com o avanço dos controladores digitais, essa necessidade tem deixado de ser uma desvantagem, pois os atuais softwares e processadores disponíveis facilitaram sobremaneira a implementação de técnicas modernas de controle.

Além do *hardware* mais simples, destacam-se outras vantagens do uso do controle por tensão, como a maior robustez global do sistema, uma vez que o modelo da planta utilizado no projeto do controlador é mais preciso, e a possibilidade de explorar a carac-

terística bidirecional dos transdutores eletromecânicos, permitindo o desenvolvimento dos chamados mancais auto-sensores (*self-sensing bearings*). Neste trabalho é adotado o controle por tensão, contudo, sem a implementação desta capacidade de sensoriamento.

Para a medição da posição do rotor, são considerados os sensores do tipo Hall utilizados no sistema de referência (MOMENTS, 1995), o qual é apresentado na próxima seção, e cujas saídas são expressas pela equação

$$V_n = 5000n + 25 \times 10^9 n^3, \quad n = x, y, \quad (3.12)$$

em que a posição medida na direção ' n ' é dada em tensão pela saída do sensor V_n .

3.3 Modelagem do Rotor

Neste trabalho, optou-se pela modelagem de um rotor rígido, ao invés de um rotor flexível, devido à menor complexidade de sua dinâmica, caracterizada exclusivamente pelos movimentos de translação e rotação. Diferentemente do rotor flexível, o rotor rígido mantém sua forma geométrica inalterada mesmo sob condições operacionais adversas, não apresentando deformações estruturais significativas.

O movimento de translação se refere ao deslocamento linear do centro de massa do corpo e o movimento de rotação à variação angular em torno do eixo axial. Esses movimentos são descritos pelas Equações de Newton-Euler, dadas por

$$\begin{cases} m\ddot{r} = F_{\text{ext}} \\ I\dot{w} + w \times (I.w) = M_{\text{ext}} \end{cases}, \quad (3.13)$$

com

$$I = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

em que m é a massa do rotor, $r = (x_0, y_0, z_0)$ é o vetor posição do centro de massa, F_{ext} é o vetor de forças externas incidentes sobre o rotor, w é o vetor velocidade angular, M_{ext} é o momento resultante das forças externas e I é a matriz do tensor de inércia, cujos elementos representam a distribuição de massa do corpo rígido em relação ao sistema de coordenadas (x, y, z) .

A primeira equação expressa a segunda lei de Newton aplicada ao centro de massa de um corpo rígido. Já a segunda equação descreve a dinâmica da rotação e é composta pelo termo de inércia rotacional ($I\dot{w}$) e pelo termo giroscópico ($w \times (I.w)$).

A partir das equações apresentadas em 3.13, é possível desenvolver uma representação vetorial que facilita tanto a sua implementação computacional quanto a aplicação de técnicas de controle. Assim, tem-se:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_x \alpha_x + I_{xy} \alpha_y + I_{xz} \alpha_z \\ I_{yx} \alpha_x + I_y \alpha_y + I_{yz} \alpha_z \\ I_{zx} \alpha_x + I_{zy} \alpha_y + I_z \alpha_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_{xz} \omega_x + I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z) \omega_y \\ (I_x \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z) \omega_z \\ (I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y + I_{yz} \omega_z) \omega_x \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$- \begin{bmatrix} (I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y + I_{yz} \omega_z) \omega_z \\ (I_{xz} \omega_x + I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z) \omega_x \\ (I_x \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z) \omega_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}.$$

em que α é aceleração angular e w a velocidade angular, com os índices (x, y, z) indicando o eixo de referência.

De acordo com Stephan *et al.* (2013), a representação matricial expressa em 3.15 pode ser simplificada adotando alguns pressupostos que permitem reduzir o número de parâmetros envolvidos. Considerando o rotor simétrico, os termos cruzados da matriz do tensor são nulos e $I_x = I_y$. O eixo z é definido como eixo de simetria e de rotação do rotor. Como não há movimento de translação nesta direção e a velocidade de rotação é mantida constante, a aceleração linear \ddot{z}_0 e a aceleração angular α_z são nulas. A posição do rotor é descrita a partir do sistema de eixos fixos ao rotor em relação ao sistema de coordenadas inercial e os ângulos θ e ψ , que correspondem respectivamente às inclinações do rotor sobre os eixos x e y desse sistema, são considerados mínimos, o que permite desprezar os termos que possuem a multiplicação de velocidades angulares $w_x w_y$.

Aplicando estas considerações em 3.15, chega-se às equações finais que representam a dinâmica do rotor:

$$\begin{cases} m \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_x \alpha_x \\ I_x \alpha_y \end{bmatrix} + w_z I_z \begin{bmatrix} w_y \\ -w_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.16)$$

3.4 Integração dos Modelos do Sistema Mancais-Rotor

De posse das equações que descrevem a dinâmica do mancais e do rotor, realiza-se a modelagem do sistema integrado. Na ilustração da Figura 3.6, em que é considerado o deslocamento somente no eixo x , estão identificadas as variáveis e parâmetros do sistema, cujas descrições estão apresentadas na Tabela 3.1. Os pares de mancais e de sensores estão posicionados de forma equidistante em relação ao centro de massa, sendo adotada a convenção de valores negativos para o mancal M1 e o sensor S1.

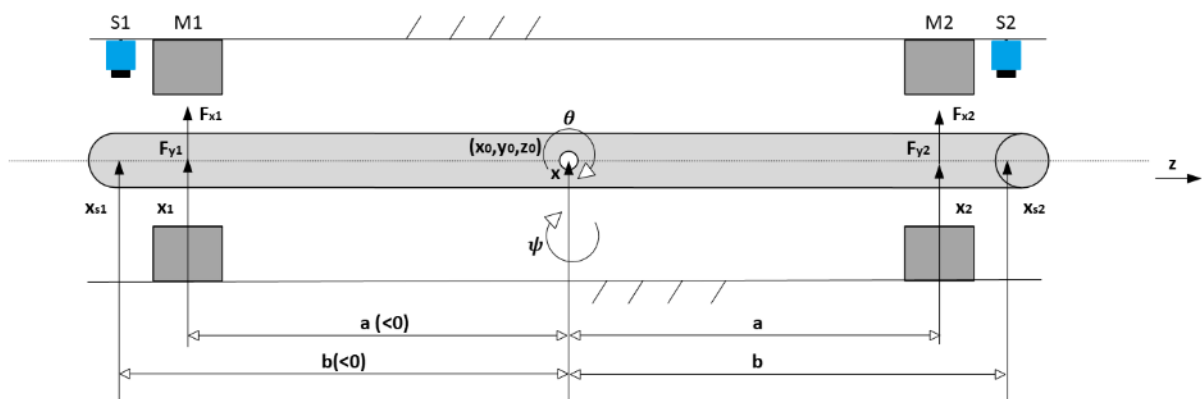


Figura 3.6 – Detalhamento do sistema mancais-rotor. Fonte: [Autor]

Tabela 3.1 – Variáveis e parâmetros do sistema. Fonte: [Autor]

Variável/parâmetro	Descrição
F_{x1}, F_{x2}	Forças magnéticas geradas pelos mancais 1 e 2 na direção radial x .
F_{y1}, F_{y2}	Forças magnéticas geradas pelos mancais 1 e 2 na direção radial y .
x_1, x_2	Deslocamentos do rotor nos mancais 1 e 2 na direção radial x .
x_{s1}, x_{s2}	Deslocamentos do rotor nos sensores 1 e 2 na direção radial x .
y_1, y_2	Deslocamentos do rotor nos mancais 1 e 2 na direção radial y .
y_{s1}, y_{s2}	Deslocamentos do rotor nos sensores 1 e 2 na direção radial y .
a	Distância dos mancais M_1 e M_2 até o centro de massa.
b	Distância dos sensores S_1 e S_2 até o centro de massa.

3.4.1 Modelo Não Linear

Para a obtenção do modelo não linear do sistema é necessário, inicialmente, definir as equações que representam os deslocamentos do rotor nos mancais e nos sensores e os momentos resultantes causados pelas forças geradas pelos mancais. Com base na geometria do sistema integrado, tem-se as seguintes expressões para os deslocamentos:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - a \sin \psi, \\ x_2 &= x_0 + a \sin \psi, \\ x_{s1} &= x_0 - b \sin \psi, \\ x_{s2} &= x_0 + b \sin \psi, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_0 - a \sin \theta, \\ y_2 &= x_0 + a \sin \theta, \\ y_{s1} &= x_0 - b \sin \theta, \\ y_{s2} &= x_0 + b \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Da mesma forma, os momentos gerados em cada direção são dados por

$$\begin{aligned} M_x &= a \cos \theta (F_{y2} - F_{y1}), \\ M_y &= a \cos \psi (F_{x2} - F_{x1}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo 3.19 em 3.16 e considerando as forças geradas pelos mancais, a dinâmica do sistema em torno do centro de massa pode então ser descrita pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_0 = F_{x1} + F_{x2} \\ m\ddot{y}_0 = F_{y1} + F_{y2} - mg \\ I_x\ddot{\theta} + w_z I_z \dot{\psi} = a \cos \theta (F_{y2} - F_{y1}) \\ I_x\ddot{\psi} - w_z I_z \dot{\theta} = a \cos \psi (F_{x2} - F_{x1}) \end{cases}, \quad (3.20)$$

em que g representa a aceleração da gravidade. Nota-se que a força peso foi considerada na dinâmica do movimento de translação na direção y . Como os ângulos θ e ψ são pequenos, as aproximações $\sin \psi \approx \psi$, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \psi \approx 1$, $\cos \theta \approx 1$ podem ser aplicadas.

Utilizando-se as equações 3.5 e 3.6, obtém-se as expressões para as forças eletromagnéticas geradas pelos mancais nas quatro direções:

$$\begin{aligned}
F_{x_1} &= k \left(\frac{(i_{01}+i_{x_1})^2}{(h-x_1)^2} - \frac{(i_{01}-i_{x_1})^2}{(h+x_1)^2} \right) \cos \alpha, \\
F_{x_2} &= k \left(\frac{(i_{01}+i_{x_2})^2}{(h-x_2)^2} - \frac{(i_{01}-i_{x_2})^2}{(h+x_2)^2} \right) \cos \alpha, \\
F_{y_1} &= k \left(\frac{(i_{02}+i_{y_1})^2}{(h-y_1)^2} - \frac{(i_{02}-i_{y_1})^2}{(h+y_1)^2} \right) \cos \alpha, \\
F_{y_2} &= k \left(\frac{(i_{02}+i_{y_2})^2}{(h-y_2)^2} - \frac{(i_{02}-i_{y_2})^2}{(h+y_2)^2} \right) \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

As tensões de controle aplicadas às bobinas dos polos em cada direção são expressas como:

$$\begin{aligned}
u_{x_1} &= Ri_{x_1} + L \frac{di_{x_1}}{dt} + k_u \frac{dx_1}{dt}, \\
u_{x_2} &= Ri_{x_2} + L \frac{di_{x_2}}{dt} + k_u \frac{dx_2}{dt}, \\
u_{y_1} &= Ri_{y_1} + L \frac{di_{y_1}}{dt} + k_u \frac{dy_1}{dt}, \\
u_{y_2} &= Ri_{y_2} + L \frac{di_{y_2}}{dt} + k_u \frac{dy_2}{dt}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Os deslocamentos medidos pelos sensores de efeito Hall e expressos pelas suas saídas de tensão são dados por

$$\begin{aligned}
V_{x_{s1}} &= 5000x_{s1} + 25x10^9x_{s1}^3, \\
V_{x_{s2}} &= 5000x_{s2} + 25x10^9x_{s2}^3, \\
V_{y_{s1}} &= 5000y_{s1} + 25x10^9y_{s1}^3, \\
V_{y_{s2}} &= 5000y_{s2} + 25x10^9y_{s2}^3.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Com base nas equações 3.17 a 3.23, é possível então definir o modelo não linear do sistema mancal-rotor, cujas entradas são u_{x_1} , u_{x_2} , u_{y_1} , u_{y_2} , as saídas são $V_{x_{s1}}$, $V_{x_{s2}}$, $V_{y_{s1}}$, $V_{y_{s2}}$ e os estados são x_0 , \dot{x}_0 , y_0 , \dot{y}_0 , ψ , $\dot{\psi}$, θ , $\dot{\theta}$, i_{x_1} , i_{x_2} , i_{y_1} , i_{y_2} .

Desta forma, o modelo não linear pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, u) \\ y = f_2(x) \end{cases}, \tag{3.24}$$

em que

$$f_1(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \frac{(F_{x_1} + F_{x_2})}{m} \\ \dot{y}_0 \\ \frac{(F_{y_1} + F_{y_2} - mg)}{m} \\ \dot{\psi} \\ \frac{(w_z I_z \dot{\theta} + a(F_{x_2} - F_{x_1}))}{I_x} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(-w_z I_z \dot{\theta} + a(F_{y_2} - F_{y_1}))}{I_x} \\ \frac{di_{x_1}}{dt} \\ \frac{di_{x_2}}{dt} \\ \frac{di_{y_1}}{dt} \\ \frac{di_{y_2}}{dt} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$f_2(x) = 5000 \begin{bmatrix} x_{s1} + 5x10^9 x_{s1}^3 \\ x_{s2} + 5x10^6 x_{s2}^3 \\ y_{s1} + 5x10^6 y_{s1}^3 \\ y_{s2} + 5x10^6 y_{s2}^3 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

A implementação do modelo não linear é descrita no Capítulo 5. Na ausência de um protótipo experimental, foram utilizados os valores dos parâmetros de um sistema mancal-rotor comercial, chamado MBC500, que possui a mesma configuração do sistema adotado neste trabalho (Figura 3.7). A Tabela 3.4.1 apresenta todos os parâmetros e seus respectivos valores usados na implementação do modelo.

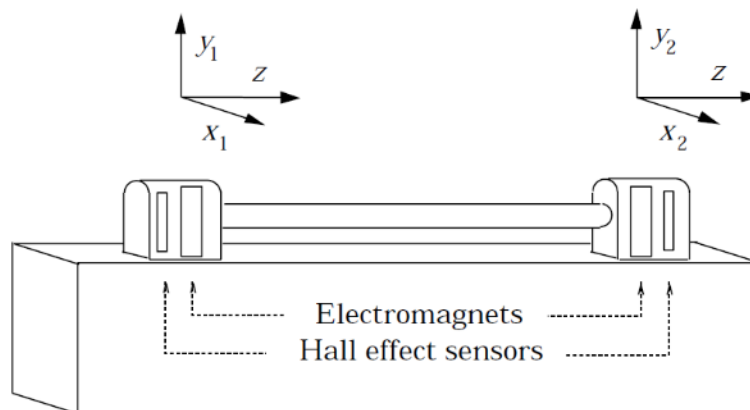


Figura 3.7 – Configuração do sistema mancal-rotor MBC500. Fonte: [(MORSE *et al.*, 1996)]

Tabela 3.2 – Dados do sistema de referência MBC500. Fonte: [(MOMENTS, 1995)]

Parâmetro	Valor
Massa m	0,2629 kg
Momento de inércia I_x	$1,5884 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Momento de inércia I_z	$5,05 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Distância a	0,1105 m
Distância b	0,1317 m
Entreferro h	$4,0 \times 10^{-4} \text{ m}$
Resistência da bobina R	4 Ω
Indutância da bobina L	0,88 mH
Constante eletromagnética k	$2,8 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{A}^2$
Corrente de base i_0	0,5 A
Ângulo do polo α	22,5°
Aceleração da gravidade g	9,81 m/s ²
Velocidade de rotação ω_z	500 rad/s

3.4.2 Modelo Linearizado

O modelo linearizado é obtido a partir do modelo não linear representado por 3.24 utilizando o método da aproximação por série de Taylor de primeira ordem, em que os termos quadráticos e de ordem superior são desconsiderados. A linearização é realizada em torno do ponto de operação que neste caso é a origem (0,0). O objetivo é obter uma representação linear na forma de espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.27)$$

em que x , u e y são, respectivamente, os vetores de estados, entradas e saídas e A , B , C e D são as matrizes do modelo em espaço de estados.

A expansão de Taylor de $f_1(x, u)$ ao redor do ponto $(x_0, u_0) = (0, 0)$ é

$$f_1(x, u) \approx f_1(0, 0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{0,0} x + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{0,0} u. \quad (3.28)$$

Como o sistema está no equilíbrio, é válido afirmar que $f_1(0, 0) = 0$. Assim, para $\dot{x} = f_1(x, u)$, tem-se que:

$$\dot{x} \approx Ax + Bu, \quad (3.29)$$

em que:

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{0,0}, \\ B &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{0,0}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para a saída $y = f_2(x)$, a linearização segue o mesmo processo com a expansão de Taylor:

$$f_2(x, u) \approx f_2(0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{0,0} x. \quad (3.31)$$

Neste caso, $D = 0$ e, para o ponto de equilíbrio, $f_2(0) = 0$. Com isso, tem-se que:

$$C = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{0,0}. \quad (3.32)$$

Após a realização dessas operações, foram encontradas todas as expressões necessárias para os cálculos dos elementos das matrizes. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$, $B \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{4 \times 12}$ e $D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ foram então organizadas da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad C = 5000 [C_1 \quad 0], \quad D = [0]. \quad (3.33)$$

As matrizes A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & a_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_7 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_8 & a_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_9 & a_9 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

A matriz B_1 é dada por

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

A matriz C_1 é dada por

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

A Tabela 3.3 apresenta as expressões de cada elemento das matrizes do modelo.

Tabela 3.3 – Coeficientes do modelo dinâmico do sistema. Fonte: [Autor]

Elemento	Expressão
a_1	$2k_{sx}/m$
a_2	$2k_{sy}/m$
a_3	$2k_{sx}b^2/I_x$
a_4	$2k_{sy}b^2/I_x$
a_5	$w_z I_z/I_x$
a_6	k_{ix}/m
a_7	k_{iy}/m
a_8	$k_{ix}b/I_x$
a_9	$k_{iy}b/I_x$
a_{10}	$-k_{ix}/L$
a_{11}	$-k_{iy}/L$
a_{12}	$-R/L$
b_1	$1/L$

3.5 Problema de Controle do Sistema Mancal-Rotor

O modelo obtido demonstra que o sistema mancal-rotor é, além de multivariável, inerentemente instável e altamente não linear, cuja operação só é possível em malha fechada. A instabilidade se verifica pela presença de polos no semi-plano direito do plano complexo. Isso é possível demonstrar através da análise dos auto-valores do sistema em malha aberta, como apresentado em Schweitzer *et al.* (2009). Aplicando a equação linearizada da força eletromagnética (3.9) na expressão da segunda lei de Newton (3.13), obtém-se:

$$m\ddot{x} = k_s x + k_i i. \quad (3.40)$$

Para esta equação em malha aberta, pode-se considerar a corrente i igual a zero e a função exponencial $x(t) = e^{\lambda t}$ como solução, o que resulta no polinômio característico

$$m\lambda^2 - k_s = 0, \quad (3.41)$$

cujas soluções são dadas pelos auto-valores $\lambda_1 = \sqrt{k_s/m}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{k_s/m}$. Como pode ser observado, ambos são valores reais e λ_1 é positivo, portanto, localizado no semi-plano direito do plano complexo, o que comprova o comportamento instável do sistema.

Uma análise do modelo obtido neste capítulo, utilizando o software Matlab® e os dados do sistema de referência (3.4.1), revela os polos instáveis do sistema, os quais estão apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Polos localizados no semiplano direito. Fonte: [Autor]

Polos no semiplano direito			
$1,716 \times 10^2$	$2,618 \times 10^2$	$4,603 \times 10^2$	$7,708 \times 10^2$

A alta não linearidade está fortemente associada à geração de forças pelos mancais que, como visto nas equações 3.5 e 3.6, apresentam grande sensibilidade à pequenas variações de posição e corrente. Adicionalmente, o termo giroscópico presente na dinâmica de movimento do rotor é outro fator que contribui com não linearidades. Ele está representado no modelo linearizado pelo elemento a_5 , o qual é dependente da velocidade de rotação. Para aplicações de baixa velocidade, este termo tem valor desprezível, o que permite assumir os eixos x e y como desacoplados e implementar o tradicional controle PID em uma configuração SISO (*Single Input Single Output*).

Entretanto, o maior interesse pelos mancais magnéticos se deve justamente à sua aplicabilidade a operações que requerem altas velocidades. Nessa condição, os acoplamentos na dinâmica do sistema introduzidos pelo efeito giroscópico não podem ser desprezados e a adoção de técnicas de controle mais sofisticadas torna-se, portanto, uma necessidade.

Ressalta-se que o modelo linearizado a ser utilizado para o projeto dos controladores é válido sob a hipótese de que os desvios em relação ao ponto de operação sejam suficientemente pequenos quando comparados às dimensões características do rotor. Conforme Schweitzer *et al.* (2009), essa hipótese garante também que o movimento na direção radial é desacoplado do movimento axial, o qual não foi considerado nesta análise.

4 Conceitos e Estratégias de Controle

Este capítulo apresenta, inicialmente, uma teoria básica sobre controle multivariável, utilizada como introdução para a descrição da estratégia de controle H_∞ , na qual são formulados o problema geral de sensibilidade mista através do conceito de transformação linear fracionária (LFT — *Linear Fractional Transformation*), o conceito de planta estendida MIMO e o algoritmo de síntese do controlador.

Na sequência é apresentada a estratégia de controle LQG, onde são descritos a técnica de controle LQR e o observador de estados, que neste caso é o filtro de Kalman. À estrutura dessa configuração, é adicionada uma ação integral, que tem por objetivo a inserção de valores de referência diferentes de zero e reduzir ao mínimo o erro em estado estacionário. O LQG é ainda apresentado como um caso especial do Controle H_2 .

Para a estratégia de controle MPC, cuja estrutura se assemelha ao LQG, é descrito o seu algoritmo, o qual é baseado no modelo discretizado do sistema. Ele implementa uma lógica que consiste em prever as respostas futuras do sistema dentro de um horizonte finito e calcular as ações de controle adequadas a cada instante de amostragem, considerando ainda restrições operacionais que podem ser definidas diretamente pelo projetista.

4.1 Teoria Básica para Controle Multivariável

A Figura 4.1 fornece uma visão geral de um sistema de controle em malha fechada. Os blocos principais são $G(S)$, que corresponde ao modelo da planta, e $K(S)$ que representa o controlador. Os sinais $D(S)$, distúrbio no processo, e $N(S)$, ruído de medição, têm suas dinâmicas modeladas por $G_d(S)$ e $F(S)$, respectivamente. Normalmente, o modelo da planta $G(S)$ já inclui os modelos dos atuadores e dos sensores, o que leva a adotar $F(S) = I$ (matriz identidade). O sinal de controle $U(S)$ é gerado a partir do erro $E(S)$, que é a diferença entre a entrada de referência $R(S)$ e a realimentação da saída $Y(S)$ afetada pelo ruído $N(S)$.

Com base no diagrama e considerando $F(S)$ incluído em $G(S)$ é possível estabelecer as seguintes relações:

$$E = R - (N + Y), \quad (4.1)$$

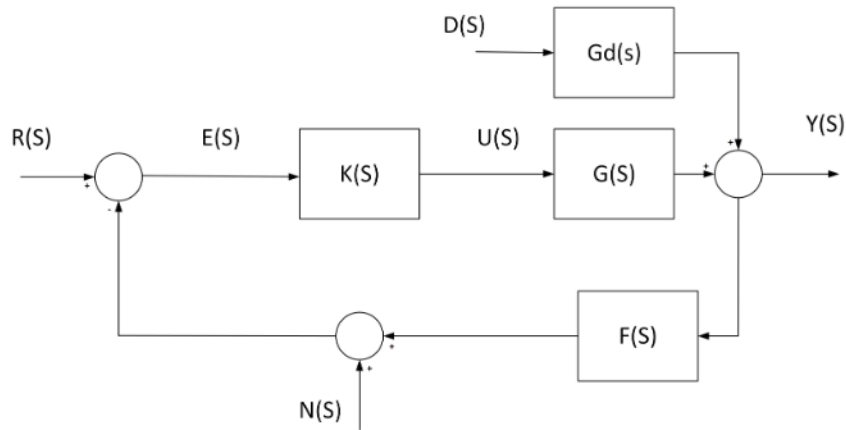


Figura 4.1 – Diagrama de blocos de sistema em malha fechada. Fonte: [Autor]

$$Y = GKE + G_d D. \quad (4.2)$$

Desenvolvendo Y a partir de E, pode-se chegar à seguinte expressão para a saída:

$$Y = \frac{GK}{1 + GK} R + \frac{1}{1 + GK} G_d D - \frac{GK}{1 + GK} N. \quad (4.3)$$

A fração que multiplica R e N é a função de transferência em malha fechada, também conhecida como função sensibilidade complementar, denotada por T. A segunda fração, que multiplica $G_d D$, é a chamada função sensibilidade S. Ambas as funções são de malha fechada. Sabendo que a função de transferência de malha aberta é dada por $L = GK$, S e T podem ser escritas como

$$S = \frac{1}{1 + L}, \quad (4.4)$$

$$T = \frac{L}{1 + L}. \quad (4.5)$$

O erro teórico $E_t = Y - R$, em que não se considera ruído na medição, pode ser expresso em uma estrutura semelhante à apresentada na equação 4.3, em que são utilizadas as mesmas entradas:

$$E_t = -SR + SG_d D - TN. \quad (4.6)$$

O objetivo de controle é fazer com que o erro E_t seja o menor possível em todas as faixas de frequência. Normalmente, R e D possuem maior amplitude nas baixas frequências, assim, S deve ser moldada para atenuar fortemente nesta faixa, inclusive para

compensar altos ganhos que G possa ter. Já o ruído N possui maior amplitude nas altas frequências, portanto, T deve atenuar nesta outra faixa. Desta forma, o ajuste de uma dessas funções para atender a especificação implica diretamente no ajuste da outra, uma vez que $S + T = 1$. A Figura 4.2 exemplifica essa relação.

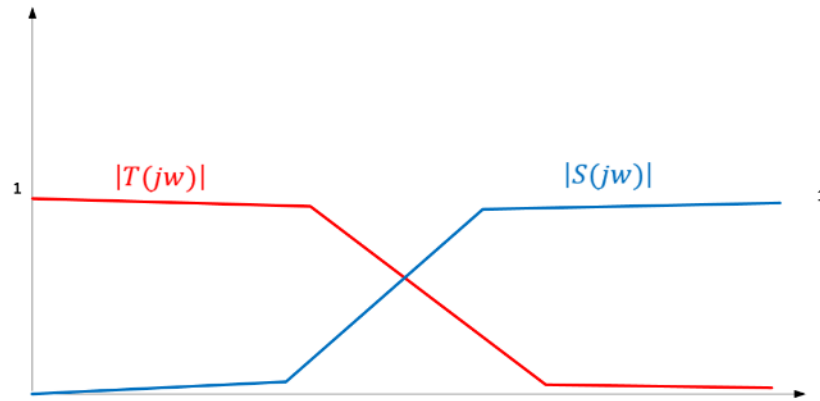


Figura 4.2 – Relação entre as funções T e S . Fonte: [Autor]

Outra relação importante é dada por

$$U = KS(R - G_d D - N), \quad (4.7)$$

que relaciona o sinal de controle U com os sinais de entrada. Nesta equação, o termo KS representa outra função de transferência em malha fechada, também utilizada em projetos de controle.

Em resumo, as funções de malha fechada S , T , KS são importantes para a análise e o projeto de sistemas de controle, quando suas respostas em frequência podem ser formatadas de acordo com os objetivos operacionais. Para o caso do projeto do controle H_∞ , o método utilizado para sintonia que manipula o formato dessas funções é conhecido como método de sensibilidade mista $S/T/KS$.

Em sistemas SISO, as funções de transferência são avaliadas através do diagrama de Bode de módulo. Já para o caso de sistemas MIMO, a análise é realizada através dos valores singulares, que são os ganhos do sistema nas direções principais de entrada e saída. Esses valores podem ser obtidos a partir da decomposição da função de transferência multivariável G em:

$$G = U \Sigma V^T, \quad (4.8)$$

em que $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ é a matriz composta pelos valores singulares, arranjados na diagonal de forma decrescente em termos de magnitude ($\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$). V e U são matrizes ortogonais, cujas colunas correspondem, respectivamente, às direções de entrada

e de saída, sendo o valor singular σ_i o ganho associado à cada par $(v_i$ e $u_i)$ de colunas das duas matrizes. Essa fórmula é conhecida como decomposição em valores singulares.

O valor do ganho máximo (σ_1) pode ser obtido através do cálculo da norma H_∞ da função de transferência multivariável G , que é dada por:

$$\|G\|_\infty = \sup \sigma_{\max}(G(j\omega)) = \sup_{u(t) \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}, \quad (4.9)$$

em que ‘sup’ é o supremo e σ_{\max} é o máximo valor singular. Esse valor representa o ganho máximo de energia do sinal que ocorre para alguma direção, ou seja, ele pode ser expresso também pela razão da norma L_2 (norma euclidiana) da saída vetorial $y(t)$ pela norma L_2 da entrada vetorial $u(t)$, que são dadas, respectivamente, por

$$\|y(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \sum_i |y_i(t)|^2 dt}, \quad (4.10)$$

$$\|u(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \sum_i |u_i(t)|^2 dt}. \quad (4.11)$$

Se o sistema for SISO, a norma H_∞ corresponde ao maior valor de ganho do diagrama de Bode. Essa característica torna esta norma muito útil para o projeto de controladores para sistemas multivariáveis, uma vez que pode ser usada para moldar ou restringir as funções de transferência. Uma descrição detalhada sobre o uso de normas de sinais e sistemas pode ser encontrada em Skogestad e Postlethwaite (2005).

4.2 Estratégia de Controle H_∞

Como o próprio nome já diz, essa técnica utiliza a norma H_∞ de funções de transferência como fundamento para o cálculo da ação de controle. Entretanto, sua aplicação requer que o problema de controle seja formulado dentro de uma estrutura padrão, compatível e reconhecida pelos métodos e ferramentas comerciais disponíveis.

4.2.1 Problema Padrão

O problema padrão, apresentado na Figura 4.3, é o formato requerido pelos algoritmos de projeto, a exemplo do *Robust Control Toolbox* do Matlab® (GU *et al.*, 2005), para que a solução de controle H_∞ possa ser implementada. Ela é composta por três matrizes de funções de transferência, sendo $P(S)$ a planta estendida que combina o modelo da planta com as matrizes de funções peso, $K(S)$ o controlador com parâmetros invariantes no tempo, e $\Delta(S)$ as matrizes de funções de transferência de incertezas, também conhecida como matriz das perturbações.

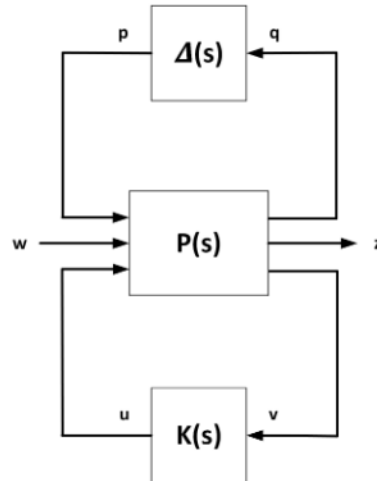


Figura 4.3 – Forma padrão para projeto de controle. Fonte: [Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2005)]

O vetor w representa os sinais externos (i.e., referência, distúrbio e ruído). O vetor z contém os sinais conhecidos como saídas de desempenho, usadas para fins de projeto e a análise de desempenho (ex., saídas do sistema, erros, sinais de controle etc.). Os sinais v e u são, respectivamente, a entrada (i.e., vetor de erros) e a saída (i.e., sinal de controle) do controlador. Os vetores q e p são compostos por sinais virtuais, ou seja, que não existem fisicamente, mas somente durante a fase de projeto do controle. A matriz de perturbações $\Delta(S)$ cria as incertezas a partir de q e as aplica na planta através de p . Neste trabalho, não são consideradas possíveis incertezas na planta, portanto, o uso da matriz $\Delta(S)$ não é abordado.

A matriz de funções de transferência da planta estendida pode ser estruturada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Outra representação possível é na forma de espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ v = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{cases} \quad (4.13)$$

cuja estrutura compacta é

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Considerando o diagrama de blocos da Figura 4.3 sem a matriz $\Delta(S)$, a matriz de funções de transferência em malha fechada que relaciona w e z é dada por

$$z = [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}] w, \quad (4.15)$$

em que o termo que multiplica w é conhecido como transformação linear fracionária inferior das matrizes P e K , denotado por $F_l(P, K)$.

O objetivo de controle é encontrar o controlador K que estabilize internamente a planta e atenda as especificações de controle, satisfazendo o problema de otimização

$$\min \|F_l(P, K)\|_\infty \leq 1, \quad (4.16)$$

ou seja, que minimize a norma H_∞ da matriz de transformação linear fracionária. Isso significa que, caso tenha solução, o controlador encontrado é internamente estabilizante e o máximo ganho de energia entre os sinais de entrada e o erro é minimizado.

4.2.2 Problema S/T/KS

Para a malha apresentada na Figura 4.4, é considerado um problema de rastreamento, ou seja, a perturbação $D = 0$. Os sinais de desempenho são dados por z_1 , que consiste no erro ($E = R - GU$) ponderado por uma função peso W_1 , z_2 que representa o sinal de controle u ponderado por W_2 , e z_3 que consiste na saída Y ponderada por W_3 .

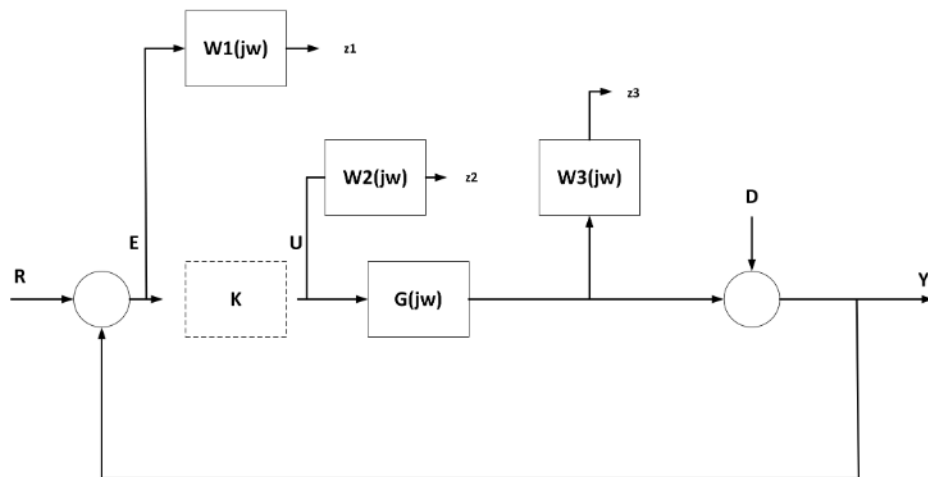


Figura 4.4 – Forma padrão para projeto de controle. Fonte: [Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2005)]

Com base neste diagrama, a planta estendida tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 r - W_1 G u \\ W_2 u \\ W_3 G u \\ r - G u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1 G \\ 0 & W_2 \\ 0 & W_3 G \\ I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

em que

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} -W_1 G \\ W_2 \\ W_3 G \end{bmatrix}, P_{21} = [I], P_{22} = [-G]. \quad (4.18)$$

Aplicando a equação 4.15, tem-se a seguinte expressão para a função de transferência fracionária:

$$F_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_1 G \\ W_2 \\ W_3 G \end{bmatrix} K(I + GK)^{-1} = \begin{bmatrix} W_1(I - GKS) \\ W_2KS \\ W_3GKS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1S \\ W_2KS \\ W_3T \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

O objetivo, portanto, é encontrar um controlador K estabilizante e que satisfaça a condição descrita em 4.16. Contudo, sabe-se que esse problema de minimização é praticamente impossível. Na prática, os algoritmos de controle buscam uma solução sub-ótima:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty \leq \gamma, \quad (4.20)$$

em que γ é normalmente maior que 1. Ou seja, as especificações de desempenho não são completamente atendidas. Para esta condição, pode-se definir as seguintes relações:

$$\sigma_{\max}(S(jw)) \leq \gamma \sigma_{\min}(W_1^{-1}(jw)), \quad (4.21)$$

$$\sigma_{\max}(KS(jw)) \leq \gamma \sigma_{\min}(W_2^{-1}(jw)), \quad (4.22)$$

$$\sigma_{\max}(T(jw)) \leq \gamma \sigma_{\min}(W_3^{-1}(jw)). \quad (4.23)$$

É demonstrado em Skogestad e Postlethwaite (2005) que esse resultado é válido também para o caso em que é considerado um problema regulatório, ou seja, a referência $R = 0$.

Em geral, os algoritmos comerciais buscam o valor sub-ótimo de forma iterativa, com algum critério de parada. A ferramenta *Robust Control Toolbox* do Matlab[®], utilizada neste trabalho, implementa o algoritmo do controle H_∞ proposto por Doyle *et al.* (1988). Esse algoritmo busca encontrar um controlador com ordem igual à da planta na forma de realimentação de estados com observador, através da solução de duas equações algébricas de Riccati.

4.2.3 Síntese do controlador H_∞

Para a síntese do controlador, é necessário que alguns requisitos sejam atendidos pela planta estendida. De acordo com Skogestad e Postlethwaite (2005), considerando a forma compacta da representação em espaço de estados, são impostas as seguintes restrições: (i) (A, B_1) e (A, B_2) são estabilizáveis e (C_1, A) e (C_2, A) são detectáveis; (ii) D_{12} e D_{21} devem ter posto pleno; e (iii) $D_{11} = 0$ e $D_{22} = 0$. Cabe destacar que, normalmente, as aplicações práticas atendem esses requisitos.

Se há um conjunto de valores γ para o quais existe um controlador admissível, é possível se aproximar do mínimo desse conjunto por busca iterativa. Essa busca verifica três critérios que são essenciais para que o controlador atenda 4.20:

- existe $X_\infty \geq 0$ que seja solução da equação de Riccati:

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0, \quad (4.24)$$

de modo que todos autovalores de $[A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)]$ possuem parte real negativa;

- existe $Y_\infty \geq 0$ que seja solução da equação de Riccati:

$$A^T Y_\infty + Y_\infty A + B_1^T B_1 + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1 C_1^T - C_2 C_2^T) X_\infty = 0, \quad (4.25)$$

de modo que todos autovalores de $[A + (\gamma^{-2} C_1 C_1^T - C_2 C_2^T)]$ possuem parte real negativa; e

- o raio espectral $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$.

O controlador que atende a esses critérios pode ser representado através da transformação linear fracionária $K(s) = F_l(K_c, Q)$, em que

$$K_c(s) = \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

sendo $F_\infty = -B_2^T X_\infty$, $L_\infty = -Y_\infty C_2^T$, $Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$ e $A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$.

A matriz $Q(s)$ é qualquer matriz de funções de transferência estável e própria cuja norma $\|Q(s)\|_\infty \leq \gamma$. Para o caso em que não são consideradas as incertezas da planta, $Q(s) \equiv 0$. Assim, o controlador pode ser expresso por

$$K(s) = F_\infty (sI - A_\infty)^{-1} Z_\infty L_\infty. \quad (4.27)$$

Esse controlador possui também uma estrutura de separação na forma de um observador de estados e uma realimentação dos estados estimados, a qual é dada por

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_2 \hat{x} - y) \\ u = F\hat{x} \end{cases}. \quad (4.28)$$

Comparando-se com a estrutura do filtro de Kalman, descrito na próxima seção, o observador implementado pela estrutura do controle H_∞ se diferencia pela presença do termo $B_1 \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x}$, que pode ser interpretado como uma estimativa do pior caso para uma entrada de distúrbio.

4.3 Estratégia de Controle LQG

O controle LQG caracteriza-se, basicamente, por ser formulado a partir de um modelo linear do sistema, possuir uma função de custo quadrática, e por considerar ruídos de processo e de medida como estocásticos e com propriedades estatísticas conhecidas. Nesse caso o modelo do sistema no espaço de estados é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w_d \\ y = Cx + w_n \end{cases}, \quad (4.29)$$

em que w_d e w_n são, respectivamente, os ruídos de processo e de medida, definidos como processos estocásticos gaussianos não correlacionados e de média zero, cujas respectivas matrizes de densidade espectral de potência, W e V , são constantes. Isto significa que w_d e w_n são ruídos brancos com covariâncias iguais a

$$E \{w_d(t)w_d(\tau)^T\} = W\delta(t - \tau), \quad (4.30)$$

$$E \{w_n(t)w_n(\tau)^T\} = V\delta(t - \tau), \quad (4.31)$$

e

$$E \{w_d(t)w_n(t)^T\} = E \{w_n(t)w_d(t)^T\} = 0, \quad (4.32)$$

sendo E o operador esperança e $\delta(t - \tau)$ a função delta.

O problema de controle LQG é encontrar o controle ótimo u que minimize a função de custo

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt \right\}, \quad (4.33)$$

em que $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T \geq 0$ são as matrizes de peso, utilizadas como parâmetros de ajuste no projeto do controlador.

De acordo com Skogestad e Postlethwaite (2005), a solução para o problema LQG é também conhecida como Teorema de Separação, pois implementa duas técnicas distintas, que são independentes entre si. Inicialmente, ela determina o controle ótimo para o problema LQR, ou seja, sem considerar os ruídos de processo e de medida. Uma vez que o LQR necessita de todos estados da planta, o próximo passo é realizar uma estimativa ótima deles a partir das saídas mensuráveis utilizando o filtro de Kalman.

4.3.1 Controle LQR

O LQR consiste em um problema de valor inicial determinístico. Dado um sistema com estado inicial diferente de zero, deve-se encontrar uma ação de controle ótima que leve o sistema de volta para o estado igual a zero. O controle LQR tem, portanto, o objetivo de determinar uma matriz de ganhos K para a lei de controle $u = -Kx$ que minimize a função custo

$$J_d = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt. \quad (4.34)$$

A matriz de ganhos K é constante e definida como

$$K = -R^{-1}B^T P, \quad (4.35)$$

em que $P = P^T \geq 0$ é a única solução positiva semi-definida da equação algébrica de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (4.36)$$

Neste trabalho, esta técnica é aplicada também em modo servo, ou seja, quando o controle não leva os estados do sistema para zero, mas realiza o rastreamento de um valor de referência definido para a saída. Este modo é implementado através da adição de uma ação integral ao controlador, a exemplo do que foi feito em Júnior e Barreto (2025). Para isso, conforme Malkapure e Chidambaram (2014), o modelo em espaço de estados do sistema é aumentado introduzindo-se um novo estado que corresponde à integral do erro:

$$x_e = \int (r - y), \quad (4.37)$$

em que r é a referência e y a saída do sistema.

Com isso, o sistema aumentado passa a ser

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r. \quad (4.38)$$

As novas matrizes são então utilizadas para calcular os novos ganhos e a ação do controlador ótimo é dada por

$$u = -K_1 x - K_2 x_e. \quad (4.39)$$

4.3.2 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um observador de estados que implementa

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f (y - C\hat{x}), \quad (4.40)$$

em que K_f , calculado para minimizar $E \{ [x - \hat{x}]^T [x - \hat{x}] \}$, é dado por

$$K_f = YC^T V^{-1}, \quad (4.41)$$

sendo $Y = Y^T \geq 0$ a única solução positiva semi-definida da equação algébrica de Riccati:

$$YA^T + AY - YC^T V^{-1} CY + W = 0. \quad (4.42)$$

A combinação do filtro de Kalman com o controle LQR resulta então na solução para o problema LQG, cuja ação de controle é

$$u = -K_1 \hat{x} - K_2 x_e. \quad (4.43)$$

A Figura 4.5 ilustra a estrutura do controlador LQG com ação integral.

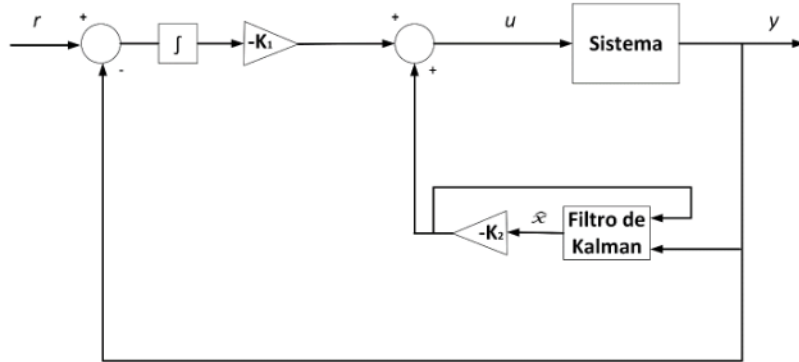


Figura 4.5 – Controlador LQG com ação integral. Fonte: [Autor]

4.3.3 LQG como caso especial do controle H_2

Skogestad e Postlethwaite (2005) demonstra que o problema LQG pode ser estruturado de uma forma que se enquadra como um problema de controle H_2 . Para isso, define-se o sinal de erro como

$$z = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

e as entradas estocásticas w_d e w_n como

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & V^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} w, \quad (4.45)$$

em que w é o ruído branco de intensidade unitária, cuja esperança é

$$E \{w(t)w(\tau)^T\} = I\delta(t - \tau). \quad (4.46)$$

Assim, a função de custo do LQG (4.33) passa a ser

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t)^T z(t) dt \right\} = tr E \left\{ \int_0^T z(t)z(t)^T dt \right\}. \quad (4.47)$$

Aplicando-se o Teorema de Parseval, tem-se:

$$\text{tr} E \left\{ \int_0^T z(t) z(t)^T dt \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(j\omega)^T d\omega = \|F(s)\|_2^2, \quad (4.48)$$

sendo

$$z(s) = F_l(P, K) w(s). \quad (4.49)$$

Como o problema do controle ótimo H_2 consiste em encontrar um controlador estabilizante K que minimize

$$\|F(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(j\omega)^T d\omega}; \quad F = F_l(P, K), \quad (4.50)$$

fica demonstrado que minimizando a norma H_2 , minimiza-se a potência do sinal de erro do sistema que tenha como entrada o ruído branco com intensidade unitária. Isso significa minimizar o valor quadrático médio ou RMS de z .

4.4 Estratégia de Controle MPC

O controle MPC se refere a uma classe de algoritmos de controle automático que controlam a resposta futura de um sistema através do uso de seu modelo matemático. Além disso, o MPC permite a inclusão de restrições operacionais, as quais são consideradas no cálculo da ação de controle, obtida através da minimização de uma função de custo.

A Figura 4.6 ilustra a implementação básica do algoritmo do MPC. A cada instante de tempo, o controlador utiliza o modelo do sistema e as medições atuais para calcular uma sequência futura de ações de controle que leve a saída em direção ao valor de referência. Essa sequência é definida ao longo de um intervalo denominado horizonte de controle. Com base nessa sequência, o controlador prediz a evolução futura do sistema ao longo de um período maior, chamado horizonte de predição, avaliando assim o comportamento esperado da saída e verificando o cumprimento das restrições impostas.

O problema de controle no MPC consiste, portanto, em determinar uma sequência de ações que minimize uma função de custo, sujeita à dinâmica do processo e às possíveis restrições nas variáveis manipuladas e controladas. Embora toda a sequência ótima seja calculada, somente a primeira ação de controle é aplicada ao sistema. No instante seguinte, as variáveis do processo são novamente medidas e um novo problema de otimização é resolvido, agora com uma condição inicial atualizada e com o horizonte deslocado para frente no tempo. Esse procedimento, no qual a previsão é recalculada continuamente e o horizonte é movido a cada passo, caracteriza o chamado controle de horizonte móvel (RHC — *Receding Horizon Control*).

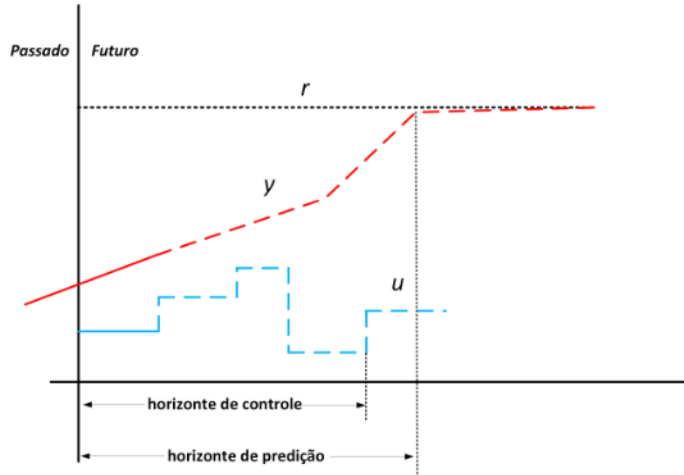


Figura 4.6 – Esquema de implementação dos algoritmos MPC. Fonte: [Autor]

De acordo com Camacho e Bordons (2007), em geral, os algoritmos MPC comercialmente disponíveis são baseados em modelos lineares e formulados para minimizar uma função de custo linear–quadrática, definida ao longo de um horizonte de predição h_p e um horizonte de controle h_c . A forma mais comum dessa função de custo é

$$\begin{aligned}
 J_m = & \sum_{j=1}^{h_p} \left(\hat{y}(k+j|k) - r(k+j|k) \right)^T Q_m \left(\hat{y}(k+j|k) - r(k+j|k) \right) \\
 & + \sum_{i=0}^{h_c} \Delta u(k+i|k)^T R_m \Delta u(k+i|k),
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

sujeita a

$$-\Delta u_{\min} \leq u(k+i|k) - u(k+i-1|k-1) \leq \Delta u_{\max}, \quad \forall k \tag{4.52}$$

$$u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \quad \forall k \tag{4.53}$$

$$y_{\min} \leq y(k) \leq y_{\max}, \quad \forall k \tag{4.54}$$

onde $\hat{y}(k+i|k)$ é o valor previsto da saída, considerando o efeito das ações de controle futuras, $r(k+i|k)$ é o valor de referência, $\Delta u(k+i|k)$ é o incremento nas entradas, com Δu_{\max} sendo o limite máximo e Δu_{\min} o limite mínimo, u_{\max} e u_{\min} são os limites máximos e mínimos das entradas, y_{\max} e y_{\min} são os limites máximos e mínimos das saídas, e Q_m e R_m são matrizes diagonais de ponderação das saídas e dos incrementos nas entradas, respectivamente.

De forma simplificada, adotando as entradas desconhecidas de ruído branco como iguais a zero, (*i.e.* $E\{w(t)\} = 0$), o modelo do sistema em espaço de estados e discretizado no tempo é representado por

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}. \quad (4.55)$$

Como na função custo 4.51 são considerados os incrementos na ação de controle u , o modelo do sistema em 4.55 é modificado em função de $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ para

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u(k), \quad (4.56)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Desta forma, pode-se definir uma nova representação adotando como vetor de estados $\bar{x}(k) = [x(k) \quad u(k-1)]$:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = M\bar{x}(k) + N\Delta u(k) \\ y(k) = Q\bar{x}(k) \end{cases}, \quad (4.58)$$

em que M , N e Q são definidas a partir das matrizes A , B e C .

Computando de forma iterativa 4.58 ao longo do horizonte de predição, chega-se à expressão utilizada para cálculo das predições da saída em cada instante de tempo:

$$\bar{y}(k+j) = QM^j x(k) + \sum_{i=0}^{j-1} QM^{j-i-1} N\Delta u(k+i). \quad (4.59)$$

Como pode ser observado, as predições em cada instante dependem dos valores atuais de todos estados do sistema. Na prática, as saídas mensuráveis do sistema correspondem a somente parte dos estados ou a uma combinação linear destes. Com isso, torna-se necessário um observador de estados na estrutura do MPC.

Esse é o caso do MPC disponibilizado pelo Matlab[®], que implementa o filtro de Kalman para estimação de estados (BEMPORAD *et al.*, 2004). Uma observação importante é que, analisando-se a função de custo, pode-se verificar que para um sistema linear, sem restrições e com os horizontes de predição e de controle tendendo ao infinito, o MPC é equivalente ao controle LQR, ou ao LQG, quando utilizado com um observador de estados.

Em relação aos valores das correntes de base i_{01} e i_{02} , o manual do sistema de referência (MOMENTS, 1995) informa apenas a corrente correspondente ao canal de controle na direção x , adotada como $i_{01} = 0,5A$. Inicialmente, esse mesmo valor foi aplicado ao canal de controle na direção y ; contudo, durante os testes realizados no simulador, constatou-se que tal valor não permitia a estabilização do sistema. Esse comportamento é atribuído à atuação da força peso nessa direção.

Dessa forma, a corrente i_{02} foi então calculada de modo a gerar uma força de sentido oposto à força peso e de mesma magnitude, possibilitando a compensação desse efeito e a viabilização do controle. Assim, aplicando a equação 2.21, obteve-se:

$$mg = k\left(\frac{i_{02}}{x}\right)^2 \rightarrow i_{02} = x\sqrt{mg/k} \approx 1,2A. \quad (5.1)$$

Entretanto, durante os testes realizados no simulador, verificou-se que o valor da corrente definido como $i_{02} = 1,5A$ proporcionou um desempenho mais efetivo do controle nesse canal. Por esse motivo, tal valor foi adotado como corrente de base para o controle na direção y .

O segundo bloco do simulador realiza os cálculos dos deslocamentos medidos nos sensores a partir da posição do centro de massa, conforme as equações descritas em 3.17 e 3.18. Esses deslocamentos são então processados no terceiro bloco, que implementa a dinâmica do sensor de efeito Hall, dada pela equação descrita em 3.23. O resultado corresponde às quatro saídas do sistema, que são os deslocamentos dados em sinal de tensão.

Os sinais de saída são discretizados por meio de blocos ‘ZOH’ (*Zero-Order Hold*) com um período de amostragem T_s . Esse bloco, simplesmente, mantém o valor do sinal constante entre as amostras. Isso foi feito para permitir uma futura implementação prática dos controladores. O valor para o período de amostragem foi definido utilizando uma técnica que consiste em usar um T_s igual a um décimo da constante de tempo (τ) de maior valor entre os modos estáveis do sistema. O valor da constante de tempo τ é dado por

$$\tau = \frac{1}{|Re(\lambda)|}, \quad (5.2)$$

em que $Re(\lambda)$ é a parte real do autovalor correspondente ao modo estável com dinâmica mais lenta, que para este sistema é $\lambda = 0,1950 \times 10^3$. Assim, o período de amostragem utilizado foi definido em

$$T_s = \frac{\tau}{10} \approx 0,0005 \text{ s}. \quad (5.3)$$

A Figura 5.2 apresenta o modelo implementado com as 4 entradas de tensão das bobinas e as 4 saídas de tensão correspondentes aos deslocamentos medidos pelos

sensores.

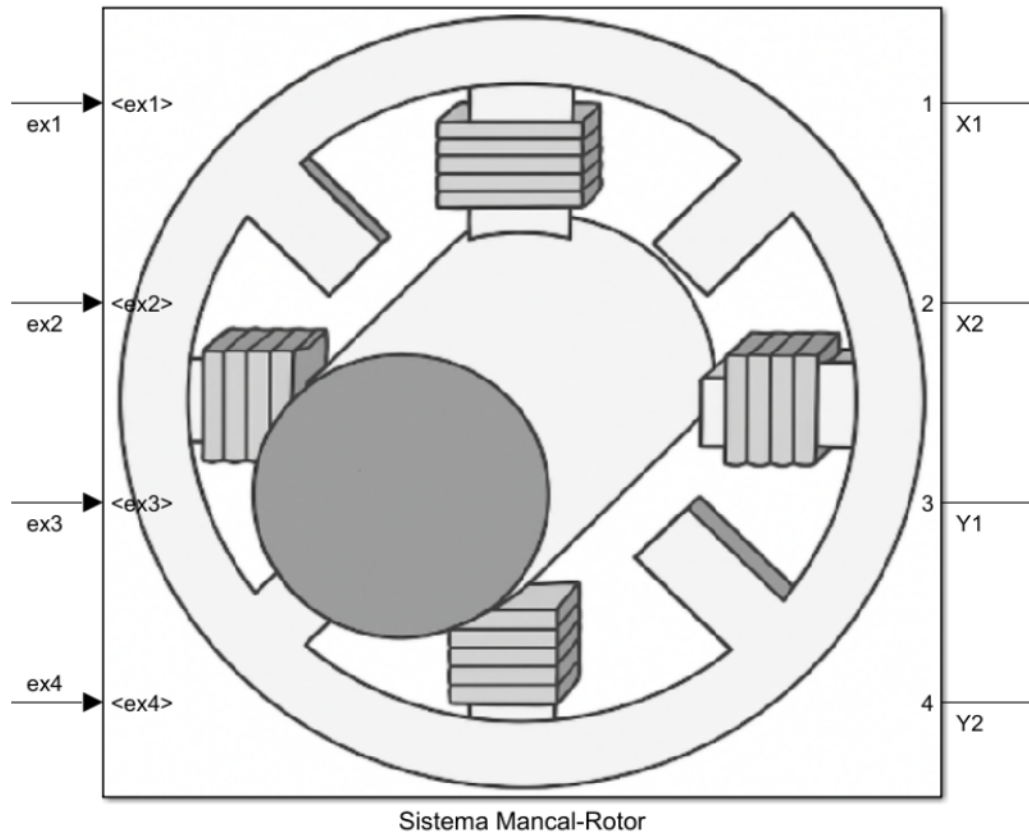


Figura 5.2 – Simulador do sistema. Fonte: [Autor]

O simulador foi configurado com o solver de passo fixo ode4 (Runge–Kutta de 4ª ordem) com passo igual a $T_s/5$. Essa configuração realiza cinco sub-passos de integração em cada período de amostragem, garantindo boa resolução do comportamento entre amostras do atuador elétrico e das dinâmicas mecânicas. Para a dinâmica mais rápida do sistema, dada pela constante de tempo elétrica $\tau_e = L/R \approx 0,22 \text{ ms}$, o passo adotado garante que ela é adequadamente resolvida na simulação, ao mesmo tempo que mantém custo computacional compatível com simulações extensas.

Para a implementação dos controladores, foi realizada a análise da controlabilidade e observabilidade do modelo linearizado conforme apresentado no Apêndice A. A verificação foi feita aplicando as funções ‘*ctrb()*’ e ‘*obsv()*’ às matrizes do sistema, que resultaram, respectivamente, nas matrizes de controlabilidade M_c e de observabilidade O_b . O posto foi calculado com a função ‘*rank()*’, cujo resultado mostrou que ambas matrizes possuem posto completo, ou seja, todos os estados são controláveis e observáveis.

Outro ponto importante para o projeto dos controladores é que foram consideradas as restrições operacionais do equipamento de referência MBC500, cujas entradas de tensão são limitadas em $\pm 6 \text{ V}$ e a velocidade limitada a 15000 rpm (rotações por minuto), conforme manual de instruções (MOMENTS, 1995). Para o entreferro de 0,0004

m, foi estabelecido que as variações no deslocamento não poderiam ultrapassar 50% desse valor, correspondente a 1,2 V na saída do sensor. Esse foi o limite considerado para a definição das amplitudes dos sinais de referência e perturbações utilizadas para testes com os controladores. Cabe destacar que, por serem baseados no modelo linearizado do sistema, o desempenho dos controladores pode ser comprometido para operação com grandes variações em torno da posição de referência.

A Tabela 5.1 apresenta as restrições aplicadas aos estados e entradas do sistema que foram utilizadas nos processos de sintonia dos controladores.

Tabela 5.1 – Restrições para estados e entradas Fonte: [Autor]

Tipo	Variáveis	Restrições
Estados	x_0, y_0	$\pm 0,0002$ [m]
	\dot{x}_0, \dot{y}_0	$\pm 0,1$ [m/s]
	ψ, θ	$\pm 0,001$ [rad]
	$\dot{\psi}, \dot{\theta}$	± 1 [rad/s]
	$i_{x_1}, i_{x_2}, i_{y_1}, i_{y_2}$	± 1 [A]
Entradas	$e_{x_1}, e_{x_2}, e_{y_1}, e_{y_2}$	± 6 [V]

5.2 Implementação do Controlador H_∞

Para o projeto do controlador H_∞ é utilizado o método da sensibilidade mista S/T/KS, que consiste em moldar essas funções de transferência para adequar a resposta do controlador aos diferentes objetivos através, respectivamente, das funções peso W_1 , W_2 e W_3 . Conforme apresentado na Seção 4.2, a função S é usada quando o objetivo é rastreamento de referência ou rejeição a perturbações, que são sinais de baixas frequências. A função T serve para suprimir ruídos de alta frequência e aumentar a robustez a incertezas do modelo, mas também para fazer a saída acompanhar a referência. Já a função KS permite limitar o esforço de controle e, conseqüentemente, evitar saturação dos atuadores.

Para as funções peso, é sugerido em Skogestad e Postlethwaite (2005) a adoção de funções de transferência na forma de filtros de primeira ordem estáveis e de fase não mínima, sendo W_1 um filtro passa-baixa para S e W_3 um filtro passa-alta para a função T. Os filtros W_1 e W_3 possuem a seguinte estrutura:

$$W_1 = \frac{1}{M_1} \frac{s + w_1 M_1}{s + w_1 A}, \quad (5.4)$$

$$W_3 = \frac{1}{M_3} \frac{s M_3 + w_3}{A s + w_3}, \quad (5.5)$$

em que $A \ll 1$ é o parâmetro que define o ganho nas faixas de frequência de interesse em cada caso, w_1 e w_3 são as larguras de faixa correspondentes e M_1 e M_3 os valores de pico.

É possível ainda utilizar um filtro de segunda ordem para W_3 , caso se deseje uma atenuação mais rápida das altas frequências (20 dB/década \rightarrow 40 dB/década). Para KS, a função peso W_2 pode ser definida como um ganho constante, que é suficiente para representar a penalização do esforço de controle. Por serem 4 saídas, os pesos são aplicados utilizando-se matrizes diagonais.

O ajuste dos parâmetros das funções peso corresponde ao processo de sintonia do controlador. O parâmetro A define o nível de desempenho exigido em baixas frequências; valores menores de A impõem maior ganho do controlador nessa faixa e, portanto, reduzem o erro em regime permanente. O parâmetro $M_{1,3}$ está relacionado ao limite superior admissível para o pico das funções S e T; ajustes em M permitem controlar o sobressinal da resposta. Já a frequência w define a largura de faixa sobre a qual o desempenho deve ser garantido: no caso de w_1 , valores menores tornam a resposta do sistema mais lenta a variações, enquanto valores maiores produzem resposta mais rápida.

O primeiro passo consistiu em determinar w_1 . Para isso, foi analisada a resposta em frequência da planta por meio da decomposição em valores singulares (Figura 5.3). Adotou-se como referência a frequência na qual o maior valor singular do sistema cruza 0 dB (ganho igual a 1), pois acima desse valor os erros são naturalmente atenuados. Nesse caso, a frequência correspondente foi $w_b = 115,3$ rad/s.

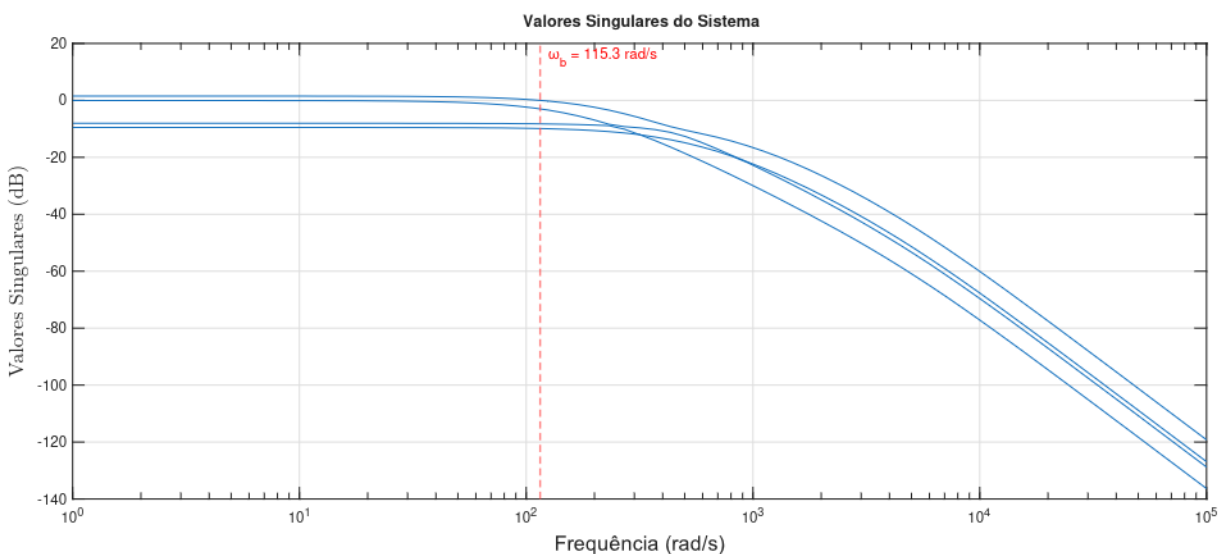


Figura 5.3 – Valores singulares do sistema. Fonte: [Autor]

Esse valor de w_1 corresponde, portanto, à largura de banda para o controle, onde espera-se que $|S(JW)|$ atinja o valor de $1/\sqrt{2} = 0,707 (\approx -3dB)$. Para o parâmetro A , foi escolhido um valor muito menor que 1 ($A = 1 \times 10^{-5}$), de modo que o erro estacionário

fosse mínimo. O valor de M , idealmente, seria 1, o que corresponderia a norma H_∞ de S ou T igual ou menor que 1. Como já mencionado, isso é praticamente impossível na prática. Foi definido, então, o valor $M = 2$ para os testes iniciais. Para as larguras de faixa, na maioria dos casos, w_1 é igual a w_3 , que por sua vez são iguais à frequência (w_c) em que a resposta do sistema em malha aberta (L) cruza 0 dB.

Os testes foram realizados diretamente com o simulador do sistema. Para a implementação do controlador, foi utilizado o bloco *Discrete State-Space* do Matlab/Simulink®, onde foram inseridas as matrizes do controlador calculado com a função ‘*hinfsyn*’. A Figura 5.4 apresenta o controlador integrado ao simulador para realização dos testes. Às entradas de controle do canal y , foi adicionado um valor de *offset* igual 0,5 V, definido empiricamente para compensar a queda inicial nas saídas Y_1 e Y_2 causada pela força peso.

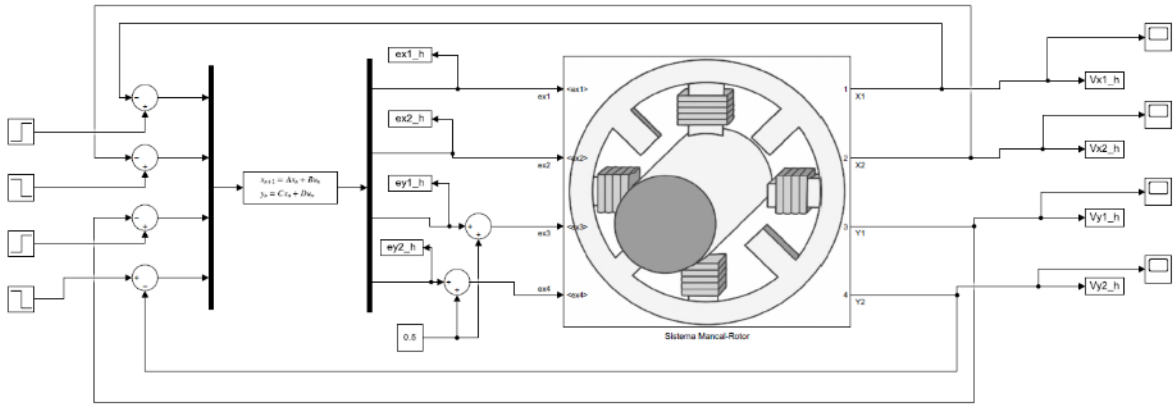


Figura 5.4 – Controlador H_∞ integrado ao simulador do sistema. Fonte: [Autor]

Para a primeira simulação, adotando $w_1 = w_3$, a frequência w_c foi cerca de 10 vezes maior que w_1 . A partir dessa constatação, os ajustes foram feitos sempre considerando $w_1 < w_c < w_3$, além da limitação das entradas de controle de ± 6 V e a variação máxima de deslocamento de $\pm 1,2$ V. Após várias simulações, a melhor sintonia encontrada para os quatro canais de controle foi

$$W_{1_final} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_1 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$W_{2_final} = \begin{bmatrix} 0,002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$W_{3_final} = \begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

com

$$W_1 = \frac{1}{3} \frac{s + 345,9}{s + 115,3 \times 10^{-5}}, \quad (5.9)$$

$$W_3 = \frac{1}{3} \frac{3s + 2875}{1 \times 10^{-5}s + 2875}, \quad (5.10)$$

em que $M = 3$, $A = 1 \times 10^{-5}$, $w_1 = 115,3$ rad/s e $w_3 = 2875$ rad/s. As Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 apresentam os formatos para as funções S, T e L. Como pode ser observado, o controlador foi capaz de moldar as funções S e T com base nas respectivas funções peso, W_1 e W_3 . As frequências w_1 e w_3 ficaram com valores próximos ao que foi especificado, com $w_1 = 112$ rad/s quando $|S(jw)| = -3dB$ e $w_3 = 2868,9$ rad/s quando $|T(jw)| = -3dB$.

A validação final do controlador foi realizada aplicando sinais de referência do tipo degrau com amplitude de 0,4 V e perturbações do tipo impulso com amplitude de 0,2 V e duração de 0,00125 s nas saídas. O desempenho do controlador pode ser verificado nas Figuras 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11.

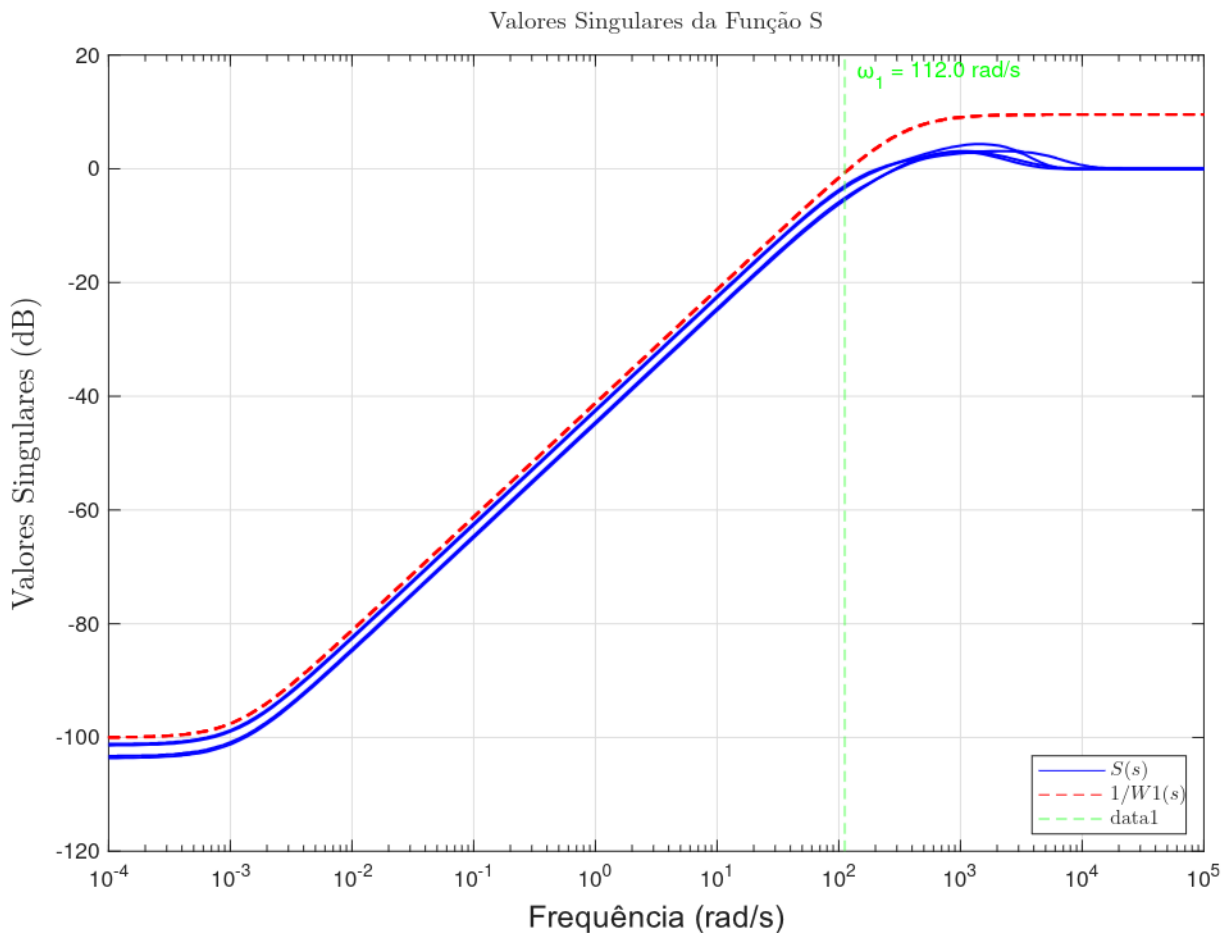


Figura 5.5 – Valores singulares de S e $1/W_1$. Fonte: [Autor]

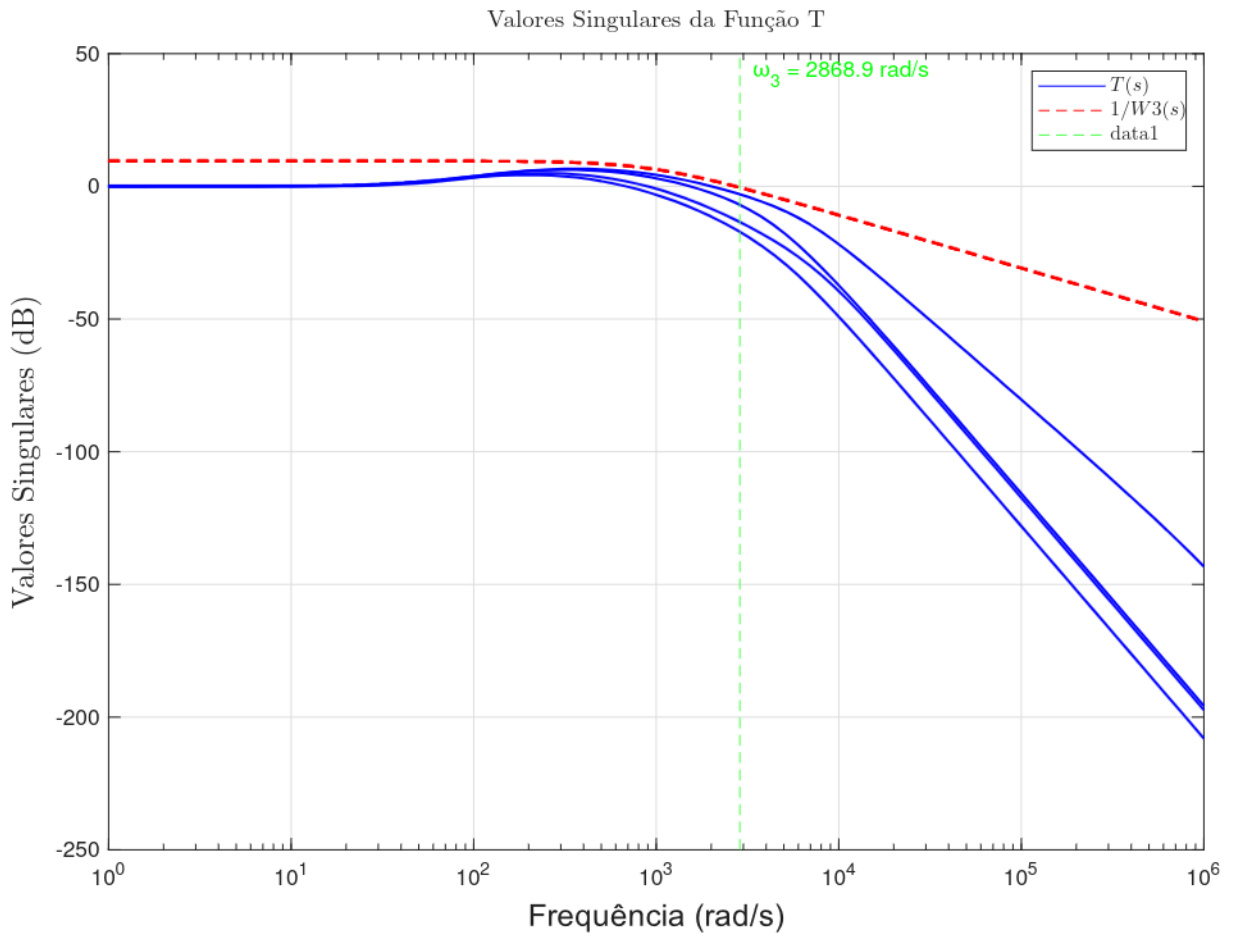


Figura 5.6 – Valores singulares de T e $1/W_3$. Fonte: [Autor]

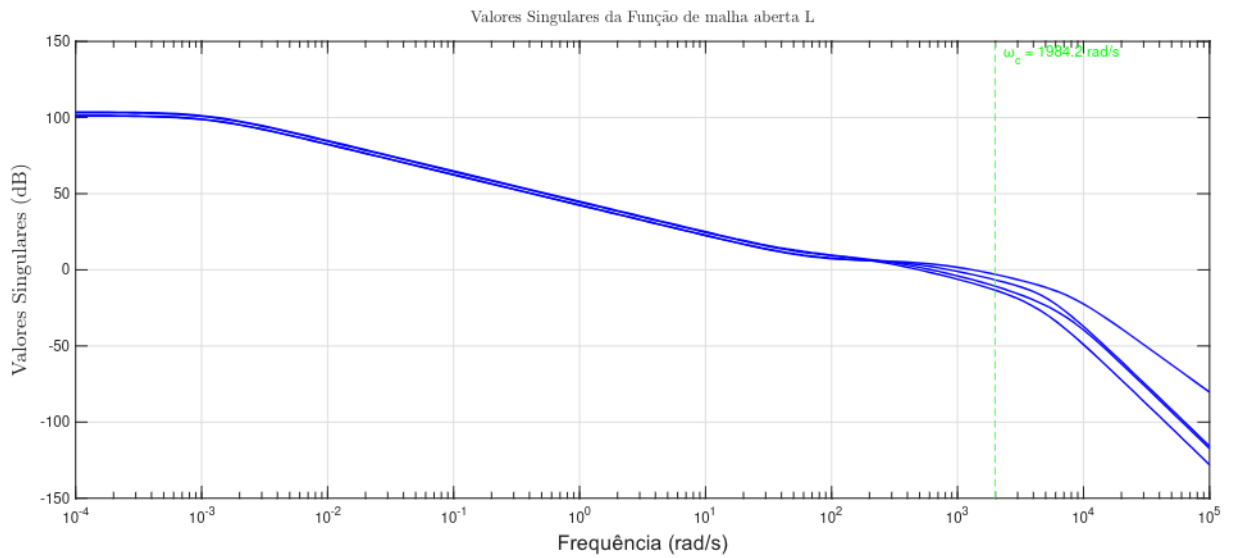


Figura 5.7 – Valores singulares da função de malha aberta L. Fonte: [Autor]

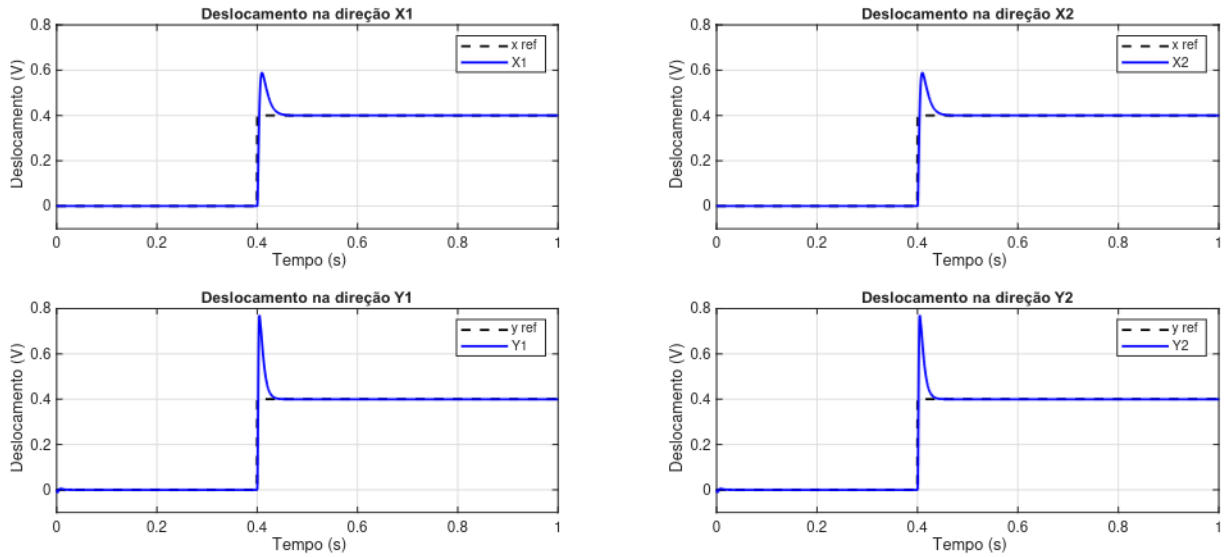


Figura 5.8 – Deslocamentos sob controle H_∞ para variação na referência. Fonte: [Autor]

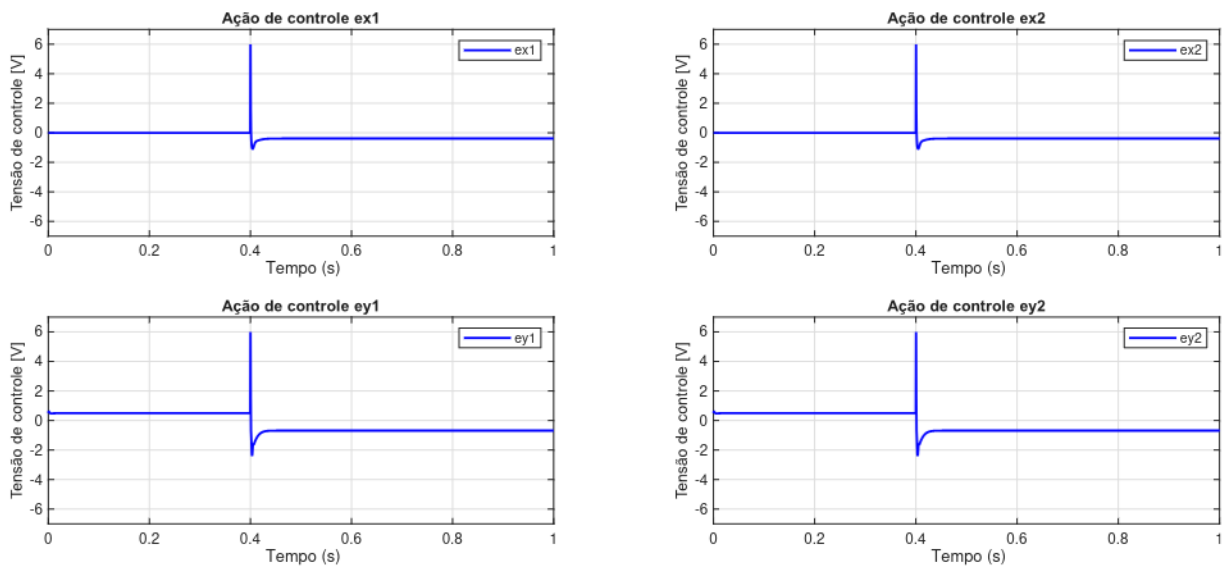


Figura 5.9 – Ações do controlador H_∞ para variação na referência. Fonte: [Autor]

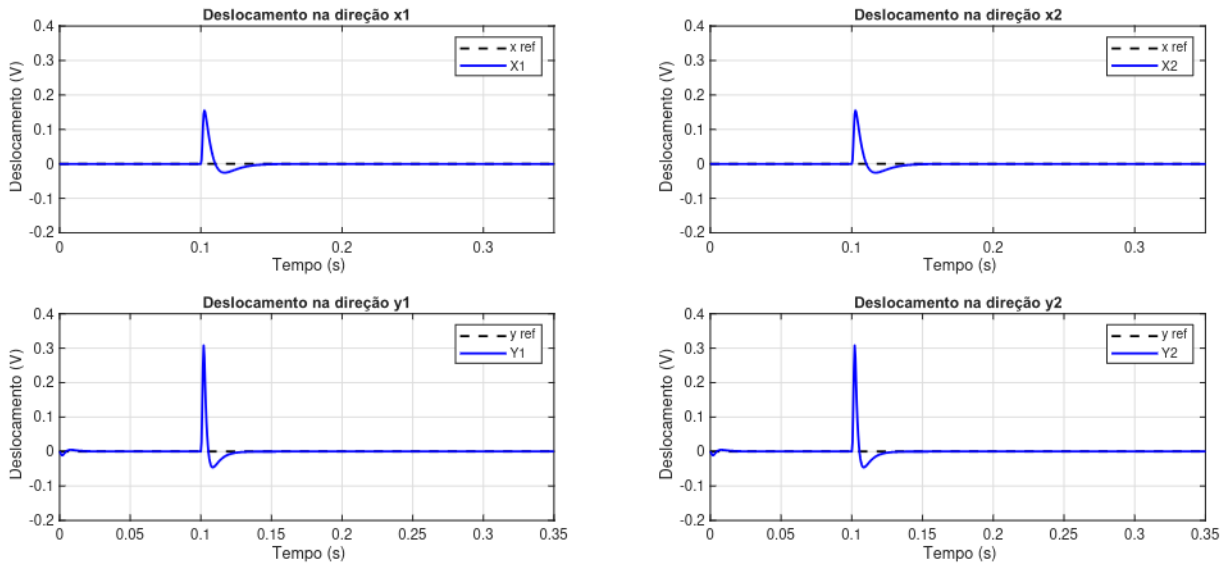


Figura 5.10 – Deslocamentos sob controle H_∞ sob perturbação. Fonte: [Autor]

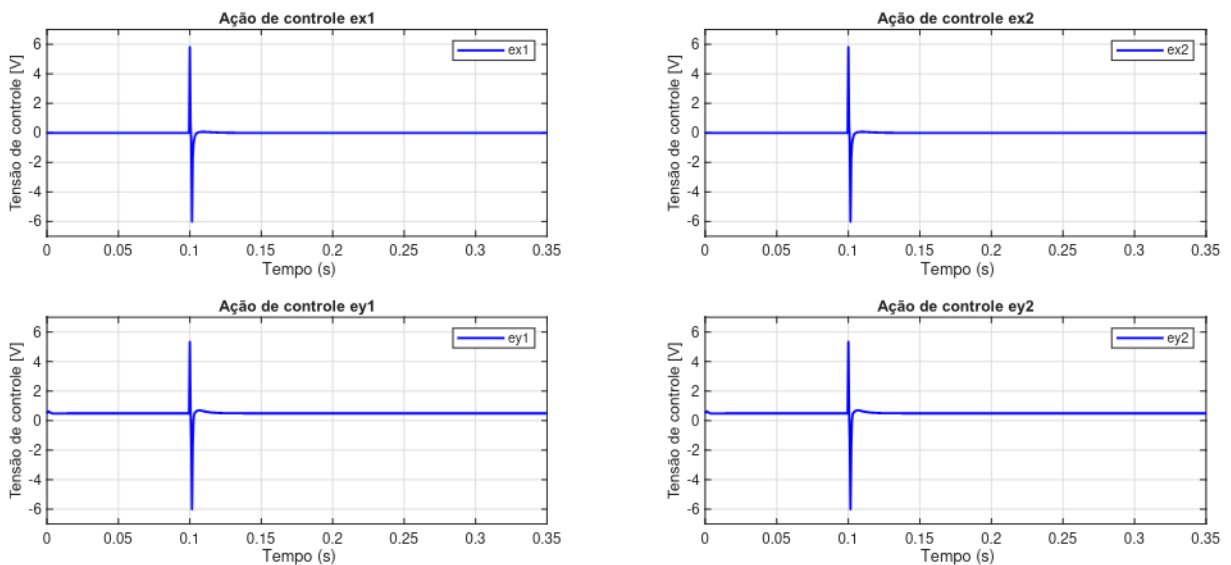


Figura 5.11 – Ações do controlador H_∞ sob perturbação. Fonte: [Autor]

Nos dois casos, o controlador apresentou um comportamento bem agressivo, com rápidas repostas tanto para a alteração de posição do eixo no rastreamento da referência quanto na rejeição à perturbação. Verifica-se, contudo, variações elevadas, atingindo 50% de sobressinal nas respostas na direção y , e esforço de controle considerável, chegando ao limite de saturação. Essa agressividade é esperada em controladores baseados na norma H_∞ , pois essa abordagem considera o pior caso possível e, por isso, tende a exigir ações de controle mais intensas. Entretanto, destaca-se que os limites operacionais não foram violados.

5.3 Implementação do Controlador LQG

O processo de implementação do controlador LQG começou pela montagem da arquitetura, integrando o simulador do sistema ao filtro de Kalman e aos ganhos dos estados e dos erros, a serem calculados pelo controlador LQR do Matlab®. Os erros correspondem aos estados adicionados para inclusão da ação integral, conforme descrito na Seção 4.3.1. Assim como para o controlador H_∞ , foi adicionado um valor de *offset* igual a 0,5 volts às entradas de controle do canal y . A Figura 5.12 apresenta a estrutura do controlador LQG integrado ao simulador do sistema utilizado para realização dos testes.

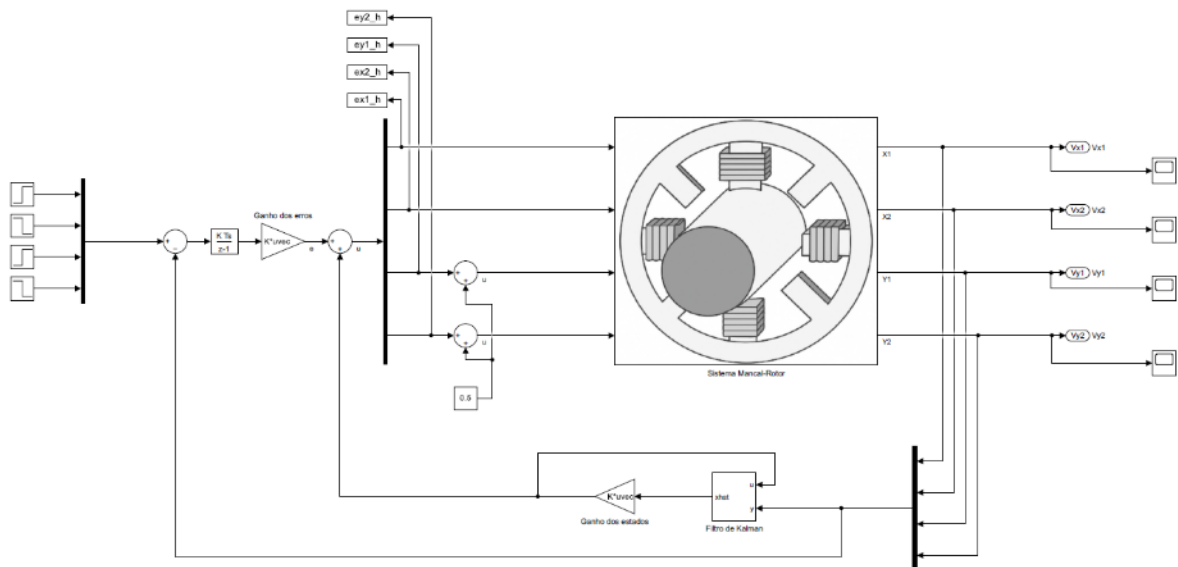


Figura 5.12 – Controlador LQG integrado ao simulador do sistema. Fonte: [Autor]

A sintonia do controlador LQG é relativamente mais simples que a do controlador H_∞ . Essencialmente, ela se concentra no ajuste das matrizes Q e R , que definem os pesos de ponderação dos estados e das entradas de controle no problema LQR. Na matriz Q , valores maiores atribuem maior importância ao respectivo estado, penalizando variações indesejadas. Já a matriz R regula o esforço de controle: valores menores indicam pouca penalização sobre a ação de controle, permitindo respostas mais agressivas; valores maiores impõem maior restrição ao atuador, resultando em ações mais suaves.

Em geral a sintonia fina dessas matrizes é realizada por tentativa e erro, mas existe um método, proposto por Arthur E. Bryson Jr. (BRYSON, 2018), que é muito utilizado para se obter uma estimativa inicial para os pesos. Conhecido como critério de Bryson, ele fornece uma sintonia inicial bem fundamentada, que depois pode ser refinada por tentativa e erro. A ideia consiste em definir os pesos com base nas variações máximas admitidas para cada estado e entrada.

Para cada estado x_i , escolhe-se um valor máximo permitido e o peso corres-

pondente na matriz Q é definido como sendo

$$Q_{ii} = \frac{1}{x_{i,max}^2}. \quad (5.11)$$

Isso significa que quanto menor for o valor máximo aceitável de um estado, maior será a penalização sobre ele. Para as entradas de controle u_i funciona da mesma forma, escolhe-se o valor máximo admissível e o peso correspondente é dado por

$$R_{ii} = \frac{1}{u_{i,max}^2}. \quad (5.12)$$

Dessa forma, se um atuador possui um limite baixo, sua entrada deve ser penalizada mais fortemente. Em resumo, estados que não podem variar muito recebem pesos maiores. Entradas com baixa capacidade física também ganham maior peso. Assim, o projeto do controlador fica diretamente relacionado às limitações reais do sistema.

O sistema em análise, com a inclusão da ação integral, possui 16 estados, que correspondem aos 12 originais mais os 4 das integrais dos erros (x_{e1} , x_{e2} , x_{e3} , x_{e4}). Para os estados originais, foram consideradas as restrições apresentadas na Tabela 5.1, que permaneceram constantes durante o processo de sintonia. Com isso, o ajuste se resumiu a encontrar limites de erro e os pesos de ponderação para as entradas.

Para o filtro de Kalman, foi utilizado o bloco já disponível no Matlab®. Sua configuração consistiu, basicamente, na definição das matrizes de covariância W e V , as quais foram tratadas como parâmetros de sintonia, uma vez que os ruídos de processo e de medição não são considerados nos cenários de teste. Desta forma, elas deixam de representar covariâncias físicas reais e passam a expressar o nível de confiança atribuído ao modelo e às medições, com valores baixos indicando alta confiança na respectiva fonte de informação. Assim, optou-se por atribuir a ambas o valor 1×10^{-8} , de modo a garantir que o estimador utilizasse predominantemente a dinâmica do modelo completo.

Após algumas simulações, buscando o compromisso entre velocidade da resposta e menor sobressinal, adotou-se como limite para o erro $x_{e_{max}} = [0.5; 0.5; 0, 1; 0, 1]$, que são as variações máximas permitidas em relação a cada saída. Para as entradas, foi adotado ponderação igual para todas. Aplicando esses limites e as restrições da Tabela 5.1, foram obtidas as seguintes matrizes de ponderação:

$$Q = \text{diag} \left(2, 5 \times 10^7, 100, 2, 5 \times 10^7, 10^3, 10^6, 1, 10^6, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 100, 100 \right),$$

$$R = \text{diag} \left(2, 8 \times 10^{-2}, 2, 8 \times 10^{-2}, 2, 8 \times 10^{-2}, 2, 8 \times 10^{-2} \right).$$

Da mesma forma que na implementação do controle H_∞ , a validação final do controlador foi realizada aplicando sinais de referência do tipo degrau com amplitude de

0,4 V e perturbações do tipo impulso com amplitude de 0,2 V e duração de 0,00125 s nas saídas. As Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16 apresentam as saídas e as ações de controle correspondentes.

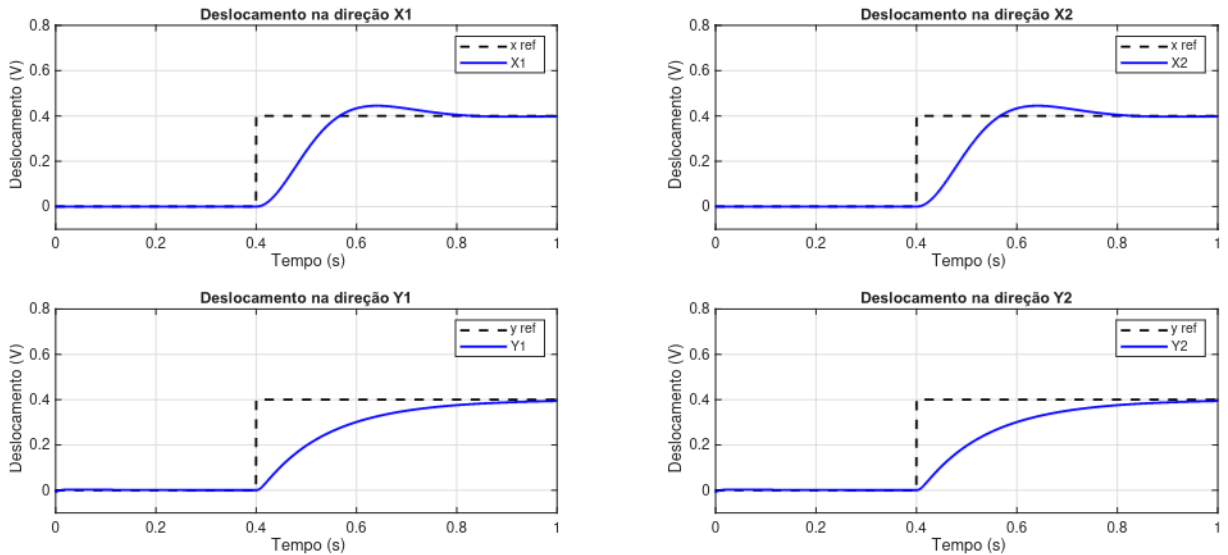


Figura 5.13 – Deslocamentos sob controle LQG para variação na referência. Fonte: [Autor]

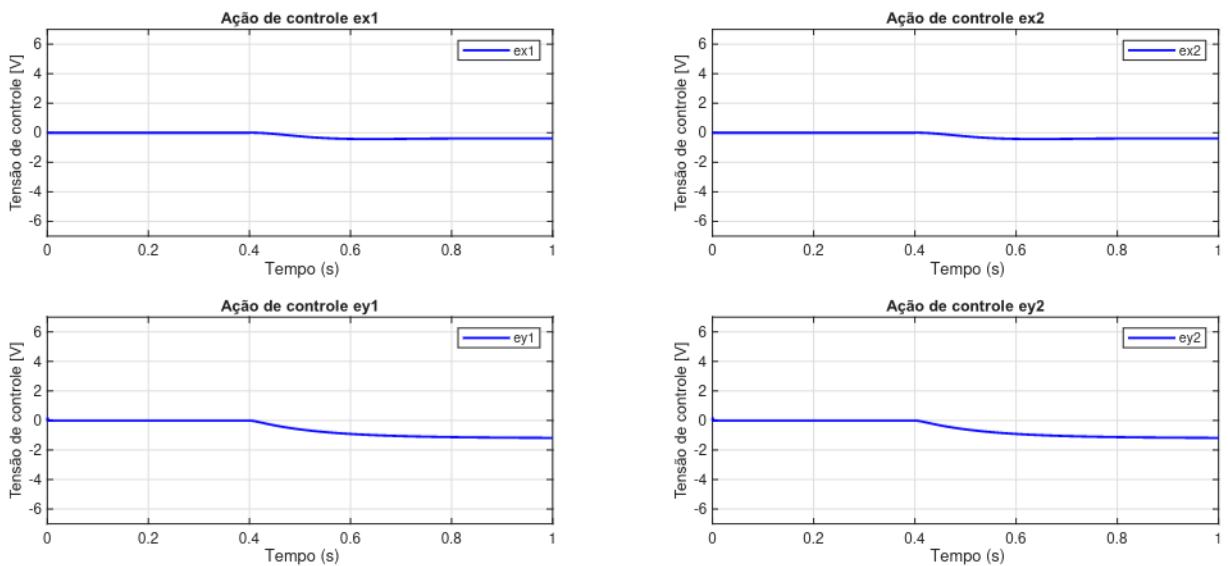


Figura 5.14 – Ações do controlador LQG para variação na referência. Fonte: [Autor]

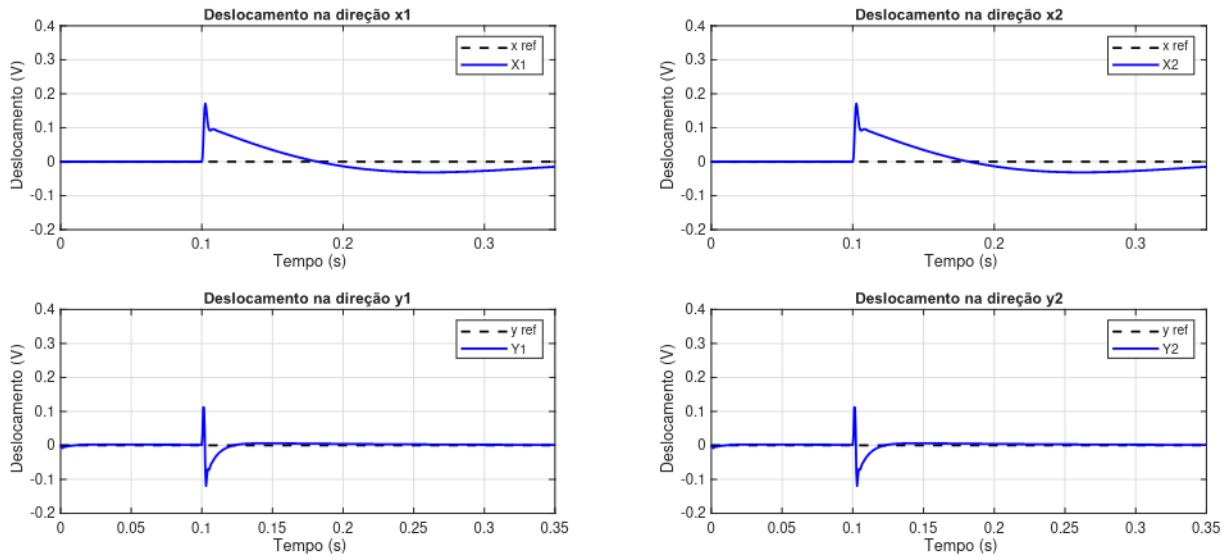


Figura 5.15 – Deslocamentos sob controle LQG sob perturbação. Fonte: [Autor]

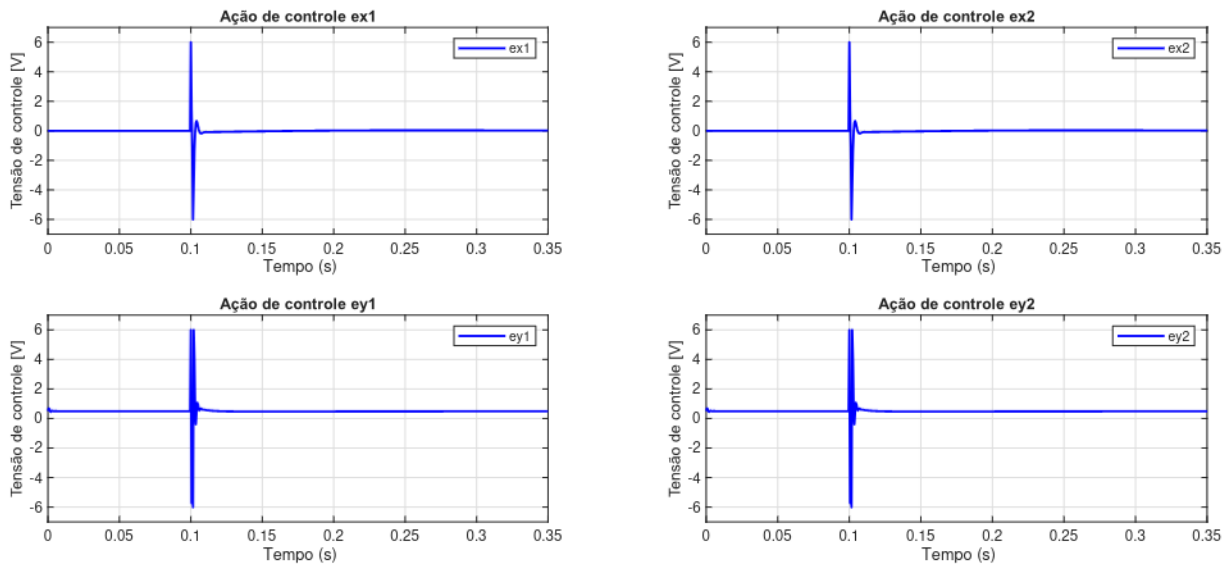


Figura 5.16 – Ações do controlador LQG sob perturbação. Fonte: [Autor]

Os resultados mostram uma ação bem moderada do controlador, mesmo com a aplicação de baixas penalizações das ações de controle no teste de rastreamento de referência. Como consequência, a resposta do sistema foi mais suave, sem variação brusca e com baixo sobressinal na direção x e uma resposta superamortecida na direção y. Isso pode ser justificado pois, diferentemente do controlador H_{∞} que age com base no pior caso, o controlador LQG é otimizado para desempenho médio, o que resulta em ações de controle mais graduais e energeticamente mais econômicas. Esse padrão de resposta pode ser verificado também no trabalho de Ahad *et al.* (2021), em que o controlador LQG apresenta um esforço de controle consideravelmente menor quando comparado com o clássico PID.

No teste sob perturbação, o controlador se mostrou mais enérgico, atingindo

o limite de saturação no esforço de controle, o que resultou em bom desempenho em relação ao sobressinal, principalmente na direção y . Contudo, apesar da boa resposta inicial, demorou a estabilizar as saídas, com destaque para a resposta obtida na direção x .

5.4 Implementação do Controlador MPC

A Figura 5.17 apresenta o controlador MPC integrado ao simulador do sistema. Assim como para as outras duas estratégias de controle, a implementação do controlador foi realizada utilizando o bloco disponibilizado no Matlab/Simulink® que implementa o algoritmo descrito na Seção 4.4. Cabe destacar que neste caso, essa ferramenta facilita sobremaneira o processo de integração, pois, além de concentrar todos os parâmetros de ajuste do controlador, incluindo o offset de 0,5 V nas entradas e_{y1} e e_{y2} , recebe diretamente os sinais de saída do simulador e os sinais de referência.

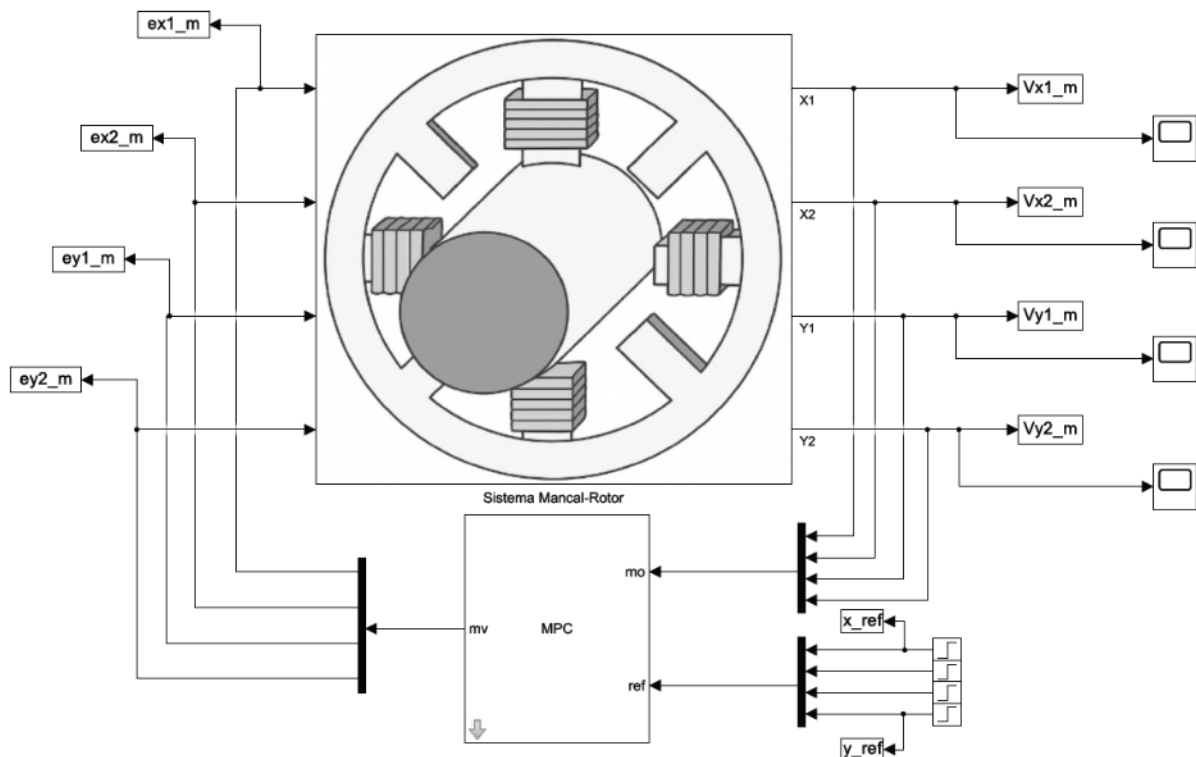


Figura 5.17 – Controlador MPC integrado ao simulador do sistema. Fonte: [Autor]

Com relação aos parâmetros de sintonia do MPC, eles se resumem ao tempo de amostragem (T_s), ao horizonte de predição (h_p), ao horizonte de controle (h_c) e às matrizes de ponderação para as variáveis controladas (Q_m), as manipuladas (U_m) e para os incrementos nas manipuladas (R_m). Apesar de não haver um método consagrado que garanta uma operação eficiente do sistema, existem técnicas simples que auxiliam a escolher valores que podem ser usados inicialmente nos experimentos e posteriormente ajustados.

O intervalo de amostragem (T_s) foi o mesmo aplicado na discretização do simulador do modelo, em que adotou-se um valor igual a um décimo da constante de tempo (τ) de maior valor entre as funções de transferência do processo. Para o horizonte de predição (h_p), geralmente toma-se como valor inicial a metade do valor do horizonte do modelo, que corresponde ao número de amostras necessárias para a estabilização da resposta de um processo após a aplicação de um degrau. Contudo, h_p pode vir a ser menor, dependendo da sintonia do controlador. Com base nos resultados obtidos com o controlador H_∞ , a resposta do sistema foi estabilizada em um período de 0,05s. Dividindo metade desse valor pelo período de amostragem, obtém-se um valor inicial para o horizonte de predição igual a 50.

É importante ressaltar que o horizonte de predição deve ser suficiente para o MPC capturar o comportamento transiente principal, antecipar variações rápidas do sistema e prever o efeito das restrições aplicadas. Contudo, deve ser observado o compromisso entre desempenho e custo computacional, pois um horizonte de predição maior poderia melhorar marginalmente o resultado só que a um custo computacional que comprometeria sua aplicação em tempo real, uma vez que a cada intervalo de amostragem o MPC resolve um problema quadrático.

Em relação ao horizonte de controle (h_c), este deve ser obrigatoriamente menor ou igual a h_p . Na maioria dos casos, costuma-se adotar um h_c baixo, na faixa de $1 \leq h_c \leq h_p/3$, com o objetivo de reduzir variáveis de otimização e consequentemente o custo computacional. Já para as matrizes de pesos, Serrano (2020) apresenta recomendações específicas para cada uma delas com base em características do sistema, como estabilidade em malha aberta, quantidade de variáveis controladas e de manipuladas. Nesta implementação, foram consideradas algumas orientações para definição de valores iniciais, como no caso da matriz de pesos para os incrementos Δu , que por padrão tem valor igual a 0,1. Contudo, os ajustes seguintes foram realizados por tentativa e erro. Após algumas simulações, chegou-se aos valores de sintonia para os parâmetros do controlador listados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Parâmetros de sintonia do controlador MPC. Fonte: [Autor]

Parâmetro	Valor
Período de amostragem T_s	0,5 ms
Horizonte de predição h_p	30
Horizonte de controle h_c	3
Matriz Q_m	$diag(10^4 \ 10^4 \ 10^4 \ 10^4)$
Matriz R_m	$diag(10^{-2} \ 10^{-2} \ 10^{-2} \ 10^{-2})$
Matriz U_m	$diag(10^{-1} \ 10^{-1} \ 10^{-1} \ 10^{-1})$

Assim como para os outros dois controladores, a validação final do MPC foi realizada aplicando sinais de referência do tipo degrau com amplitude de 0,4 V e perturbações do tipo impulso com amplitude de 0,2 V e duração de 0,00125 s nas saídas. Os resultados finais obtidos estão apresentados nas Figuras 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21.

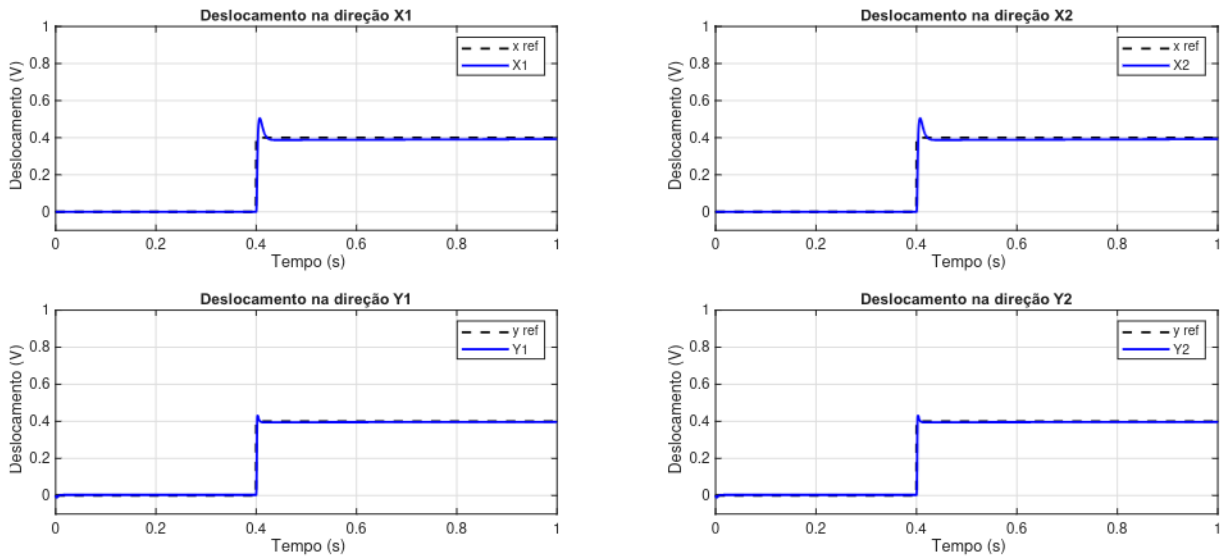


Figura 5.18 – Deslocamentos sob controle MPC para variação na referência. Fonte: [Autor]

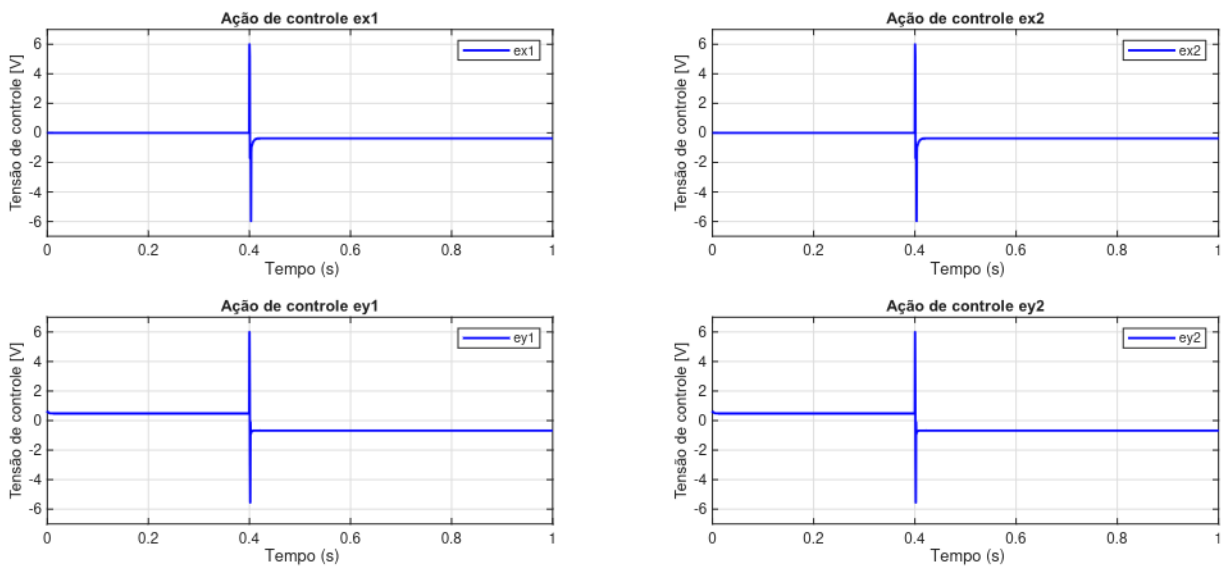


Figura 5.19 – Ações do controlador MPC para variação na referência. Fonte: [Autor]

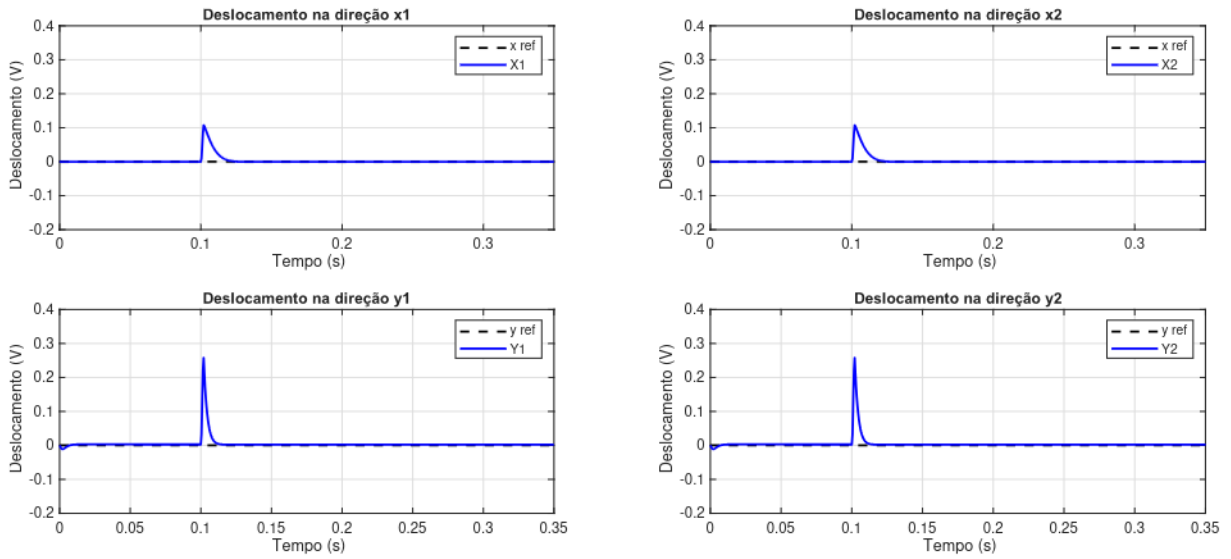


Figura 5.20 – Deslocamentos sob controle MPC sob perturbação. Fonte: [Autor]

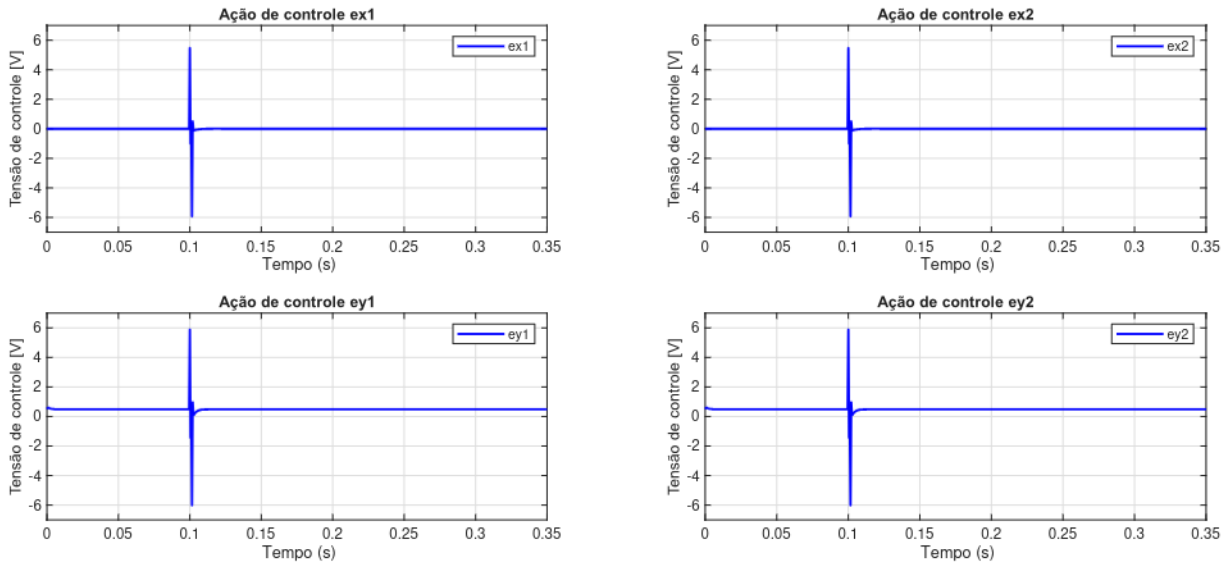


Figura 5.21 – Ações do controlador MPC sob perturbação. Fonte: [Autor]

Os resultados mostram o bom desempenho do controlador MPC em ambos os testes. Para o rastreamento da referência, o sistema apresentou respostas rápidas e sobressinais baixos, com destaque para a resposta na direção y , cujo sobressinal foi menor que na direção x , apesar da influência da força peso. Esse resultado pode estar relacionado à capacidade do MPC de prever a resposta futura do sistema com base em seu modelo e tomar ação de forma antecipada. Essa capacidade já não é verificada no teste de rejeição à perturbação, quando o sobressinal na direção y é maior que na direção x . Entretanto, o controlador se mostrou capaz de rapidamente estabilizar as saídas, agindo de forma enérgica mas com o esforço de controle dentro dos limites de operação.

6 Ensaios e Análise de Resultados

Este capítulo apresenta os testes comparativos entre as três estratégias de controle, bem como a análise dos resultados obtidos com base nos critérios de desempenho definidos no Apêndice B, que indicam de forma quantitativa como cada estratégia responde em termos de tempo de resposta, erro total e esforço de controle.

Os ensaios são realizados em dois modos de operação: modo rastreamento ou servo, no qual sinais de referência são aplicados e avalia-se a capacidade do controlador em conduzir as saídas para acompanhar esses sinais; e modo regulatório, em que perturbações são introduzidas no sistema e analisa-se o desempenho do controlador em manter as saídas próximas ao valor de referência ($x = 0, y = 0$).

Os testes são realizados na velocidade máxima de operação do sistema de referência MBC500, igual a 15 000 rpm (500 rad/s), e sob as mesmas restrições observadas durante o processo de validação dos controladores. Essas restrições consistem na tensão aplicada às bobinas limitada a ± 6 V e na variação máxima de deslocamento de 2×10^{-4} m (1,2 V medidos pelo sensor de posição), correspondente à metade do entreferro.

6.1 Ensaios em Modo Rastreamento

6.1.1 Testes em Modo Rastreamento

O modo rastreamento, em que o sistema é forçado a seguir uma referência predefinida, é utilizado para simular condições de operação reais em que o sistema precisa se ajustar a mudanças rápidas e precisas. Ele possibilita explorar o comportamento dos controladores em diferentes cenários, permitindo identificar limites operacionais que garantam segurança e eficiência. Além disso, esse tipo de teste permite uma avaliação abrangente da dinâmica do sistema em termo de resposta transitória e estacionária, por meio de fatores como tempo de subida, tempo de acomodação, sobressinal e erro em regime estacionário.

O primeiro teste em modo rastreamento consistiu em aplicar o mesmo sinal de referência utilizado para a validação dos controladores, que foi do tipo degrau com variação positiva de 0,4 V no tempo $t=0,4$ s. Esse teste teve como objetivo principal permitir uma comparação direta do comportamento transitório das saídas controladas pelas três estratégias analisadas. As respostas do sistema e as ações de controle correspondentes estão apresentadas nas Figuras 6.1 e 6.2, respectivamente.

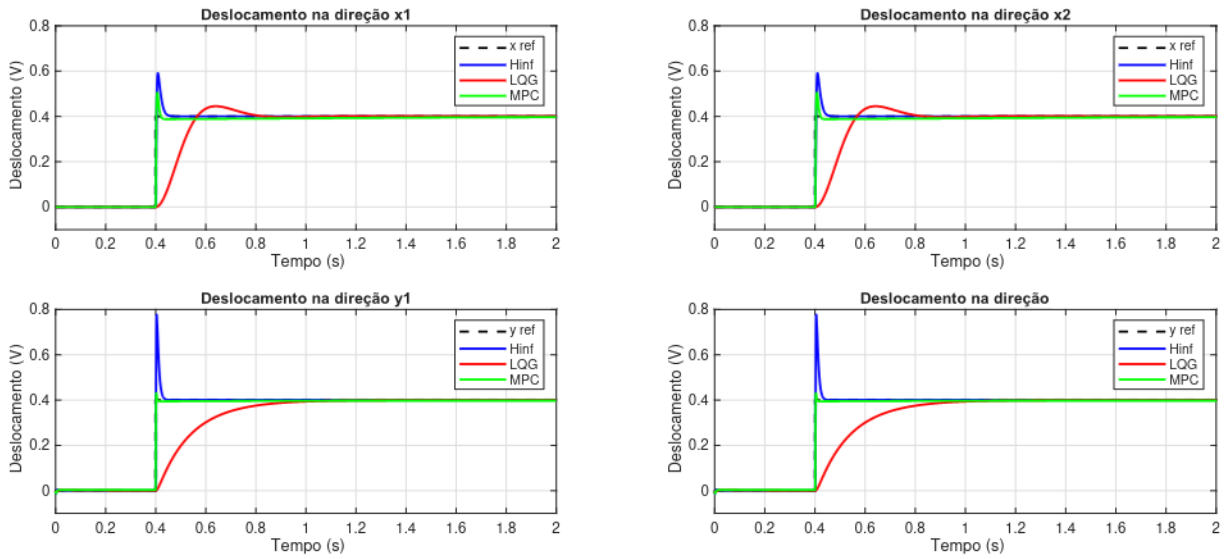


Figura 6.1 – Deslocamentos para referência degrau de 0,4V. Fonte: [Autor]

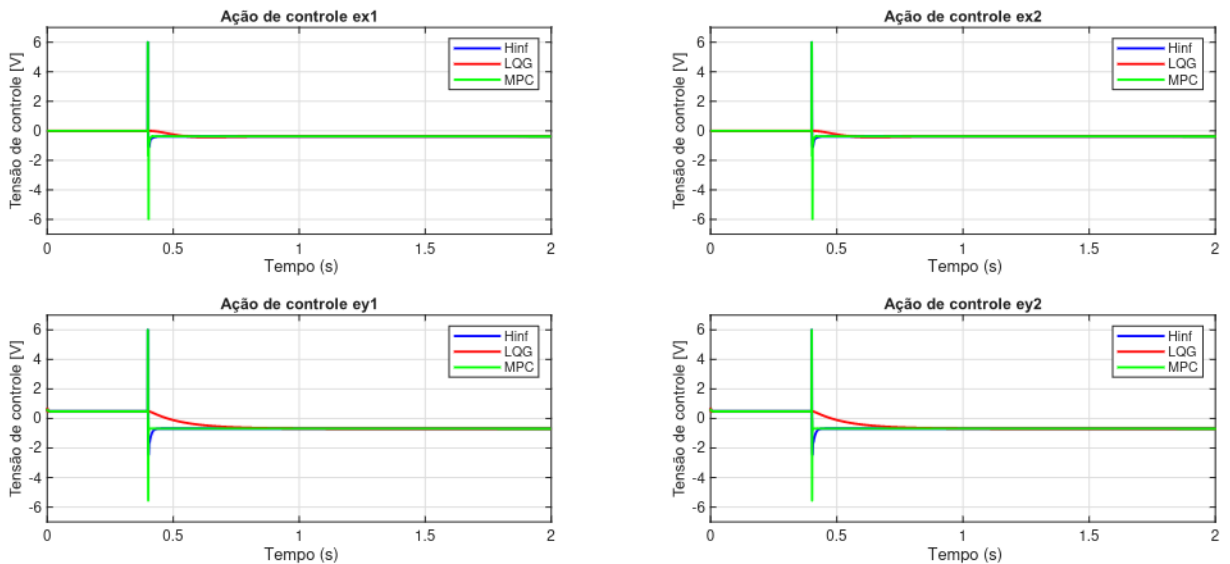


Figura 6.2 – Ações de controle para referência degrau de 0,4V. Fonte: [Autor]

Em seguida, aplicou-se o mesmo sinal, porém com amplitude negativa, com o objetivo de avaliar o comportamento das respostas do sistema no sentido oposto do deslocamento. Esse teste teve como finalidade verificar a simetria da ação dos controladores, bem como identificar possíveis assimetrias dinâmicas ou não linearidades presentes no sistema. As respostas obtidas e as ações de controle correspondentes estão apresentadas nas Figuras 6.3 e 6.4, respectivamente.

O passo seguinte consistiu na combinação das duas variações da referência, com amplitudes positiva e negativa ($\pm 0,4$ V), em uma mesma simulação, resultando em um sinal do tipo escada com variação total de amplitude de 0,8 V e período de 2 s. De acordo com Morsi *et al.* (2020), esse tipo de referência constitui um teste particularmente desafiador para os controladores, pois, na prática, implica deslocar o rotor de

forma simétrica em torno do centro do entreferro nominal. Nessas condições, a ocorrência de sobressinais acentuados pode comprometer a segurança da operação, uma vez que deslocamentos excessivos aumentam o risco de contato mecânico entre o rotor e os polos do mancal magnético. As respostas do sistema e as ações de controle correspondentes são apresentadas, respectivamente, nas Figuras 6.5 e 6.6.

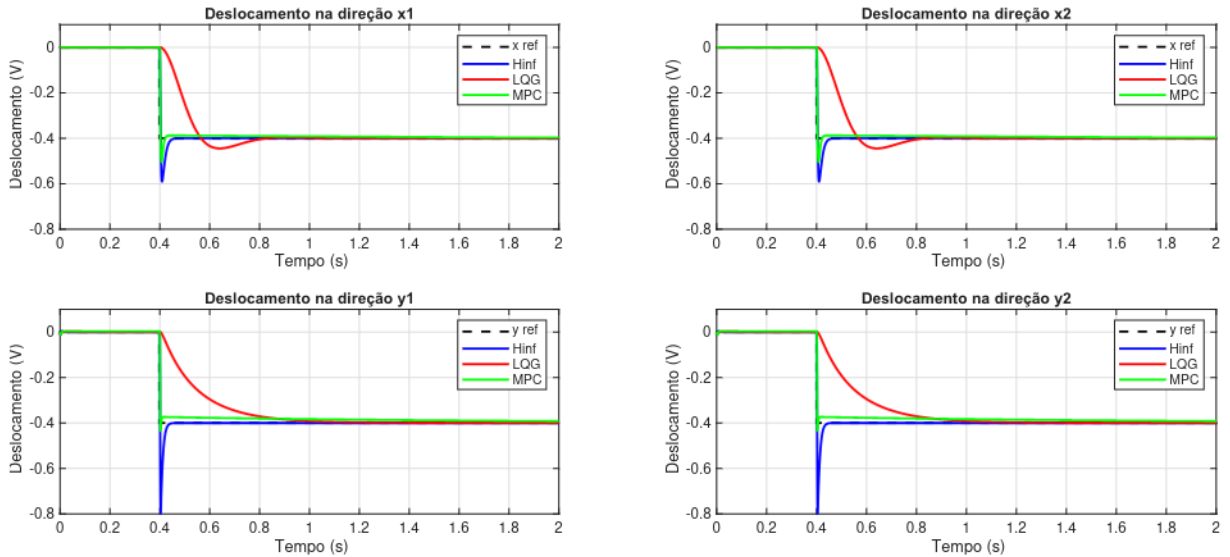


Figura 6.3 – Deslocamentos para referência degrau de -0,4V. Fonte: [Autor]

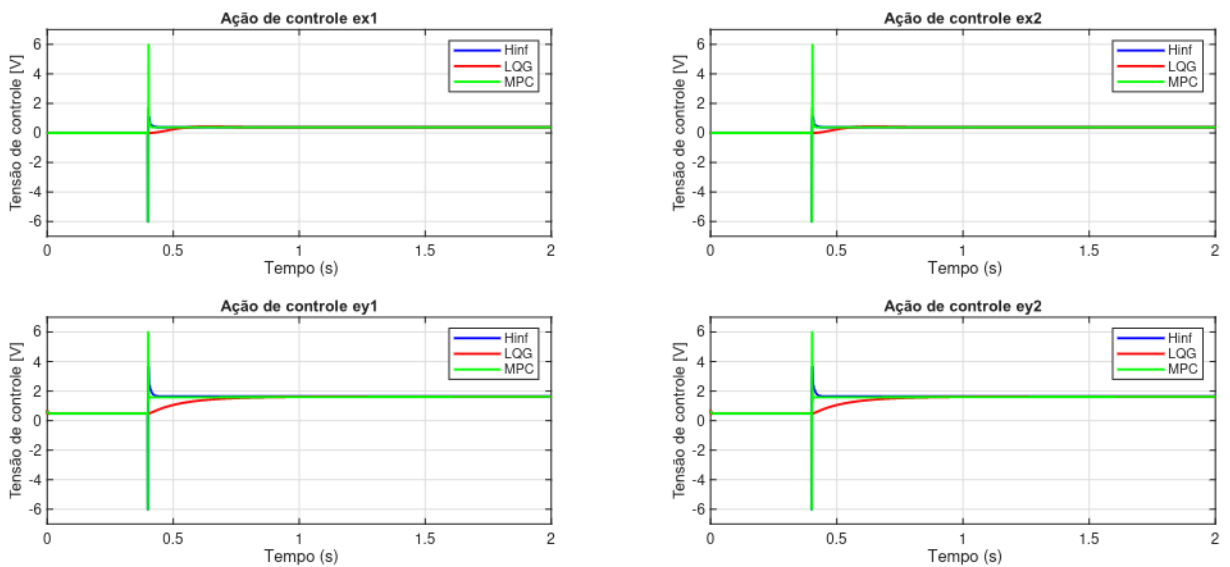


Figura 6.4 – Ações de controle para referência degrau de -0,4V. Fonte: [Autor]

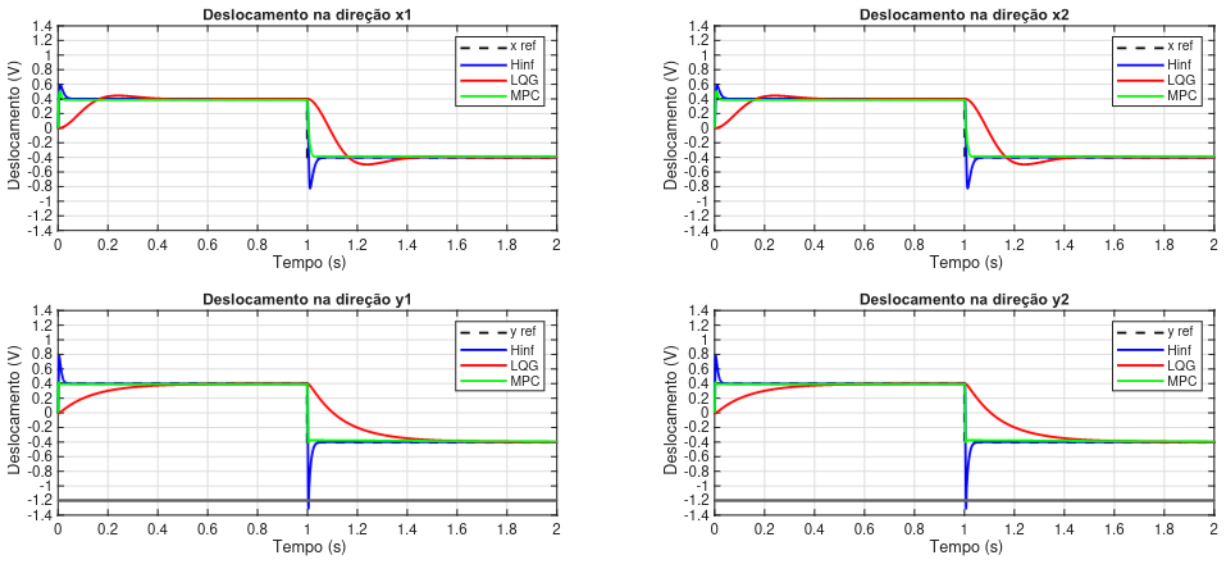


Figura 6.5 – Deslocamentos para referência escada de 0,4V. Fonte: [Autor]

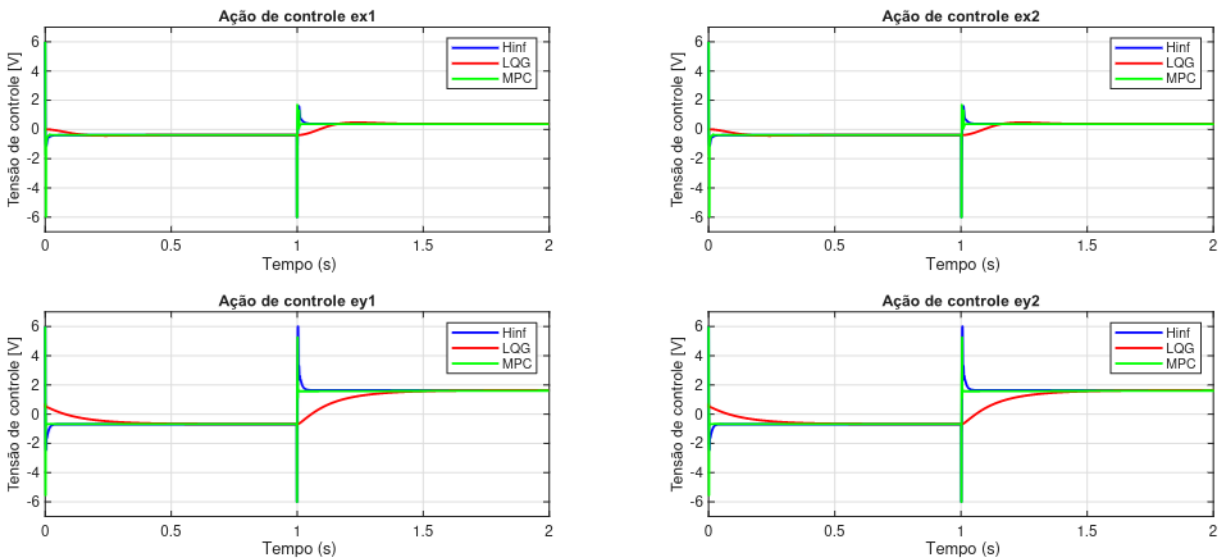


Figura 6.6 – Ações de controle para referência escada de 0,4V. Fonte: [Autor]

Como último teste de rastreamento, aplicou-se um sinal senoidal com amplitude de $\pm 1V$ e frequência de 1Hz de forma simultânea em todas as entradas. Conforme Morsi *et al.* (2020), esse tipo de ensaio tem como objetivo avaliar a capacidade dos controladores em lidar com os efeitos do acoplamento entre as saídas, especialmente em operação sob alta rotação. As respostas do sistema e as ações de controle correspondentes são apresentadas nas Figuras 6.7 e 6.8, respectivamente, permitindo analisar o desempenho das estratégias de controle quanto à precisão de rastreamento, defasagem, amplitude do erro e esforço de controle sob uma excitação periódica e acoplada.

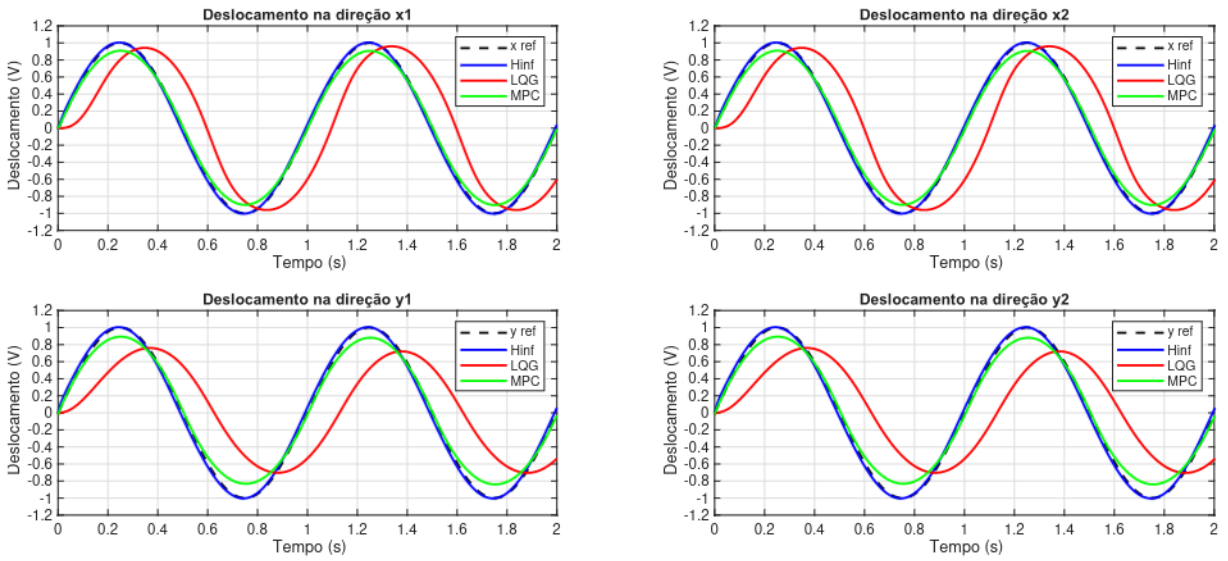


Figura 6.7 – Deslocamentos para referência senoidal de 1V. Fonte: [Autor]

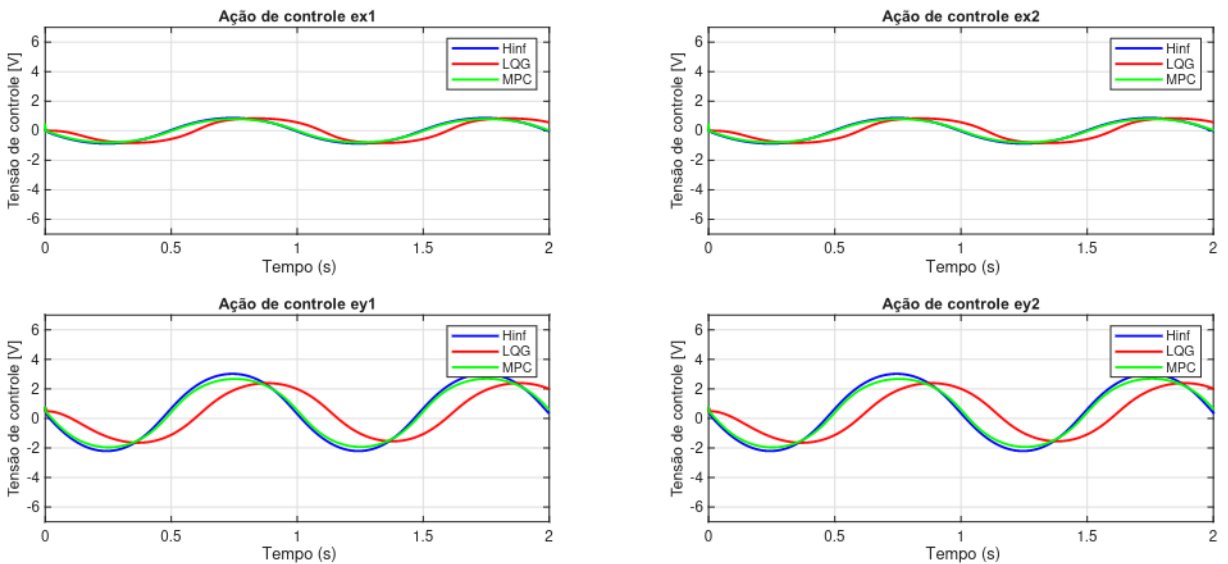


Figura 6.8 – Ações de controle para referência senoidal de 1V. Fonte: [Autor]

6.1.2 Discussão dos Resultados em Modo Rastreamento

De forma geral, os resultados atestaram a capacidade dos controladores em atuar nos quatro graus de liberdade com o mesmo padrão de resposta. Entretanto, observa-se uma diferença significativa na dinâmica de movimento nas direções x e y, a qual decorre principalmente da influência da força peso, considerada na modelagem do sistema. Essa diferença é evidenciada pelas respostas distintas dos controladores à essa dinâmica. Enquanto os controladores LQG e MPC suavizaram as respostas na direção y, o controlador H_∞ se mostrou muito mais agressivo, com um aumento significativo do sobressinal.

Essa característica do controlador H_∞ chama a atenção já no primeiro teste comparativo, quando aplicado a referência em degrau, pois as respostas geradas em todas as saídas possuem sobressinal consideravelmente maior comparado aos observados para os

controladores LQG e MPC. Uma análise quantitativa é possível aplicando-se os critérios de desempenho apresentados no Apêndice B. As Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 apresentam os valores calculados a partir dos resultados dos testes com referência tipo degrau, escada e senoidal. Foram considerados para análise somente os canais de controle x_1 e y_1 , uma vez que os outros dois são simétricos e possuem, portanto, os mesmos valores.

Tabela 6.1 – Índices de desempenho no modo rastreamento para degrau de 0,4 V. Fonte: [Autor]

Critério	Modo Rastreamento – Degrau 0,4 V					
	Direção x_1			Direção y_1		
	H_∞	LQG	MPC	H_∞	LQG	MPC
Tempo de subida [s]	0,0030	0,1100	0,0020	0,0010	0,3080	0,0010
Tempo de acomodação [s]	0,4455	0,7835	1,1000	0,4340	0,9655	0,4055
Sobressinal [%]	47,60	11,17	26,06	94,18	0,00	7,42
Valor de pico	0,5904	0,4447	0,5043	0,7767	0,4000	0,4297
Erro estacionário	0	0	0,0046	0	0	0,0017
IAE	0,002206	0,020959	0,007012	0,002434	0,029594	0,003644
ISE	0,000363	0,005234	0,000219	0,000588	0,006114	0,000103
ITAE	0,000915	0,010325	0,006971	0,000985	0,015955	0,003113
ITSE	0,000148	0,002327	0,000117	0,000239	0,002872	0,000046
RBEMCE	0,005342	0,023907	0,010106	0,009019	0,035436	0,010086
RBMSEMCE	0,003499	0,008182	0,003314	0,007173	0,011956	0,006545
VAR	0,002653	0,010584	0,002109	0,003367	0,012021	0,001429

Tabela 6.2 – Índices de desempenho no modo rastreamento para escada de $\pm 0,4$ V. Fonte: [Autor]

Critério	Modo Rastreamento – Escada $\pm 0,4$ V					
	Direção x_1			Direção y_1		
	H_∞	LQG	MPC	H_∞	LQG	MPC
Erro estacionário	0	0	0,0082	0	0,0017	0,0136
IAE	0,007623	0,064075	0,013675	0,007501	0,089072	0,012883
ISE	0,002364	0,026694	0,001520	0,003153	0,030975	0,000775
ITAE	0,005532	0,049158	0,012879	0,005163	0,072732	0,015890
ITSE	0,002023	0,022681	0,001357	0,002578	0,027108	0,000757
RBEMCE	0,011624	0,067727	0,017551	0,019388	0,098591	0,024292
RBMSEMCE	0,006365	0,030346	0,005396	0,015040	0,040495	0,012184
VAR	1,333016	0,300173	0,317872	1,245472	0,176431	0,101399

Tabela 6.3 – Índices de desempenho no modo rastreamento para referência senoidal de ± 1 V. Fonte: [Autor]

Critério	Modo Rastreamento – Senoidal ± 1 V					
	Direção x_1			Direção y_1		
	H_∞	LQG	MPC	H_∞	LQG	MPC
IAE	0,021744	0,343603	0,048216	0,032103	0,424457	0,069464
ISE	0,000627	0,155927	0,003390	0,001367	0,226713	0,007359
ITAE	0,021750	0,348084	0,048607	0,031850	0,431844	0,073002
ITSE	0,000628	0,160839	0,003459	0,001352	0,235013	0,008012
RBEMCE	0,027500	0,349355	0,053610	0,049751	0,437718	0,085580
RBMSEMCE	0,006384	0,161679	0,008783	0,019014	0,239974	0,023474
VAR	3,436744	1,149180	0,632061	6,181829	0,445645	0,244171

Em termos gerais, considerando-se tanto a resposta transitória quanto o regime estacionário, pode-se considerar que o controlador MPC apresentou o melhor desempenho global em ambas as direções analisadas. Os resultados obtidos com essa estratégia evidenciam um compromisso adequado entre velocidade de resposta, estabilidade e esforço de controle. Para as variações do tipo degrau e escada, o MPC apresentou os menores tempos de subida e de acomodação, além de menor variabilidade da resposta e maior eficiência energética, conforme indicado pelo índice RBMSEMCE.

Embora o MPC tenha apresentado um erro acumulado que impactou sua precisão absoluta e prejudicou quase todos os seus índices no teste com a referência senoidal, esse efeito não comprometeu significativamente o desempenho do controlador. Cabe destacar que o MPC foi o que apresentou nos dois primeiros testes os menores valores dos índices baseados no erro quadrático, especificamente ISE e ITSE, indicando uma redução mais eficiente da energia do erro ao longo do tempo.

Em segundo lugar, encontra-se o controlador H_∞ , que se destacou como a estratégia com melhor precisão, resultado do menor erro acumulado geral e que ficou evidente no acompanhamento da referência senoidal. Além disso, o H_∞ apresentou também bons resultados na resposta transitória, com tempos de subida e acomodação próximos aos observados para o MPC, o que reforça sua capacidade de rastreamento rápido e eficaz.

Entretanto, o principal ponto negativo associado ao controlador H_∞ refere-se ao elevado sobressinal, especialmente na direção y . Nesse eixo, a resposta atingiu valores próximos de 100% no teste com degrau e ultrapassou ligeiramente o limite de segurança de 1,2V no teste com referência em escada. Ressalta-se que essa margem foi atribuída nesta análise como critério comparativo, não correspondendo necessariamente a uma restrição

física do sistema. O intuito, porém, foi mostrar que esse aspecto pode ser crítico do ponto de vista operacional, pois sobressinais elevados podem comprometer a segurança do mancal magnético.

Esse aspecto, por sua vez, é o único critério no qual o controlador LQG se sobressaiu. Ele foi o que apresentou menor sobressinal em comparação às demais estratégias em todos os testes. Entretanto, nos demais critérios avaliados, o LQG apresentou desempenho muito inferior, caracterizando-se como o controlador mais lento, com maior erro acumulado e respostas transitórias prolongadas, o que limita sua aplicabilidade em cenários que exigem maior rapidez e precisão no rastreamento da referência.

6.2 Ensaios em Modo Regulatório

6.2.1 Testes em Modo Regulatório

Após a realização dos testes com os controladores em modo rastreamento, procedeu-se aos testes em modo regulatório, cujo foco principal é a rejeição de perturbações externas e a manutenção do rotor na posição de referência nominal. Nesse modo de operação, a referência permanece constante, e o sistema é submetido a excitações externas que simulam perturbações típicas do ambiente operacional de mancais magnéticos ativos.

Para esse estudo, foram aplicados sinais do tipo impulso às entradas do sistema, com o objetivo de representar perturbações transitórias de curta duração, tais como impactos, forças de processo ou distúrbios eletromagnéticos. Esse tipo de excitação constitui um teste particularmente rigoroso, uma vez que exige dos controladores uma rápida resposta corretiva, aliada à capacidade de amortecer os transientes induzidos e restabelecer o equilíbrio do rotor sem a ocorrência de sobressinais excessivos ou oscilações persistentes.

Os sinais do tipo impulso foram gerados a partir de um degrau de amplitude ajustável e duração de 0,00125 s, aplicado às saídas do sistema. As perturbações foram aplicadas de forma simultânea em ambas direções (x e y), com valores de amplitude crescentes, com o objetivo de avaliar tanto a capacidade de suportar os distúrbios sob os efeitos do acoplamento dinâmico entre os eixos do rotor quanto o limite aceitável antes da desestabilização do sistema. As respostas obtidas e as ações de controle correspondentes a cada teste estão apresentados nas figuras a seguir.

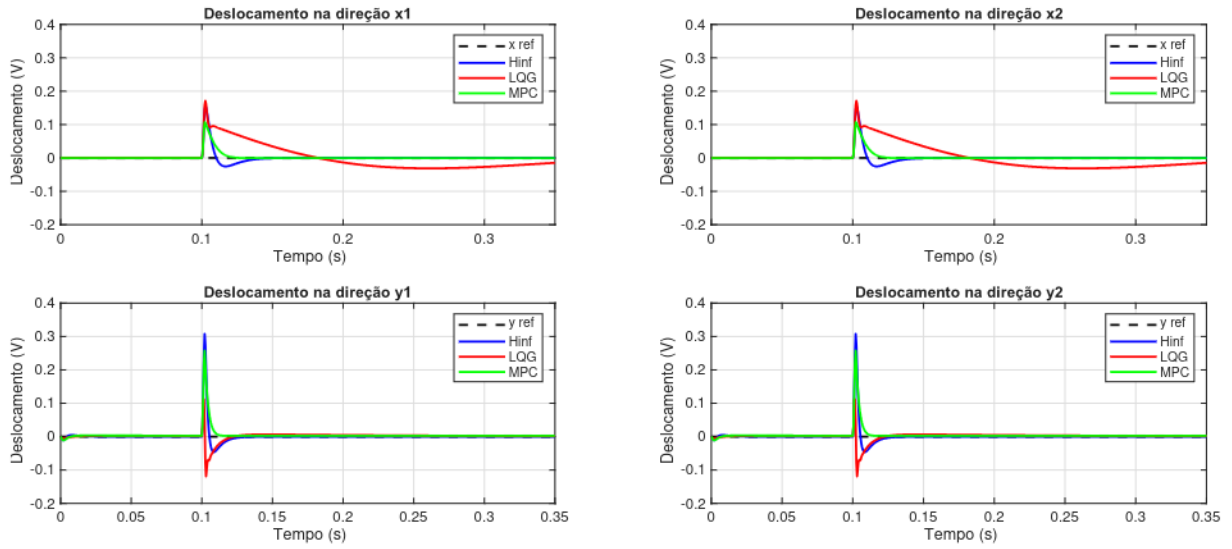


Figura 6.9 – Deslocamentos para perturbação tipo impulso de 0,2 V. Fonte: [Autor]

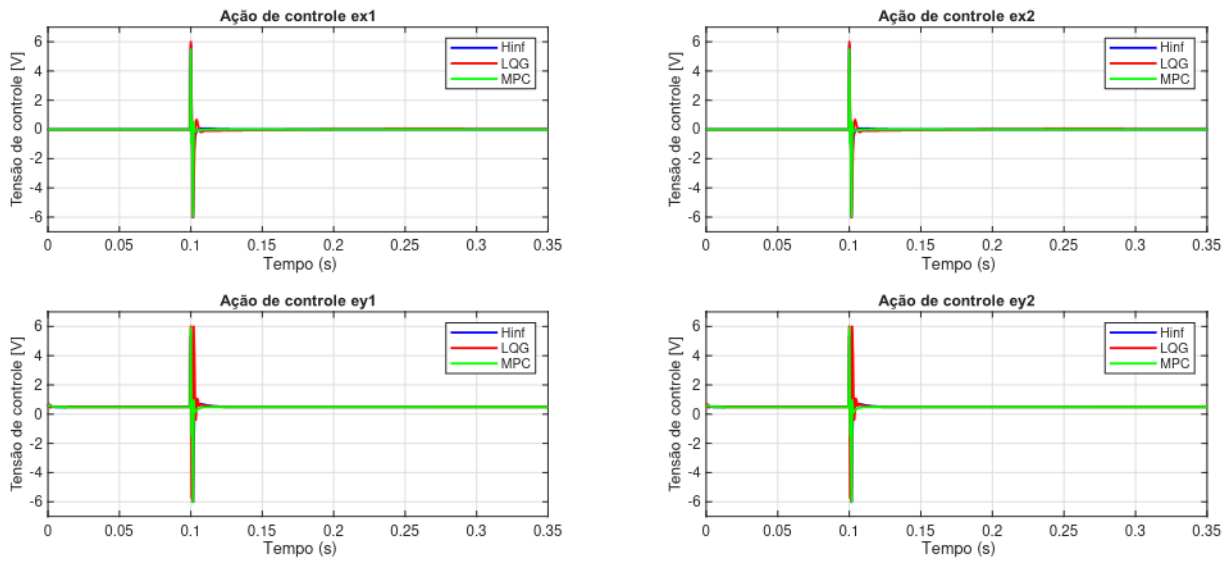


Figura 6.10 – Ações de controle para perturbação tipo impulso de 0,2 V. Fonte: [Autor]

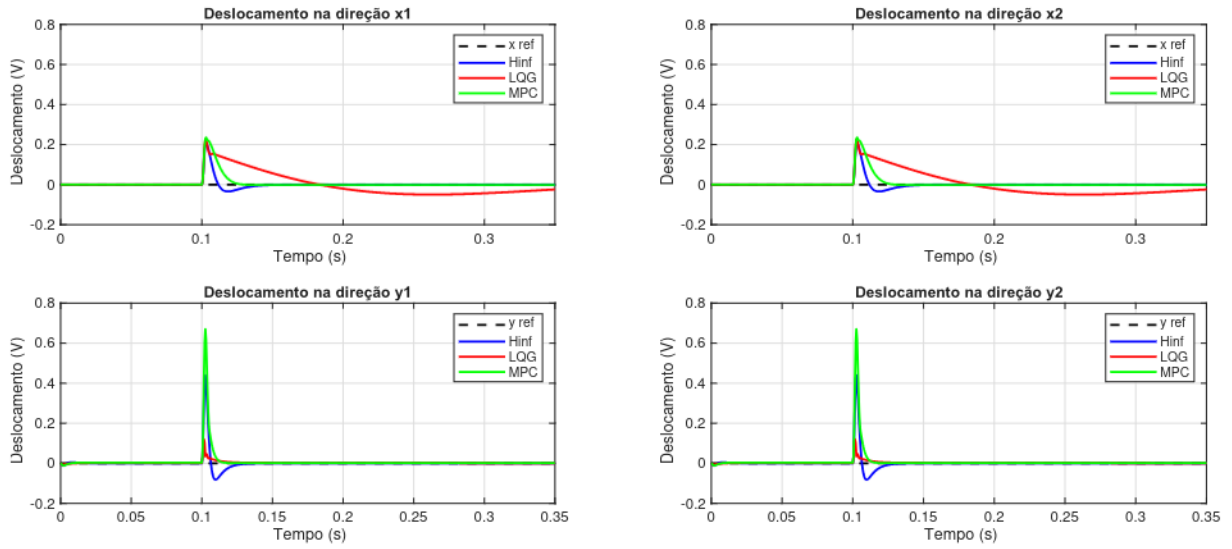


Figura 6.11 – Deslocamentos para perturbação tipo impulso de 0,4 V. Fonte: [Autor]

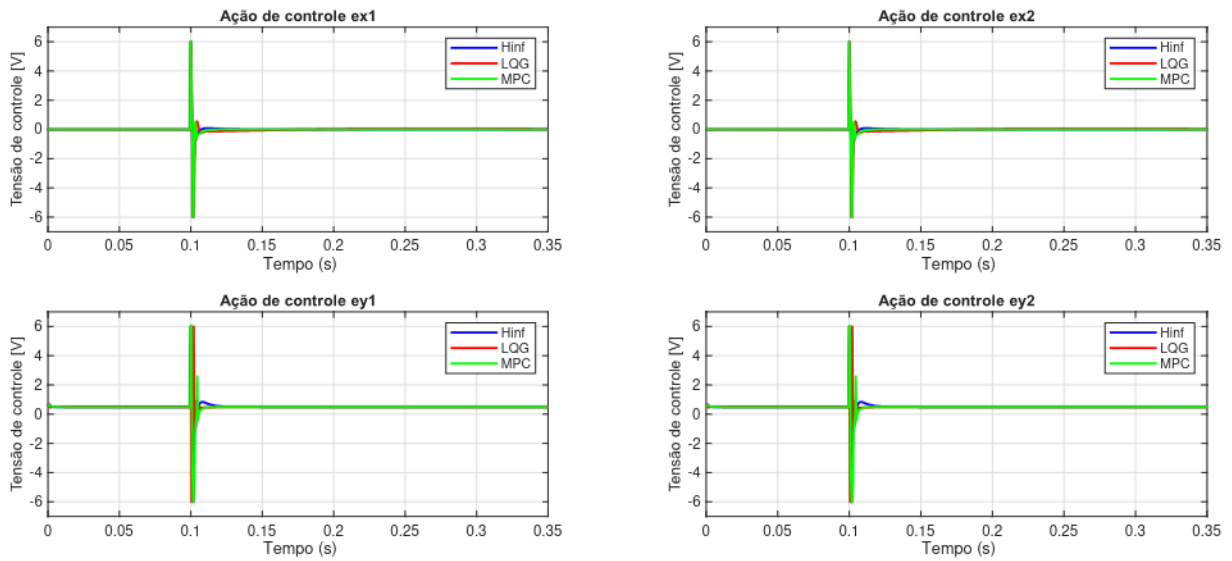


Figura 6.12 – Ações de controle para perturbação tipo impulso de 0,4 V. Fonte: [Autor]

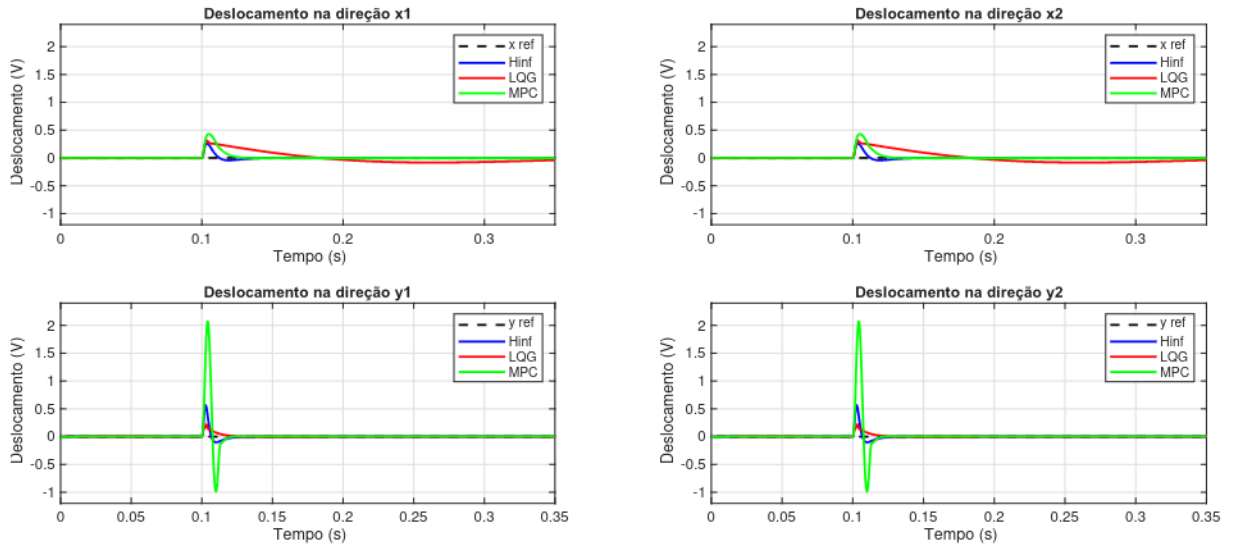


Figura 6.13 – Deslocamentos para perturbação tipo impulso de 0,6 V. Fonte: [Autor]

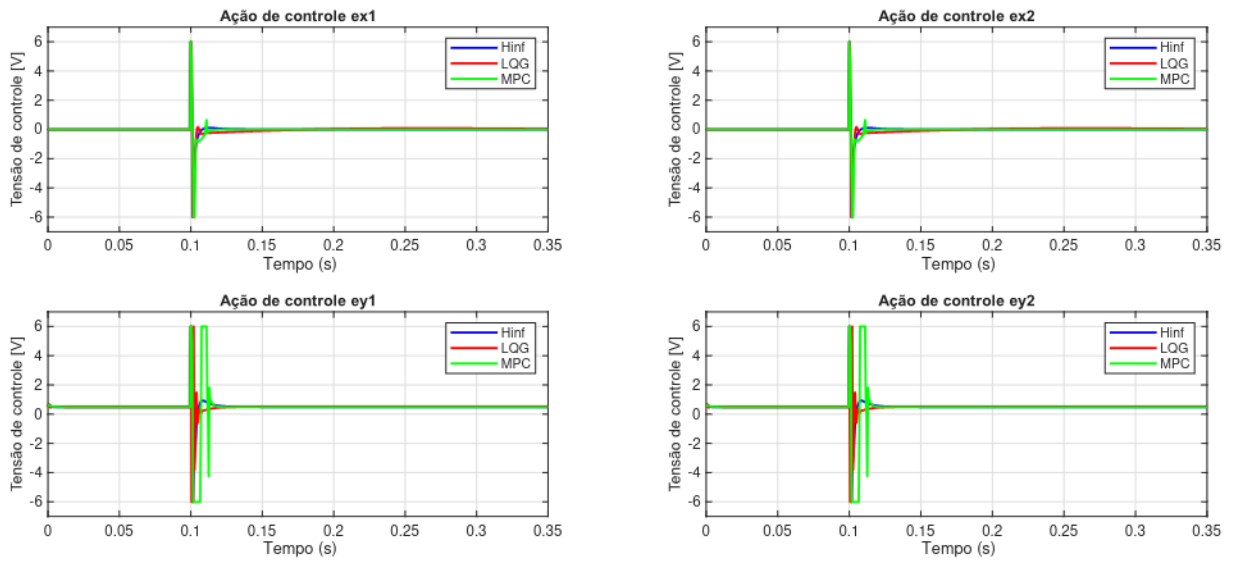


Figura 6.14 – Ações de controle para perturbação tipo impulso de 0,6 V. Fonte: [Autor]

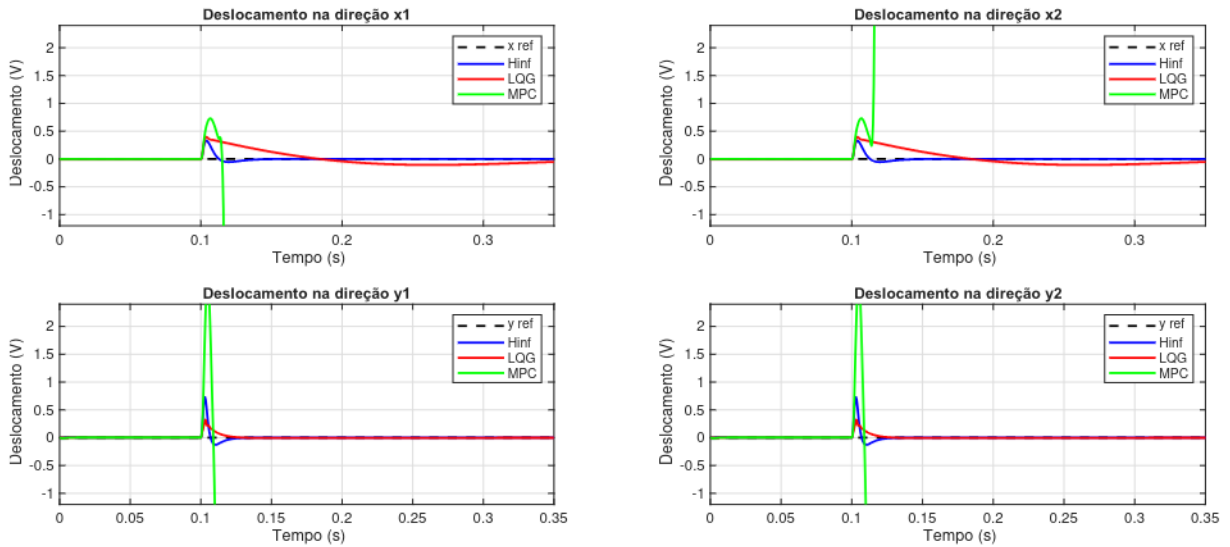


Figura 6.15 – Deslocamentos para perturbação tipo impulso de 0,8 V. Fonte: [Autor]

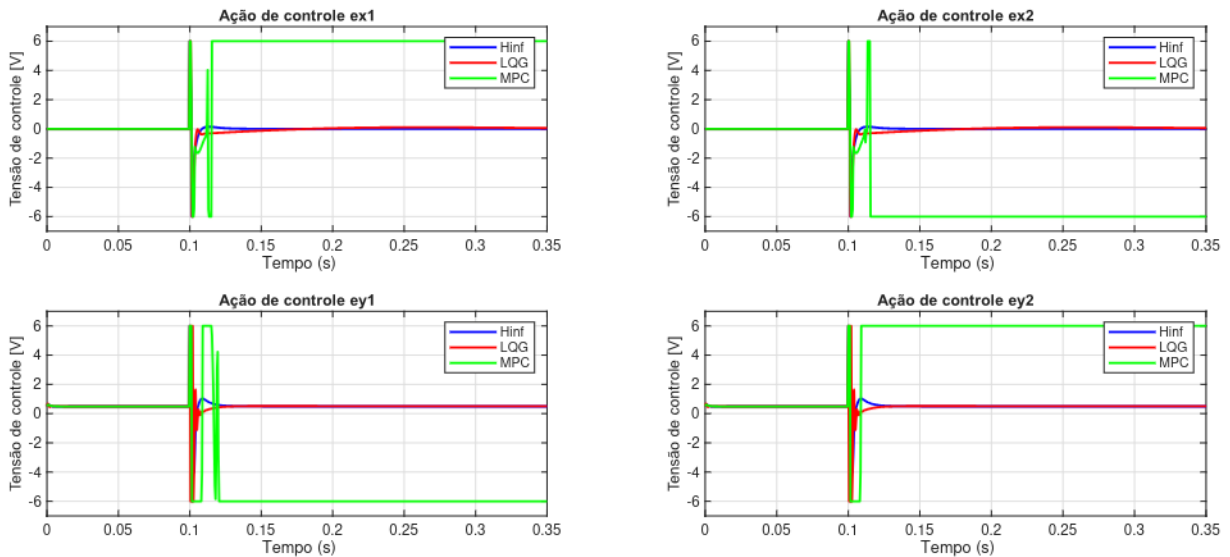


Figura 6.16 – Ações de controle para perturbação tipo impulso de 0,8 V. Fonte: [Autor]

6.2.2 Discussão dos Resultados em Modo Regulatório

Uma análise qualitativa das respostas às perturbações já permite extrair conclusões relevantes acerca do desempenho das estratégias avaliadas. Dentre os três controladores, o LQG foi o que manteve o comportamento observado nos testes anteriores, caracterizando-se por uma resposta de relativa baixa amplitude no instante da perturbação, porém com dinâmica lenta de retorno à posição de referência. Já entre o MPC e o H_{∞} , verifica-se que os dois inverteram as posições nesses testes em relação ao modo rastreamento. Desta vez, o MPC foi o que apresentou maior oscilação nas respostas em ambas as direções.

Para a perturbação de pequena amplitude, quando aplicado o impulso de 0,2 V, o controlador MPC apresentou o melhor desempenho geral, respondendo de maneira

agressiva, com baixa oscilação e amortecimento progressivo, alcançando a estabilidade logo após o distúrbio sem erro estacionário. Contudo, com o aumento das amplitudes, o MPC foi o que se mostrou mais sensível na direção y , com as respostas das saídas sendo as que apresentaram os maiores valores de pico de deslocamento imediatamente após a excitação, culminando com a completa destabilização do sistema quando aplicado o impulso de 0,8 V. Isso mostra a importância da representação da força peso na dinâmica do sistema.

Cabe ressaltar que na direção x , os três controladores apresentaram desempenho similar em termos de oscilação, com aumento gradativo e de forma controlada da amplitude. A recuperação ao regime estacionário ocorre de forma rápida tanto com o MPC quanto com o H_∞ , mas o controlador LQG exibe um comportamento mais amortecido, que resulta em menor rapidez na rejeição completa do distúrbio. Já na direção y , o H_∞ , apesar do aumento no sobressinal, mantém uma resposta equilibrada ao longo dos testes, com bom amortecimento e recuperação rápida da posição nominal. Entretanto, nesta direção, o LQG se destaca com a resposta com menor sobressinal e tempo de acomodação similar aos outros dois, mas com melhor eficiência energética.

O bom desempenho dos controladores H_∞ e LQG é corroborado pela análise quantitativa, apresentada na Tabela 6.4. Observa-se, contudo, que o H_∞ supera os demais controladores na maioria dos critérios de desempenho quando considera-se a média dos índices obtidos em ambas as direções, com exceção do índice de variabilidade, no qual não apresenta o melhor resultado. Esses dados quantitativos confirmam as características amplamente reconhecidas do controle H_∞ , que destaca-se pela rápida resposta dinâmica, elevada precisão no rastreamento de referência e robustez frente a perturbações e incertezas do modelo.

Tabela 6.4 – Índices de desempenho no modo regulatório para impulso de 0,6 V. Fonte: [Autor]

Critério	Modo Regulatório – Impulso 0,6 V					
	Direção x_1			Direção y_1		
	H_∞	LQG	MPC	H_∞	LQG	MPC
IAE	0,009246	0,061908	0,017122	0,010546	0,008923	0,040668
ISE	0,002392	0,008978	0,005395	0,003686	0,001858	0,047380
ITAE	0,001005	0,011994	0,002024	0,001094	0,001048	0,004596
ITSE	0,000245	0,001346	0,000568	0,000378	0,000189	0,004979
RBEMCE	0,009650	0,062895	0,017727	0,015900	0,014298	0,047353
RBMSEMCE	0,002796	0,009965	0,006000	0,009041	0,007232	0,054065
VAR	0,541538	2,610580	0,236264	0,847425	0,261786	0,573612

7 Conclusão e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusão

A avaliação comparativa de estratégias de controle não visa necessariamente descartar opções, mas sim evidenciar as características principais de cada abordagem e de como atuam com o intuito de contribuir no processo de seleção, que deve ser sempre uma análise caso a caso, guiada principalmente pelas condições operacionais específicas de cada aplicação. Para esse objetivo, é de fundamental importância dispor de meios que possibilitem essa avaliação de forma segura, econômica em termos de custos e tempo e que reduza riscos de problemas durante a implantação.

Nesse sentido, se justifica o desenvolvimento de modelos computacionais representativos do sistema sob análise, que sejam capazes de representar as principais dinâmicas com as quais os controladores terão que lidar. Esse, portanto, foi o primeiro objetivo deste trabalho, que buscou o desenvolvimento de um modelo para o sistema mancal-rotor que reproduzisse aspectos importantes desses dispositivos, como a atuação por aplicação de tensão, a componente de tensão induzida nas bobinas pelo deslocamento do rotor, o efeito da força peso na direção y e as não linearidades introduzidas pelo efeito giroscópico.

O quão representativo é o modelo pode ser crucial para a validade dos resultados obtidos, principalmente quando se trata de sistemas multivariáveis que são naturalmente instáveis e altamente não-lineares, como é o caso do sistema mancal-rotor. Essas características tornam o controle desse tipo de sistema desafiador, especialmente em aplicações de alta velocidade, quando as não linearidades são potencializadas. Por ser justamente esse o campo de maior interesse para utilização dos mancais magnéticos, deve-se priorizar soluções adequadas para essas condições.

É esse contexto que justifica a opção por técnicas de controle avançado, como as selecionadas para análise nesse trabalho. O LQG, o H_∞ e o MPC são técnicas consolidadas, desenvolvidas há mais de 40 anos e com inúmeros estudos e aplicações práticas já realizadas, inclusive em mancais magnéticos. Como mencionado inicialmente, esse estudo não teve, portanto, o objetivo de definir quem é a melhor entre elas, mas de analisá-las juntas, sob as mesmas condições operacionais, para explorar suas características e com isso ajudar na escolha daquela que atende melhor às necessidades do cenário de aplicação. Os resultados obtidos nos testes, tanto em modo rastreamento quanto em modo regulatório, evidenciam que não existe uma estratégia de controle universalmente superior, mas sim soluções mais adequadas a diferentes critérios de desempenho.

Nos testes de rastreamento, o MPC apresentou o melhor compromisso geral entre rapidez, estabilidade e eficiência energética, destacando-se principalmente nos critérios quadráticos e nos tempos de resposta, ainda que apresente pequeno erro residual em regime estacionário, o que poderia ser resolvido com a introdução de uma ação integradora. Em contrapartida, foi o que se mostrou mais limitado nos testes com perturbações. O controlador H_∞ , por sua vez, mostrou-se altamente preciso e robusto, com excelente desempenho nos testes em modo regulatório, porém com a desvantagem de sobressinais elevados em variações de referência, o que pode representar um fator limitante em aplicações práticas sensíveis à segurança operacional. Por fim, o LQG, embora tenha apresentado menor sobressinal e bom desempenho na rejeição a perturbações, foi o que teve respostas mais lentas e maior erro acumulado, características que podem restringir sua aplicação a cenários em que a suavidade da resposta seja priorizada em detrimento da rapidez e da precisão.

Outro ponto importante a destacar é em relação ao processo de implementação e sintonia dos controladores. As técnicas adotadas tanto para o LQG quanto para o MPC se mostraram bastante efetivas e facilitaram sobremaneira o ajuste dos parâmetros. Já para o controlador H_∞ , a definição das funções peso exigiu maior esforço, pois, apesar de partir de critérios que sugerem valores iniciais, o ajuste final foi com base na tentativa e erro, o que demandou várias simulações. Essas considerações reforçam que a escolha da estratégia de controle não deve se basear exclusivamente nos índices de desempenho, mas também considerar, além dos requisitos operacionais e de segurança do sistema, aspectos práticos de projeto, como a complexidade de implementação, a facilidade de sintonia e o custo computacional associado.

7.2 Trabalhos Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, destacam-se algumas possibilidades:

- a incorporação de efeitos físicos que não foram considerados na etapa de modelagem do sistema, tais como os fluxos de dispersão (*leakage flux*), bem como as características de saturação dos materiais magnéticos. Adicionalmente, vibrações causadas por desbalanceamentos podem ser modeladas e analisadas de forma mais detalhada, uma vez que tais fenômenos podem influenciar significativamente o desempenho dinâmico e a precisão do sistema;
- a consideração de incertezas associadas ao modelo matemático, decorrentes de parâmetros mal conhecidos. Esse aspecto pode ser explorado adotando-se estratégias

de controle capazes de lidar adequadamente com essas incertezas, como o próprio controlador H_∞ e o MPC Robusto citado em Camacho e Bordons (2007);

- explorar métodos de sintonia que proporcionem um aprimoramento no ajuste dos controladores, em especial, o controlador H_∞ , que neste estudo exigiu mais simulações para se chegar a um ajuste adequado. O trabalho de Nair *et al.* (2009) poderia ser a base para uma pesquisa nesse sentido; e
- avaliar o custo computacional de cada estratégia de controle e os possíveis impactos em uma aplicação prática. Nesta análise comparativa, pode-se considerar soluções que buscam minimizar esse custo, como o *Finite Set Control* MPC.

Referências

- AHAD, M. A.; IQBAL, N.; AHMAD, S. M.; KHAN, M. Detailed modelling and lqg control of a 2-dof radial active magnetic bearing for rigid rotor. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 43, n. 5, p. 234, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 80.
- API. *API 617: Axial and centrifugal compressors and expander-compressors for petroleum, chemical and gas industry service*. 7. ed. Washington, DC, 2002. Citado na página 21.
- BEMPORAD, A.; MORARI, M.; RICKER, N. L. Model predictive control toolbox. *User's Guide, Version*, MathWorks, v. 2, 2004. Citado na página 66.
- BREŃKACZ, Ł.; WITANOWSKI, Ł.; DROSIŃSKA-KOMOR, M.; SZEWCZUK-KRYPA, N. Research and applications of active bearings: A state-of-the-art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 151, p. 107423, 2021. Citado na página 17.
- BRYSON, A. E. *Applied optimal control: optimization, estimation and control*. [S.l.]: Routledge, 2018. Citado na página 77.
- CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. Constrained model predictive control. In: *Model predictive control*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 177–216. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 100.
- DOYLE, J.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P.; FRANCIS, B. State-space solutions to standard h_2 and h_∞ control problems. In: IEEE. *1988 American control conference*. [S.l.], 1988. p. 1691–1696. Citado na página 59.
- EARNSHAW, S. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 7, p. 97, 1848. Citado na página 19.
- FEELEY, J. J. Acceleration-augmented lqg control of an active magnetic bearing. In: *New Mexico Univ., The Fifth NASA Symposium on VLSI Design*. [S.l.: s.n.], 1993. Citado na página 21.
- GARCIA, C. *Controle de processos industriais: estratégias convencionais*. [S.l.]: Editora Blucher, 2021. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 106 e 107.
- GEIM, A.; SIMON, M.; BOAMFA, M.; HEFLINGER, L. Magnet levitation at your fingertips. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 400, n. 6742, p. 323–324, 1999. Citado na página 19.
- GU, D.-W.; PETKOV, P. H.; KONSTANTINOV, M. M. *Robust control design with MATLAB®*. [S.l.]: Springer, 2005. Citado na página 55.
- HONGPHAN, T.; COLE, M. O.; CHAMROON, C.; BRAND, Z. H-infinity controller design for efficiency optimization of magnetic bearings in a flywheel energy storage system. In: AIP PUBLISHING LLC. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2022. v. 2681, n. 1, p. 020038. Citado na página 22.

- HUANG, Z.; LI, C.; ZHOU, Z.; LIU, B.; ZHANG, Y.; YANG, M.; GAO, T.; LIU, M.; ZHANG, N.; SHARMA, S. *et al.* Magnetic bearing: structure, model, and control strategy. *The International Journal of advanced manufacturing technology*, Springer, v. 131, n. 5, p. 3287–3333, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 35.
- ISO. *ISO 14839-3: Mechanical vibration – Vibration of rotating machinery equipped with active magnetic bearings – Part 3: Evaluation of stability margin*. Geneva, 2006. Citado na página 21.
- JÚNIOR, D. d. O. A.; BARRETO, G. Modelagem e controle de um veículo subaquático autônomo com dois graus de liberdade. In: *Anais do Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*. Brasil: [s.n.], 2025. Citado na página 62.
- KAMATH, K. P.; BEKINAL, S. I.; S, V. G.; DODDAMANI, M. Review of control strategies for active magnetic bearings. *Cogent Engineering*, Cogent OA, v. 12, n. 1, p. 2467145, 2025. Citado na página 20.
- KEMPER, H. Schwebbahn mit räderlosen fahrzeugen, die an eisernen fahrschienen mittels magnetischer felder schwebend entlang geführt werden. *Germany Patent*, n. 6443316, 1937. Citado na página 20.
- MALKAPURE, H. G.; CHIDAMBARAM, M. Comparison of two methods of incorporating an integral action in linear quadratic regulator. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 47, n. 1, p. 55–61, 2014. Citado na página 62.
- MEEKER, D. C.; MASLEN, E. H. Analysis and control of a three pole radial magnetic bearing. In: *Tenth Int. Symp. Magnetic Bearings*. [S.l.: s.n.], 2006. Citado na página 35.
- MOMENTS, L. M. Mbc 500 magnetic bearing system operating instructions. *USA, Magnetic Moments*, 1995. Citado 5 vezes nas páginas 11, 41, 47, 68 e 69.
- MONACO, L. H. *Controle de sistema de mancais magnéticos ativos para um motor de indução linear tubular*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado na página 21.
- MORSE, N.; SMITH, R.; PADEN, B. Magnetic bearing lab# 1: Analytical modeling of a magnetic bearing system. *Comp. and Math. with Appl., Magnetic Moments LLC, Goleta, USA*, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 46.
- MORSI, A.; ABBAS, H. S.; AHMED, S. M.; MOHAMED, A. M. Model predictive control based on linear parameter-varying models of active magnetic bearing systems. *IEEE Access*, IEEE, v. 9, p. 23633–23647, 2021. Citado na página 23.
- MORSI, A.; AHMED, S. M.; MOHAMED, A. M.; ABBAS, H. S. Model predictive control for an active magnetic bearing system. In: IEEE. *2020 IEEE 7th International Conference on Industrial Engineering and Applications (ICIEA)*. [S.l.], 2020. p. 715–720. Citado 3 vezes nas páginas 23, 86 e 88.
- NAIR, S. S.; SANGEETHA, G. Hybrid pid/ h_∞ control of active magnetic bearings. *International Journal of Electrical Engineering*, v. 4, n. 1, 2011. Citado na página 22.
- NAIR, S. S.; VAIDYAN, M.; JOY, M. Generalized design and disturbance analysis of robust h_∞ control of active magnetic bearings. In: IEEE. *2009 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. [S.l.], 2009. p. 1124–1129. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 100.

- NOSHADI, A.; SHI, J.; LEE, W. S.; SHI, P.; KALAM, A. Robust control of an active magnetic bearing system using h_∞ and disturbance observer-based control. *Journal of Vibration and Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 23, n. 11, p. 1857–1870, 2017. Citado na página 22.
- SAINI, P. K.; PRATAP, B.; KUMAR, P. Design of model predictive controller for active magnetic bearing system. In: IEEE. *2021 International Conference on Control, Automation, Power and Signal Processing (CAPS)*. [S.l.], 2021. p. 1–6. Citado na página 23.
- SCHWEITZER, G.; MASLEN, E. H. *et al. Magnetic bearings*. [S.l.]: Springer, 2009. Citado 9 vezes nas páginas 9, 18, 19, 27, 38, 39, 40, 50 e 51.
- SERRANO, M. A. P. *Estratégias de controle avançado para uma planta de tratamento de pH*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 107.
- SIMON, M. D.; HEFLINGER, L. O.; RIDGWAY, S. Spin stabilized magnetic levitation. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 65, n. 4, p. 286–292, 1997. Citado na página 19.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. Citado 12 vezes nas páginas 9, 21, 22, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 63, 70 e 104.
- STEPHAN, R. M.; PINTO, F.; GOMES, A.; SANTISTEBAN, J. A.; SALAZAR, A. O. Mancais magnéticos: mecatrônica sem atrito. *Editora Ciência Moderna*, 2013. Citado 11 vezes nas páginas 9, 17, 19, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 e 42.
- TARISCIOTTI, L.; PAPINI, L.; AHUMADA, C.; BOLOGNESI, P. Predictive control for an active magnetic bearing system with sensorless position control. In: IEEE. *2021 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*. [S.l.], 2021. p. 3267–3274. Citado na página 24.
- WU, T.; ZHANG, W. Review on key development of magnetic bearings. *Machines*, v. 13, n. 2, 2025. ISSN 2075-1702. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2075-1702/13/2/113>>. Citado na página 20.
- YOON, S. Y.; LIN, Z.; ALLAIRE, P. E. Iterative tuning of linear quadratic controller for ambbs in a high speed compressor. In: *13th International Symposium on Magnetic Bearings*. [S.l.: s.n.], 2012. Citado na página 21.
- ZHANG, W.; ZHU, H. Radial magnetic bearings: An overview. *Results in physics*, Elsevier, v. 7, p. 3756–3766, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 35.

APÊNDICE A – Controlabilidade e Observabilidade

Antes de introduzir os conceitos de controlabilidade e observabilidade, é importante apresentar a definição de sistema estabilizável e detectável. Conforme Skogestad e Postlethwaite (2005), um sistema é estabilizável quando todos os seus estados instáveis são controláveis. Estados instáveis são aqueles cujo autovalor associado possui parte real maior que 0, para sistema contínuo, ou módulo maior que 1, para sistema discretizado. Da mesma forma, um sistema é detectável quando todos os estados instáveis são observáveis.

Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo, é válido afirmar que um sistema é dito controlável se existe uma entrada $u(t)$ que seja capaz de levá-lo de um estado inicial $x(0) = x_0$ para um estado final x_1 em um tempo finito t_1 , de modo que $x(t_1) = x_1$. Uma das formas de verificar essa propriedade é por meio do posto da matriz de controlabilidade, definida como:

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B], \quad (\text{A.1})$$

em que n é número de estados e A e B são matrizes do modelo do sistema em espaço de estados. Para que o sistema seja controlável, a matriz M_c tem que ter posto completo, ou seja, tem que ser igual ao número total de estados.

Cabe salientar que esta forma de verificação não diz nada sobre como os estados se comportam ao longo de $0 < t < t_1$ e nem para $t > t_1$. Outro ponto a ser considerado e que não é verificado com este método é que os sinais de entrada necessários para se atingir o estado final sejam de grande magnitude e possuam variações bruscas. Sendo assim, o resultado dessa verificação pode indicar a controlabilidade, mas não quer dizer na prática, a depender da aplicação, que o controle seja realizável.

Para um sistema ser dito observável, é preciso que seja possível, para qualquer tempo $t_1 > 0$, determinar o estado inicial $x(0) = x_0$ a partir do histórico da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ no intervalo de tempo $[0, t_1]$. A forma de verificar essa propriedade é por meio da matriz de observabilidade, definida a partir das matrizes A e C do modelo do sistema em espaço de estados:

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

que deve possuir posto completo, igual a n .

Estados não observáveis mas que sejam estáveis não representam problema do ponto de vista de controle, pois não têm efeito algum sobre as saídas.

Apesar das limitações citadas, a verificação da controlabilidade e observabilidade do sistema a ser controlado é uma das tarefas básicas realizada no início do projeto de estratégias de controle baseadas na realimentação de estados.

APÊNDICE B – Critérios de Desempenho

A avaliação de estratégias de controle para determinada aplicação requer o estabelecimento de critérios que possibilitem ao projetista uma comparação direta entre as diferentes opções. De início, a premissa básica é que as opções sejam capazes de estabilizar o sistema que se deseja controlar. O segundo passo consiste em avaliar a qualidade da resposta, verificando se o objetivo é alcançado respeitando restrições operacionais e atendendo o desempenho mínimo esperado. Tão importante quanto atingir o objetivo é saber como ele foi alcançado, pois pode ser decisivo para a viabilidade de uma possível solução.

Em Garcia (2021) são apresentados critérios para medição de robustez e desempenho em termos de regimes transitório e estacionário, relacionados, respectivamente, à componente transitória e ao estado estacionário da resposta do sistema. Tais critérios visam quantificar as características relacionadas a esses dois regimes, como estabilidade relativa, comportamento da resposta transitória, erro em regime permanente e a variabilidade. Essa abordagem facilita a definição dos objetivos a serem alcançados pelo controlador, guiando o processo de sintonia com base nas prioridades estabelecidas.

A estabilidade relativa está relacionada ao quão robusto é o sistema, isto é, o quão distante ele está da instabilidade. Ela não trata apenas de saber se o sistema é estável, mas o quão estável ele é. Em sistemas SISO, essa característica é geralmente avaliada no domínio da frequência por meio das margens de ganho e de fase, obtidas a partir do diagrama de Bode.

Para sistemas MIMO, a análise é mais complexa porque existem múltiplos canais interagindo entre si. Como já discutido na Seção 4.1, nesses casos, a estabilidade relativa é avaliada por meio da decomposição da matriz de funções de transferência em valores singulares, analisando-se, por exemplo, o valor singular máximo (que indica a direção de maior amplificação) e as margens multivariáveis de ganho e fase.

Como o escopo deste trabalho não inclui análise de robustez, esse tópico não é detalhado. O foco, portanto, são os critérios de desempenho relacionados às outras características dos regimes transitório e estacionário. O comportamento da resposta transitória pode ser avaliado através de critérios como sobressinal máximo, instante de pico, tempo de subida, e tempo de acomodação. Já a análise em regime estacionário do erro e variabilidade é realizada por meio de critérios que são dados como funções ponderadas do desvio da variável medida em relação à referência.

As definições e formulações dos critérios relacionados ao comportamento da resposta transitória utilizados para análise são (GARCIA, 2021):

- Tempo de subida (t_r) – tempo necessário para a resposta do sistema passar de 0% a 100%. Para sistemas superamortecidos, normalmente se emprega o intervalo de 10% a 90% do valor final;
- Tempo de pico (t_p) – tempo necessário para a resposta do sistema atingir o primeiro pico do sobressinal;
- Sobressinal máximo (M_p) – máximo valor de pico, medido em % do valor final da resposta do sistema. É dado pela seguinte equação:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}; \quad (\text{B.1})$$

- Tempo de acomodação (t_s) – tempo necessário para a resposta do sistema atingir e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final (2% a 5%).

As definições e formulações dos critérios relacionados ao regime estacionário utilizados para análise são ((GARCIA, 2021) e (SERRANO, 2020)):

- IAE (*Integral of Absolute Error*) – fornece uma medida que penaliza todos os erros proporcionalmente ao seu valor absoluto. Possui baixa seletividade quanto a variações nos parâmetros do processo. É calculado por

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt, \quad (\text{B.2})$$

em que t é o tempo e e o erro;

- ISE (*Integral of Squared Error*) – fornece uma medida com grandes ponderações para erros grandes e pequenas ponderações para erros pequenos. Possui baixa seletividade quanto a variações nos parâmetros do processo. É calculado por

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt; \quad (\text{B.3})$$

- ITAE (*Integral of Time Absolute Error*) – fornece uma medida com pequena ponderação para erro inicial grande, mas com alta penalização para erros pequenos nos tempos finais. É calculado por

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt; \quad (\text{B.4})$$

- ITSE (*Integral of Time Squared Error*) – fornece uma medida com grande penalização para erros grandes nos tempos finais. É calculado por

$$ITSE = \int_0^{\infty} te^2(t) dt; \quad (\text{B.5})$$

- RBEMCE (*Reference Based Error with Minimum Control Effort*) – fornece uma medida que pondera erro médio e esforço médio de controle. É calculado por

$$I_{\text{RBEMCE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e[i]| + \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^n |u[i]|, \quad (\text{B.6})$$

em que β é um fator de ponderação para a ação de controle u ;

- RBMSEMCE (*Reference Based in Mean Squared Error with Minimum Control Effort*) – fornece uma medida que leva em conta o esforço de controle, mas usa erro quadrático médio, o que resulta em grandes ponderações para erros grandes e pequenas ponderações para erros pequenos. É calculado por

$$I_{\text{RBMSEMCE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^2[i] + \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^n |u[i]|; \quad (\text{B.7})$$

- Variabilidade – fornece uma medida que indica o quanto a variável controlada se distancia de sua média. É calculado por

$$\text{Variabilidade} = \frac{2\sigma}{\mu}, \quad (\text{B.8})$$

com

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(i) - \bar{y})^2, \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y(i), \quad (\text{B.9})$$

em que σ é o desvio-padrão do erro e e μ é o valor médio da saída do processo y .

APÊNDICE C – Códigos Matlab

Simulador do Sistema Mancal-Rotor

A) Código do Bloco 1.

```

function [dx0, dx0_dot, dy0, dy0_dot, dpsi, dpsi_dot, dtheta, dtheta_dot, dix1_dt,
% Estados: x = [x0; dx0; y0; dy0; psi; dpsi; theta; dtheta; ix1; ix2; iy1; iy2]
% Entradas: u = [ex1; ex2; ey1; ey2]

%% Parâmetros físicos do MMA
L_total = 0.269;           % m
lb = 0.1105;              % m (distância do mancal ao centro)
lh = 0.1317;              % m (distância do sensor Hall ao centro)
ks = 2.8e-7;              % N*m^2/A^2 (constante eletromagnética)
D0 = 0.0004;              % m (entreferro nominal)
m = 0.2629;               % kg (massa do rotor)
Jx = 1.5884e-3;           % kg.m^2 (momento de inércia em x)
Jz = 5.05e-6;             % kg.m^2 (momento de inércia em z)
Re = 4;                   % Ohm (resistência da bobina)
Le = 0.88e-3;             % H (indutância da bobina)
g = 9.81;                 % m/s^2 (gravidade)
wz = 500 * pi;           % rad/s (velocidade de rotação - 15000 rpm)

%% Correntes de base
ibias1 = 0.5;             % A (horizontal)
ibias2 = 1.5;             % A (vertical)

kix = (4 * ks * ibias1) / D0^2;
kiy = (4 * ks * ibias2) / D0^2;

%% Limite de corrente para saturação suave
Imax = 10.0; % [A] ajuste conforme capacidade da bobina
Fmax = 100.0; % [N] limite de força magnética (ajustar conforme projeto)

sat = @(i, imax) imax * tanh(i/imax); % função saturação suave

```

```

%% Estados
x0 = x(1); vx0 = x(2); y0 = x(3); vy0 = x(4);
psi = x(5); wpsi = x(6); theta = x(7); wtheta = x(8);
ix1 = x(9); ix2 = x(10); iy1 = x(11); iy2 = x(12);
% correntes saturadas
ix1s = sat(ix1, Imax);
ix2s = sat(ix2, Imax);
iy1s = sat(iy1, Imax);
iy2s = sat(iy2, Imax);

% Posições locais dos mancais
x1 = x0 - lb * psi;
x2 = x0 + lb * psi;
y1 = y0 - lb * theta;
y2 = y0 + lb * theta;

%% Forças eletromagnéticas (com regularização e saturação suave)
eps = 1e-9;
Fx1_raw = ks*((ix1s + ibias1)^2 / ((x1 - D0)^2 + eps) ...
           - (ix1s - ibias1)^2 / ((x1 + D0)^2 + eps));
Fx2_raw = ks*((ix2s + ibias1)^2 / ((x2 - D0)^2 + eps) ...
           - (ix2s - ibias1)^2 / ((x2 + D0)^2 + eps));
Fy1_raw = ks*((iy1s + ibias2)^2 / ((y1 - D0)^2 + eps) ...
           - (iy1s - ibias2)^2 / ((y1 + D0)^2 + eps));
Fy2_raw = ks*((iy2s + ibias2)^2 / ((y2 - D0)^2 + eps) ...
           - (iy2s - ibias2)^2 / ((y2 + D0)^2 + eps));

Fx1 = sat(Fx1_raw, Fmax);
Fx2 = sat(Fx2_raw, Fmax);
Fy1 = sat(Fy1_raw, Fmax);
Fy2 = sat(Fy2_raw, Fmax);

% Dinâmica do sistema
dx0      = vx0;
dx0_dot  = (Fx1 + Fx2)/m;
dy0      = vy0;
dy0_dot  = (Fy1 + Fy2 - m*g)/m;

```

```

dpsi      = wpsi;
dpsi_dot = (wz*Jz*wtheta + lb*(Fx2 - Fx1)) / Jx;
dtheta   = wtheta;
dtheta_dot = (-wz*Jz*wpsi + lb*(Fy2 - Fy1)) / Jx;

% Dinâmica das correntes
dix1_dt = (ex1 - Re*ix1 - kix*dx0) / Le;
dix2_dt = (ex2 - Re*ix2 - kix*dx0) / Le;
diy1_dt = (ey1 - Re*iy1 - kiy*dy0) / Le;
diy2_dt = (ey2 - Re*iy2 - kiy*dy0) / Le;

end

```

B) Código do Bloco 2.

```

function [X1, X2, Y1, Y2] = model_exit(x0,y0,psi,theta)
% Parâmetros do sistema AMB
lh = 0.1317;                % m (distância do sensor Hall ao centro)

%% Saída: posição nos sensores Hall
% Posições nos sensores
X1 = x0 - lh * psi;
X2 = x0 + lh * psi;
Y1 = y0 - lh * theta;
Y2 = y0 + lh * theta;
end

```

C) Código do Bloco 3.

```

function [Vx1, Vx2, Vy1, Vy2] = model_exit(X1,X2,Y1,Y2)

%% Saída: posição nos sensores Hall
% Posições nos sensores
Vx1 = 5000*(X1 + (5*10^6)*X1^3);
Vx2 = 5000*(X2 + (5*10^6)*X2^3);
Vy1 = 5000*(Y1 + (5*10^6)*Y1^3);
Vy2 = 5000*(Y2 + (5*10^6)*Y2^3);
end

```

Modelo Linearizado e Controladores

A) Código com Parâmetros do Modelo.

```

%% Parâmetros físicos do MMA
L_total = 0.269;           % m
lb = 0.1105;              % m (distância do mancal ao centro)
lh = 0.1317;              % m (distância do sensor Hall ao centro)
ks = 2.8e-7;               % N*m^2/A^2 (constante eletromagnética)
D0 = 0.0004;              % m (gap nominal)
m = 0.2629;               % kg (massa do rotor)
Jx = 1.5884e-3;           % kg.m^2 (momento de inércia em x)
Jz = 5.05e-6;             % kg.m^2 (momento de inércia em z)
Re = 4;                   % Ohm (resistência da bobina)
Le = 0.88e-3;             % H (indutância da bobina)
g = 9.81;                 % m/s^2 (gravidade)
wz = 500 * pi;           % rad/s (velocidade de rotação - 15000 rpm)

%% Correntes de base
ibias1 = 0.5;             % A (horizontal)
ibias2 = 1.5;            % A (vertical)

%% Derivadas das forças lineares
kfx = (4 * ks * ibias1^2) / D0^3;
kfy = (4 * ks * ibias2^2) / D0^3;
kix = (4 * ks * ibias1) / D0^2;
kiy = (4 * ks * ibias2) / D0^2;
%% Parâmetros do modelo linearizado (Tabela III)
a1 = 2*kfx/m;
a2 = 2*kfy/m;
a3 = 2*kfx*lb^2/Jx;
a4 = 2*kfy*lb^2/Jx;
a5 = wz * Jz / Jx;       % calculado com wz

a6 = kix/m;
a7 = kiym;

```

```
a8 = kix*lb/Jx;
a9 = kiy*lb/Jx;

a10 = -kix/Le;
a11 = -kiy/Le;

alpha = -Re/Le;
gamma = 1/Le;

%% Informativo
disp('Parâmetros AMB carregados com sucesso!');
```

B) Código para Cálculo dos Índices de Desempenho.

```
%AlgoritmoMatlabpara índices de desempenho
classdef Desempenho

properties (SetAccess = private, GetAccess = private)
% VARIÁVEIS
    erro;
    pv;
    sp;
    mv;
    tempo;
    tamanho;
end

properties(SetAccess=private)
%ISU
isu;
%IAU
iau;
%IAE
iae;
%ISE
ise;
%ITAE
```

```
itae;
%ITSE
itse;
%RBEMCE
rbemce;
%RBMSEMCE
rbmsemce;
%Variabilidade
var;
% Métricas temporais
risetime;
settlingtime;
overshoot;
peakttime;
peakvalue;
sserror;
end

methods
% CONSTRUTOR

function metricas = Desempenho(erro,tempo,pv,sp,mv)
metricas.erro=erro;
metricas.tempo = tempo;
metricas.pv = pv;
metricas.sp = sp;
metricas.mv = mv;
metricas.tamanho = length(erro);
end% Desempenho

function isuFcn = get.isu(obj)
somador = 0;
for i = 1: obj.tamanho
somador = somador + obj.mv(i)^2;
end
isuFcn = somador/obj.tempo(end);
end % isuFcn
```

```
function iauFcn = get.iau(obj)
iauFcn = sum(abs(obj.mv))/obj.tempo(end);
end % iauFcn

function iaeFcn = get.iae(obj)
Ts = 0.0005; % 500 µs
somador = 0;
for i = 1: obj.tamanho
somador = somador + Ts*abs(obj.erro(i));
end
iaeFcn = somador/obj.tempo(end);
end % iaeFcn

function itaeFcn = get.itae(obj)
Ts = 0.0005; % 500 µs
somador = 0;
for i = 1: obj.tamanho
somador = somador + obj.tempo(i)*Ts*abs(obj.erro(i));
end
itaeFcn = somador/obj.tempo(end);
end % itaeFcn

function iseFcn = get.ise(obj)
Ts = 0.0005; % 500 µs
somador = 0;
for i = 1: obj.tamanho
somador = somador + Ts*obj.erro(i)^2;
end
iseFcn = somador/obj.tempo(end);
end % iseFcn

function itseFcn = get.itse(obj) %MSE
Ts = 0.0005; % 500 µs
somador = 0;
for i = 1: obj.tamanho
somador = somador + obj.tempo(i)*Ts*obj.erro(i)^2;
end
```

```
itseFcn = somador/obj.tempo(end);  
end % itaeFcn
```

```
function rbemceFcn= get.rbemce(obj) %RBEMCE  
Ts = 0.0005; % 500 µs  
somador0 = 0;  
somador1 = 0;  
b=0.01;  
for i = 1: obj.tamanho  
somador0 = somador0 + Ts*abs(obj.erro(i));  
somador1 = somador1 + b*Ts*sum(abs(obj.mv(i)));  
end  
rbemceFcn = abs((somador0+somador1)/obj.tempo(end));  
end % rbemceFcn
```

```
function rbmsefceFcn= get.rbmsemce(obj) %RBMSEMCE  
Ts = 0.0005; % 500 µs  
somador0 = 0;  
somador1 = 0;  
b=0.01;  
for i = 1: obj.tamanho  
somador0 = somador0 + Ts*(obj.erro(i))^2;  
somador1 = somador1 + b*Ts*sum(abs(obj.mv(i)));  
end  
rbmsefceFcn = abs((somador0+somador1)/obj.tempo(end));  
end % rbmsefceFcn
```

```
function varFcn= get.var(obj) %Variabilidade  
somador0 = 0;  
somador1 = 0;  
for i = 1: obj.tamanho  
somador0 = somador0 + (abs(obj.pv(i))-abs(obj.sp(i)))^2;  
somador1=somador1 + obj.pv(i);  
end  
varFcn = abs(2*sqrt(somador0/obj.tempo(end))/(somador1/obj.tempo(end))) ;  
end % varFcn
```

```
%% === Métricas de resposta temporal ===
```

```
%% === Métricas de resposta temporal (válidas para degrau positivo ou negativo)

function tr = get.risetime(obj)
    % Tempo de subida (10% -> 90%) para degrau positivo ou negativo
    y0 = obj.pv(1);
    yfinal = obj.sp(end);

    s = sign(yfinal - y0); % direção do degrau

    y10 = y0 + 0.1*(yfinal - y0);
    y90 = y0 + 0.9*(yfinal - y0);

    idx10 = find(s*obj.pv >= s*y10, 1);
    idx90 = find(s*obj.pv >= s*y90, 1);

    if ~isempty(idx10) && ~isempty(idx90)
        tr = obj.tempo(idx90) - obj.tempo(idx10);
    else
        tr = NaN;
    end
end

function ts = get.settlingtime(obj)
    % Tempo de acomodação ( $\pm 2\%$ ) para degrau positivo ou negativo
    yfinal = obj.sp(end);
    tol = 0.02 * abs(yfinal);

    idx = find(abs(obj.pv - yfinal) > tol, 1, 'last');

    if isempty(idx)
        ts = 0;
    else
        ts = obj.tempo(idx);
    end
end
```

```
function os = get.overshoot(obj)
    % Overshoot ou undershoot - sempre positivo
    y0 = obj.pv(1);
    yfinal = obj.sp(end);
    s = sign(yfinal - y0);

    if s > 0
        ypeak = max(obj.pv);    % degrau positivo
    else
        ypeak = min(obj.pv);    % degrau negativo
    end

    os = s * (ypeak - yfinal) / abs(yfinal - y0) * 100;

    if os < 0
        os = 0;    % evita valores negativos por ruído
    end
end
```

```
function tp = get.peaktime(obj)
    % Tempo do pico - depende da direção do degrau
    y0 = obj.pv(1);
    yfinal = obj.sp(end);
    s = sign(yfinal - y0);

    if s > 0
        [~, idx] = max(obj.pv);
    else
        [~, idx] = min(obj.pv);
    end

    tp = obj.tempo(idx);
end
```

```
function yp = get.peakvalue(obj)
```

```

    % Valor de pico - depende da direção do degrau
    y0 = obj.pv(1);
    yfinal = obj.sp(end);
    s = sign(yfinal - y0);

    if s > 0
        yp = max(obj.pv); % degrau positivo
    else
        yp = min(obj.pv); % degrau negativo
    end

end

function ess = get.sserror(obj)
    % Erro estacionário (média dos últimos 5% da resposta)

    N = obj.tamanho;
    Nss = max(1, round(0.05 * N)); % últimos 5%

    pv_final = mean(obj.pv(end-Nss+1:end));
    sp_final = mean(obj.sp(end-Nss+1:end));

    ess = sp_final - pv_final;
end

end

end

```

C) Código de Implementação dos Controladores.

```

clearvars;
close all;
clc;
f = 1; % Contador de Figuras da Lista
%% === 1) Carregar parâmetros físicos do MMA ===
Parametros_MBC500;
I4 = eye(4);

```

```
% === 2) Montagem das matrizes A,B,C,D (linearizado) ===
% A1 (8x8)
A1 = zeros(8,8);
A1(1,2) = 1;
A1(2,1) = a1;
A1(3,4) = 1;
A1(4,3) = a2;
A1(5,6) = 1;
A1(6,5) = a3;
A1(6,8) = a5;
A1(7,8) = 1;
A1(8,6) = -a5;
A1(8,7) = a4;

% A2 (8x4)
A2 = zeros(8,4);
A2(2,1) = a6;
A2(2,2) = a6;
A2(4,3) = a7;
A2(4,4) = a7;
A2(6,1) = -a8;
A2(6,2) = a8;
A2(8,3) = -a9;
A2(8,4) = a9;

% A3 (4x8)
A3 = zeros(4,8);
A3(1,2) = a10;
A3(2,2) = a10;
A3(3,4) = a11;
A3(4,4) = a11;

% Matriz A (12x12)
A = zeros(12,12);
A(1:8,1:8) = A1;
A(1:8,9:12) = A2;
A(9:12,1:8) = A3;
A(9:12,9:12) = alpha * I4;
```

```
% B (12x4)
B = zeros(12,4);
B(9:12,1:4) = gamma * I4;

% C (4x12)
C1 = zeros(4,8);
C1(1,1) = 1; C1(1,5) = -lh;
C1(2,1) = 1; C1(2,5) = lh;
C1(3,3) = 1; C1(3,7) = -lh;
C1(4,3) = 1; C1(4,7) = lh;
C = 5000 * [C1, zeros(4,4)];
D = zeros(4,4);

% Sistema contínuo
sysc = ss(A,B,C,D);

%% 1) Discretização por ZOH
Ts = 0.0005; % 500 µs
sysd = c2d(sysc, Ts, 'zoh');
Ad = sysd.A;
Bd = sysd.B;
Cd = sysd.C;
Dd = sysd.D;

%% 2) Criar sistema discreto para o MPC

sysd.InputName = {'ex1', 'ex2', 'ey1', 'ey2'};
sysd.OutputName = {'x1', 'x2', 'y1', 'y2'};

%% Salvar no workspace e em arquivo
assignin('base', 'A_cont', A);
assignin('base', 'B_cont', B);
assignin('base', 'C_cont', C);
assignin('base', 'D_cont', D);

assignin('base', 'Ad', Ad);
assignin('base', 'Bd', Bd);
```

```

assignin('base','Cd',Cd);
assignin('base','Dd',Dd);
assignin('base','sysd',sysd);
assignin('base','Ts',Ts);

Co = ctrb(Ad,Bd); rankCo = rank(Co); %verificação de controlabilidade
Ob = obsv(Ad,Cd); rankOb = rank(Ob); %verificação de observabilidade

n = size(Ad,1);
m = size(Bd,2);
p = size(Cd,1);
fprintf('rank controllability = %d / %d\n', rankCo, n);

%% === 4) Definição dos pesos para H infinito ===

%% --- 1) Cálculo da frequência de cruzamento MIMO
w = logspace(1,5,1000000); % varredura de frequência
[mag, ~] = sigma(sysc, w); % resposta em valor singular (dB)

% Encontrar onde o maior valor singular cruza 0 dB
magdB = 20*log10(mag);
idx = find(magdB(1,:) <= 0, 1, 'first');
wb = w(idx);

fprintf('Frequência de cruzamento MIMO (wb): %.2f rad/s\n', wb);
s = tf('s');
% W1 (desempenho / sensibilidade) - ajuste inicial
M = 3; % limite de ||S||_inf, relacionado à robustez e
% à oscilação da resposta do sistema
A = 1e-5; % limite inferior, erro em regime estacionário
wb1 = wb; % rad/s, banda passante, relacionado à fidelidade e
% ao tempo de resposta do sistema
W1_c = (s/M + wb1)/(s+A*wb1);
W1 = W1_c * eye(4);

% W3 (ruído / model mismatch) - uso diagonal simples
wb3 = 2875;
W3_c = (s + wb3/M)/(A*s+wb3);

```

```

W3 = W3_c * eye(4);

% escala para o peso W2 (varredura)
W21 = 0.002;
W22 = 0.01;
% montar W2 replicado em 4 canais
W2=[W21 0 0 0;
     0 W21 0 0;
     0 0 W22 0;
     0 0 0 W22;];

% montar planta aumentada
Paug_final = augw(sysc, W1, W2, W3);
Paug_final_d = c2d(Paug_final, Ts, 'zoh');
[Kc, CLinfo, gamma] = hinfsyn(Paug_final, 4, 4);
[Kd, CLinfo, gamma] = hinfsyn(Paug_final_d, 4, 4);
Kc_final = minreal(Kc);
Kd_final = minreal(Kd);
ordK = order(Kc);
fprintf(' gamma = %.4g | ordem K = %d\n', gamma, ordK);
order(Kc_final));

% Extrair matrizes para Simulink
[Kd_A, Kd_B, Kd_C, Kd_D] = ssdata(Kd_final);

% Extrair matrizes para Simulink
[Kd_A, Kd_B, Kd_C, Kd_D] = ssdata(Kd_final);
save('Kd', 'Kd_A', 'Kd_B', 'Kd_C', 'Kd_D', 'Ts');

%% === Projeto LQG = LQR discreto + Observador (Kalman) ===

%% --- 1) Montar sistema aumentado com integradores de erro em y

Aaug = [ Ad,          zeros(n,p);
        -Cd,         eye(p)    ];    % (n+p)x(n+p)

Baug = [ Bd;
        -Dd ];                    % (n+p) x m

```

```
% checar controlabilidade da planta aumentada
Co_aug = ctrb(Aaug, Baug);
rankCo_aug = rank(Co_aug);
fprintf('Controlabilidade Aaug,Baug: rank = %d / %d\n', rankCo_aug, n+p);
%% 1) LQR discreto
% Variações máxima
x_max = [2e-4; 1e-1; 2e-4; 1e-1; 1e-3; 1e0; 1e-3; 1e0; 1; 1; 1; 1];
u_max = 6 * ones(4,1);
z_max = [0.5;
         0.5;
         0.1;
         0.1;];
% --- 2) Construir Q e R segundo Bryson
% Qx para estados contínuos/discretos:
Qx_bryson = diag(1 ./ (x_max.^2)); % tamanho n x n

% Qz para estados integradores (p)
Qz_bryson = diag(1 ./ (z_max.^2)); % p x p

% Matriz Q aumentada
Qaug = blkdiag(Qx_bryson, Qz_bryson); % (n+p) x (n+p)

% R pelo Bryson
R_bryson = diag(1 ./ (u_max.^2)); % m x m

% Escala opcional
% alpha > 1 -> penaliza mais estados (torna controlador mais conservador)
% beta > 1 -> penaliza mais esforço (controlador age menos)
alpha = 1; % ajuste fino para Q
beta = 1; % ajuste fino para R

Qaug = alpha * Qaug;
R = beta * R_bryson;
% Ganho LQR para o sistema aumentado
Ka = dlqr(Aaug, Baug, Qaug, R); % (m x (n+p))

% separar ganhos
```

```

K = Ka(:, 1:n);           % (m x n)
Kint = Ka(:, n+1:end);   % (m x p)

%% 2) Projeto do estimador discreto (Kalman / dlqe)
% Modelagem do ruído de processo e ruído de medida (tuning)
% Definir matrizes de ruído (ajustáveis)
Q_fk = 1e-8*eye(size(Ad)); % ruído de processo
R_fk = 1e-8*eye(size(Cd,1)); % ruído de medição
assignin('base','Q_fk',Q_fk);
assignin('base','R_fk',R_fk);

% Exportar para workspace
assignin('base','K_lqr',K);
assignin('base','Ka',Ka);
assignin('base','Kint',Kint);

%% 3) Criar o MPC
%% Horizontes MPC
Np = 30; % Prediction horizon
Nc = 3; % Control horizon

mpcAMB = mpc(sysd, Ts, Np, Nc);
mpcAMB.Model.Nominal.U = [0; 0; 0.5; 0.5];
%% Pesos (ajuste conforme prioridade)
% [y1, y2, y3, y4] = [x1, x2, y1, y2]
mpcAMB.Weights.OutputVariables = [10000 10000 10000 10000];
mpcAMB.Weights.ManipulatedVariables = [0.01 0.01 0.01 0.01];
mpcAMB.Weights.ManipulatedVariablesRate = [0.1 0.1 0.1 0.1];

%% Restrições
% Entradas: ex1, ex2, ey1, ey2 (tensões [V])
Umax = 4; % limite ±3V no amplificador
mpcAMB.MV(1).Min = -Umax; mpcAMB.MV(1).Max = Umax;
mpcAMB.MV(2).Min = -Umax; mpcAMB.MV(2).Max = Umax;
mpcAMB.MV(3).Min = -Umax; mpcAMB.MV(3).Max = Umax;
mpcAMB.MV(4).Min = -Umax; mpcAMB.MV(4).Max = Umax;

% Saídas: deslocamentos x1,x2,y1,y2 (gap típico ~0.4 mm)

```

```
gap_max = 2e-4;    % ±0.2 mm permitido
mpcAMB.OV(1).Min = -gap_max; mpcAMB.OV(1).Max = gap_max;
mpcAMB.OV(2).Min = -gap_max; mpcAMB.OV(2).Max = gap_max;
mpcAMB.OV(3).Min = -gap_max; mpcAMB.OV(3).Max = gap_max;
mpcAMB.OV(4).Min = -gap_max; mpcAMB.OV(4).Max = gap_max;

%% Exibir resumo
disp(mpcAMB);

%% Salvar no workspace
assignin('base', 'mpcAMB', mpcAMB);
save('mpcAMB.mat', 'mpcAMB');

sim('AMB_dynamics');

end
time = Vx1_h.Time;
Vx1_h = Vx1_h.Data;
Vx2_h = Vx2_h.Data;
Vy1_h = Vy1_h.Data;
Vy2_h = Vy2_h.Data;

ex1_h = ex1_h.Data;
ex2_h = ex2_h.Data;
ey1_h = ey1_h.Data;
ey2_h = ey2_h.Data;

Vx1_l = Vx1_l.Data;
Vx2_l = Vx2_l.Data;
Vy1_l = Vy1_l.Data;
Vy2_l = Vy2_l.Data;

ex1_l = ex1_l.Data;
ex2_l = ex2_l.Data;
ey1_l = ey1_l.Data;
ey2_l = ey2_l.Data;
```

```
Vx1_m = Vx1_m.Data;
Vx2_m = Vx2_m.Data;
Vy1_m = Vy1_m.Data;
Vy2_m = Vy2_m.Data;

ex1_m = ex1_m.Data;
ex2_m = ex2_m.Data;
ey1_m = ey1_m.Data;
ey2_m = ey2_m.Data;

x_ref = x_ref.Data;
%x2_ref = x2_ref.Data;
y_ref = y_ref.Data;
%y2_ref = y2_ref.Data;

erro_x1_h = erro_x1_h.Data;
erro_y1_h = erro_y1_h.Data;
erro_x1_l = erro_x1_l.Data;
erro_y1_l = erro_y1_l.Data;
erro_x1_m = erro_x1_m.Data;
erro_y1_m = erro_y1_m.Data;

% Cria o objeto

metricas_x1_h = Desempenho(erro_x1_h, time, Vx1_h, x_ref, ex1_h);
metricas_x1_l = Desempenho(erro_x1_l, time, Vx1_l, x_ref, ex1_l);
metricas_x1_m = Desempenho(erro_x1_m, time, Vx1_m, x_ref, ex1_m);

metricas_y1_h = Desempenho(erro_y1_h, time, Vy1_h, y_ref, ey1_h);
metricas_y1_l = Desempenho(erro_y1_l, time, Vy1_l, y_ref, ey1_l);
metricas_y1_m = Desempenho(erro_y1_m, time, Vy1_m, y_ref, ey1_m);

% Exibe resultados
fprintf('\n==== Métricas de Desempenho - H infinito - Direção x1 =\n');
fprintf('IAE          = %.6f\n', metricas_x1_h.iae);
fprintf('ISE          = %.6f\n', metricas_x1_h.ise);
fprintf('ITAE         = %.6f\n', metricas_x1_h.itae);
```

```

fprintf('ITSE          = %.6f\n', metricas_x1_h.itse);
fprintf('RBEMCE       = %.6f\n', metricas_x1_h.rbemce);
fprintf('RBMSEMCE     = %.6f\n', metricas_x1_h.rbmsemce);
fprintf('Variabilidade = %.6f\n', metricas_x1_h.var);
fprintf('=====\n');
fprintf('\n===== Métricas de Desempenho - LQG - Direção x1 =\n');
fprintf('IAE            = %.6f\n', metricas_x1_l.iae);
fprintf('ISE            = %.6f\n', metricas_x1_l.ise);
fprintf('ITAE           = %.6f\n', metricas_x1_l.itae);
fprintf('ITSE           = %.6f\n', metricas_x1_l.itse);
fprintf('RBEMCE         = %.6f\n', metricas_x1_l.rbemce);
fprintf('RBMSEMCE       = %.6f\n', metricas_x1_l.rbmsemce);
fprintf('Variabilidade = %.6f\n', metricas_x1_l.var);
fprintf('=====\n');
fprintf('\n===== Métricas de Desempenho - MPC - Direção x1 =\n');
fprintf('IAE            = %.6f\n', metricas_x1_m.iae);
fprintf('ISE            = %.6f\n', metricas_x1_m.ise);
fprintf('ITAE           = %.6f\n', metricas_x1_m.itae);
fprintf('ITSE           = %.6f\n', metricas_x1_m.itse);
fprintf('RBEMCE         = %.6f\n', metricas_x1_m.rbemce);
fprintf('RBMSEMCE       = %.6f\n', metricas_x1_m.rbmsemce);
fprintf('Variabilidade = %.6f\n', metricas_x1_m.var);
fprintf('=====\n');
fprintf('Métricas de Desempenho no Transitório - H infinito - Direção x1');
fprintf('Tempo de subida    = %.4f s\n', metricas_x1_h.risetime);
fprintf('Tempo de acomodação = %.4f s\n', metricas_x1_h.settlingtime);
fprintf('Overshoot         = %.2f %%\n', metricas_x1_h.overshoot);
fprintf('Tempo de pico     = %.4f s\n', metricas_x1_h.peaktime);
fprintf('Valor de pico     = %.4f\n', metricas_x1_h.peakvalue);
fprintf('Erro estacionário   = %.4f\n', metricas_x1_h.serror);
fprintf('=====\n');
fprintf('\n= Métricas de Desempenho no Transitório - LQG - Direção x1 =\n');
fprintf('Tempo de subida    = %.4f s\n', metricas_x1_l.risetime);
fprintf('Tempo de acomodação = %.4f s\n', metricas_x1_l.settlingtime);
fprintf('Overshoot         = %.2f %%\n', metricas_x1_l.overshoot);
fprintf('Tempo de pico     = %.4f s\n', metricas_x1_l.peaktime);
fprintf('Valor de pico     = %.4f\n', metricas_x1_l.peakvalue);
fprintf('Erro estacionário   = %.4f\n', metricas_x1_l.serror);

```

```

fprintf('=====\n');
fprintf('\n= Métricas de Desempenho no Transitório - MPC - Direção x1 =\n');
fprintf('Tempo de subida      = %.4f s\n', metricas_x1_m.risetime);
fprintf('Tempo de acomodação = %.4f s\n', metricas_x1_m.settlingtime);
fprintf('Overshoot             = %.2f %%\n', metricas_x1_m.overshoot);
fprintf('Tempo de pico          = %.4f s\n', metricas_x1_m.peaktime);
fprintf('Valor de pico           = %.4f\n', metricas_x1_m.peakvalue);
fprintf('Erro estacionário       = %.4f\n', metricas_x1_m.sserror)
fprintf('=====\n');
fprintf(' Métricas de Desempenho - H infinito - Direção y1 ');
fprintf('IAE      = %.6f\n', metricas_y1_h.iae);
fprintf('ISE      = %.6f\n', metricas_y1_h.ise);
fprintf('ITAE     = %.6f\n', metricas_y1_h.itae);
fprintf('ITSE     = %.6f\n', metricas_y1_h.itse);
fprintf('RBEMCE   = %.6f\n', metricas_y1_h.rbemce);
fprintf('RBMSEMCE = %.6f\n', metricas_y1_h.rbmsemce);
fprintf('Variabilidade = %.6f\n', metricas_y1_h.var);
fprintf('=====\n');
fprintf('\n= Métricas de Desempenho - LQG - Direção y1 =====\n');
fprintf('IAE      = %.6f\n', metricas_y1_l.iae);
fprintf('ISE      = %.6f\n', metricas_y1_l.ise);
fprintf('ITAE     = %.6f\n', metricas_y1_l.itae);
fprintf('ITSE     = %.6f\n', metricas_y1_l.itse);
fprintf('RBEMCE   = %.6f\n', metricas_y1_l.rbemce);
fprintf('RBMSEMCE = %.6f\n', metricas_y1_l.rbmsemce);
fprintf('Variabilidade = %.6f\n', metricas_y1_l.var);
fprintf('=====\n');
fprintf('\n= Métricas de Desempenho - MPC - Direção y1 =====\n');
fprintf('IAE      = %.6f\n', metricas_y1_m.iae);
fprintf('ISE      = %.6f\n', metricas_y1_m.ise);
fprintf('ITAE     = %.6f\n', metricas_y1_m.itae);
fprintf('ITSE     = %.6f\n', metricas_y1_m.itse);
fprintf('RBEMCE   = %.6f\n', metricas_y1_m.rbemce);
fprintf('RBMSEMCE = %.6f\n', metricas_y1_m.rbmsemce);
fprintf('Variabilidade = %.6f\n', metricas_y1_m.var);
fprintf('=====\n');
fprintf('Métricas de Desempenho no Transitório - H infinito - Direção y1');
fprintf('Tempo de subida      = %.4f s\n', metricas_y1_h.risetime);

```

```

fprintf('Tempo de acomodação = %.4f s\n', metricas_y1_h.settlingtime);
fprintf('Overshoot          = %.2f %%\n', metricas_y1_h.overshoot);
fprintf('Tempo de pico       = %.4f s\n', metricas_y1_h.peaktime);
fprintf('Valor de pico        = %.4f\n', metricas_y1_h.peakvalue);
fprintf('Erro estacionário     = %.4f\n', metricas_y1_h.serror)
fprintf('=====\\n');
fprintf('\\n= Métricas de Desempenho no Transitório - LQG - Direção y1 =\\n');
fprintf('Tempo de subida        = %.4f s\n', metricas_y1_l.risetime);
fprintf('Tempo de acomodação = %.4f s\n', metricas_y1_l.settlingtime);
fprintf('Overshoot            = %.2f %%\n', metricas_y1_l.overshoot);
fprintf('Tempo de pico         = %.4f s\n', metricas_y1_l.peaktime);
fprintf('Valor de pico         = %.4f\n', metricas_y1_l.peakvalue);
fprintf('Erro estacionário      = %.4f\n', metricas_y1_l.serror)
fprintf('=====\\n');
fprintf('\\n= Métricas de Desempenho no Transitório - MPC - Direção y1 =\\n');
fprintf('Tempo de subida        = %.4f s\n', metricas_y1_m.risetime);
fprintf('Tempo de acomodação = %.4f s\n', metricas_y1_m.settlingtime);
fprintf('Overshoot            = %.2f %%\n', metricas_y1_m.overshoot);
fprintf('Tempo de pico         = %.4f s\n', metricas_y1_m.peaktime);
fprintf('Valor de pico         = %.4f\n', metricas_y1_m.peakvalue);
fprintf('Erro estacionário      = %.4f\n', metricas_y1_m.serror)
%% ----- Plote de Figuras -----

% Plot dos gráficos dos deslocamentos e ações de controle
figure(f)
f = f+1;
subplot(2, 2, 1);
plot(time,x_ref, 'k', 'LineStyle', '--', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vx1_h, 'b', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vx1_l, 'r', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vx1_m, 'g', 'Linewidth', 1.5);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Deslocamento (V)');
xticks(0:0.1:1); % eixo X de 0 a 5 com passo de 0.5
yticks(-1.4:0.2:1.4); % eixo Y de -10 a 10 com passo de 2

```

```
xlim([0 1]);
ylim([-1.4 1.4]);
title('Deslocamento na direção x1');
legend('x_ref','Hinf','LQG','MPC');
grid on;
hold off;

subplot(2, 2, 2);
plot(time,x_ref, 'k', 'LineStyle', '--', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vx2_h, 'b', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vx2_l, 'r', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vx2_m, 'g', 'Linewidth', 1.5);
xticks(0:0.1:1); % eixo X de 0 a 5 com passo de 0.5
yticks(-1.4:0.2:1.4); % eixo Y de -10 a 10 com passo de 2
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Deslocamento (V)');
xlim([0 1]);
ylim([-1.4 1.4]);
title('Deslocamento na direção x2');
legend('x_ref','Hinf','LQG','MPC');
grid on;
hold off;

subplot(2, 2, 3);
plot(time,y_ref, 'k', 'LineStyle', '--', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vy1_h, 'b', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vy1_l, 'r', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vy1_m, 'g', 'Linewidth', 1.5);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Deslocamento (V)');
xticks(0:0.1:1); % eixo X de 0 a 5 com passo de 0.5
yticks(-1.4:0.2:1.4); % eixo Y de -10 a 10 com passo de 2
```

```
xlim([0 1]);
ylim([-1.4 1.4]);
title('Deslocamento na direção y1');
legend('y_ref','Hinf','LQG','MPC');
grid on;
hold off;

subplot(2, 2, 4);
plot(time,y_ref, 'k', 'LineStyle', '--','Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vy2_h, 'b', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vy2_l, 'r', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,Vy2_m, 'g', 'Linewidth', 1.5);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Deslocamento (V)');
xticks(0:0.2:1); % eixo X de 0 a 5 com passo de 0.5
yticks(-1.4:0.2:1.4); % eixo Y de -10 a 10 com passo de 2
xlim([0 1]);
ylim([-1.4 1.4]);
title('Deslocamento na direção y2');
legend('y_ref','Hinf','LQG','MPC');
grid on;
hold off;

print('-depsc','-r600','Deslocamento_x_y_stair04.eps');
exportgraphics(gcf, 'Deslocamento_x_y_stair04.png', 'Resolution', 600);

figure(f)
f = f+1;

subplot(2, 2, 1);
plot(time,ex1_h, 'b', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,ex1_l, 'r', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,ex1_m, 'g', 'Linewidth', 1.5);
```

```
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Tensão de controle [V]');
xlim([0 1]);
ylim([-7 7]);
title('Ação de controle ex1');
legend('Hinf','LQG','MPC');
grid on;
hold off;

subplot(2, 2, 2);
plot(time,ex2_h, 'b', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,ex2_l, 'r', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,ex2_m, 'g', 'Linewidth', 1.5);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Tensão de controle [V]');
xlim([0 1]);
ylim([-7 7]);
title('Ação de controle ex2');
legend('Hinf','LQG','MPC');
grid on;
hold off;

subplot(2, 2, 3);
plot(time,ey1_h, 'b', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,ey1_l, 'r', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,ey1_m, 'g', 'Linewidth', 1.5);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Tensão de controle [V]');
xlim([0 1]);
ylim([-7 7]);
title('Ação de controle ey1');
legend('Hinf','LQG','MPC');
grid on;
hold off;
```

```
subplot(2, 2, 4);
plot(time,ey2_h, 'b', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,ey2_l, 'r', 'Linewidth', 1.5);
hold on;
plot(time,ey2_m, 'g', 'Linewidth', 1.5);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Tensão de controle [V]');
xlim([0 1]);
ylim([-7 7]);
title('Ação de controle ey2');
legend('Hinf','LQG','MPC');
grid on;
hold off;

print('-depsc','-r600','Controle_x_y_stair04.eps');
exportgraphics(gcf, 'Controle_x_y_stair04.png', 'Resolution', 600);
```